Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, Вероятности сверхбольших уклонений сумм независимых случайных величин с экспоненциально убывающим распределением, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 1, 175–179

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp12>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:49:44

силу условия (5). Пусть $\varepsilon < \tau$. Выше отмечалось, что найдется $r \in \mathbf{N}$ такое, что $\max_{1 \leq k \leq m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau)| < \varepsilon/2$ для всех $n \geq r$. Для таких n мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \varepsilon\} &= \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{\tau \geq |X_{n,k}(\tau)| > \varepsilon\} + \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\left\{|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\} \\ &\leq \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{2+\delta} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^{2+\delta} + \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\}. \end{aligned}$$

Привлекая (5) и (8), мы приходим к (9). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть дано число $\sigma > 0$. Предположим, что выполнено условие (3) и $\sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}X_{n,k}^2 = \sigma^2$, $\mathbf{E}X_{n,k} = 0$, $k = 1, \dots, m_n$, $n \in \mathbf{N}$. Для того чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_n < x\} = \Phi(x/\sigma)$ для любого $x \in \mathbf{R}$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \int_{-\infty}^{\infty} \min\{|x|^{2+\delta}, x^2\} d\mathbf{P}\{X_{n,k} < x\} = 0.$$

Доказательство. Последнее условие представляет собой соединение условия Ляпунова и условия Линдеберга. Нетрудно видеть, что оно эквивалентно условию Линдеберга. Поэтому теорема представляет собой перефразировку теоремы Линдеберга–Феллера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.–Л.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
2. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
3. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
4. Круглов В. М. Нормальная и пуассоновская сходимости. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 392–398.
5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2001, 318 с.

Поступила в редакцию
4.V.2005

© 2007 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

ВЕРОЯТНОСТИ СВЕРХБОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ¹⁾

В заметке изучаются вероятности больших уклонений суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, функция распределения которых имеет экспоненциально убывающий хвост.

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия; e-mail: lrozovsky@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта НШ-4222.2006.1 и гранта РФФИ 06-01-0179-а.

Ключевые слова и фразы: независимые случайные величины, большие отклонения, правильно меняющаяся функция.

1. Введение и результаты. Пусть независимые случайные величины $\{X_i\}_{i \geq 1}$ распределены так же, как случайная величина X с невырожденным распределением F ; $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ($n \geq 1$), $F_n(x) = \mathbf{P}\{S_n < x\}$.

Если распределение случайной величины X абсолютно непрерывно с плотностью $p(x)$, удовлетворяющей условию

$$p(x) = e^{-\lambda x} x^{\rho-1} l(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

где постоянные $\lambda, \rho > 0$, функция $l(x)$ медленно меняется на бесконечности и при некотором целом $m \geq 1$

$$\sup_x p^{*m}(x) < \infty \quad (1.2)$$

(здесь и далее $p^{*m}(x) = \frac{d}{dx} F_m(x)$), то из [1, теорема 2A и следствие 1A] следует, что

$$p^{*n}(x) = \frac{1}{\sigma(h) \sqrt{2\pi n}} L^n(h) e^{-hx} \left(1 + \sum_{j=1}^{s-1} a_j(h) n^{-j} + O(n^{-s}) \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

равномерно по $x \geq \mu n$ при любом $\mu > \mathbf{E}X$ (отметим, что $-\infty \leq \mathbf{E}X < \infty$), где $h = h(x/n)$ — единственное решение уравнения

$$m(h) = \frac{x}{n}, \quad (1.4)$$

целое $s \geq 1$, а $\sup_{x \geq \mu n} |a_j(h)| < \infty$. В частности,

$$F_n(x+y) - F_n(x) = L^n(h) e^{-hx} \frac{1 - e^{-hy}}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.5)$$

равномерно по $x \geq \mu n$ и $y > 0$. Здесь

$$L(h) = \mathbf{E}e^{hX}, \quad m(h) = (\ln L(h))', \quad \sigma^2(h) = (\ln L(h))'', \quad 0 < h < \lambda. \quad (1.6)$$

Формулы для вычисления коэффициентов $a_j(h)$ в разложении (1.3) приведены в [1, замечание 2 и (3.10)]. Например, $a_1(h) = \frac{1}{8} \lambda_4(h) - \frac{5}{24} (\lambda_3(h))^2$, где $\lambda_m(h) = (\ln L(h))^{(m)} / \sigma^m(h)$. При этом $a_1(h) \sim -\frac{1}{12} \rho^{-1}$, $h \uparrow \lambda$.

Пользуясь случаем, заметим, что соотношение [1, (3.10)] содержит опечатку и приводим его правильную версию:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \sum_{\nu=1}^{2s-1} P_{\nu}(it) n^{-\nu/2} dt = \sum_{j=1}^{s-1} q_{2j}(0) n^{-j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{s-1} a_j(h) n^{-j}.$$

В настоящей работе показано, что соотношения (1.3) и (1.5) выполняются при более слабых условиях, не требующих регулярности от поведения $p(x)$.

С технической точки зрения асимптотическое разложение (1.3) в области сверхбольших отклонений, так же как в [2] и [1], можно получить, изучая асимптотическое разложение плотности суммы независимых случайных величин, имеющих сопряженное с F и зависящее от параметра h распределение (подробнее см. [1, (3.4), (3.8)]). Приведем результаты.

Пусть λ — некоторая положительная постоянная, $V(x) = \int_0^x e^{\lambda t} dF(t)$, $x > 0$.

Введем условие: существуют постоянные $b > 1$, $c_1, c_2 > 1$ и $x_0 > 0$ такие, что при каждом $x \geq x_0 > 0$

$$c_1 V(x) \leq V(bx) \leq c_2 V(x). \quad (*)$$

Отметим, что если выполнено (1.1), то $V(x) \sim x^{\rho} l(x) / \rho$, $x \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 1. Условие $(*)$ равносильно следующему предположению:

$$c_3 u^{\alpha} \leq \frac{V(ux)}{V(x)} \leq c_4 u^{\beta}, \quad u \geq 1, \quad x \geq x_0, \quad (1.7)$$

при некоторых положительных постоянных c_3, c_4 и α, β .

В самом деле, выберем постоянную $b > 1$ таким образом, чтобы $c_2 = c_4 b^\beta > 1$, $c_1 = c_3 b^\alpha > 1$. Тогда из (1.7) при $u = b$ получим соотношение (*). Обратно, пусть $u \geq 1$ и целое $k \geq 0$ удовлетворяет условию $\log_b u \in [k, k+1)$. Тогда из соотношения (*) следует, что при любом $x \geq x_0$

$$c_1^k V(x) \leq V(b^k x) \leq V(ux) < V(b^{k+1} x) \leq c_2^{k+1} V(x)$$

и условие (1.7) выполняется при $c_3 = 1/c_1$, $c_4 = c_2$, $\alpha = \log_b c_1$, $\beta = \log_b c_2$.

Из (1.7), в частности, следует

$$c_5 x^\alpha \leq V(x) \leq c_6 x^\beta, \quad x \geq x_0, \quad (1.8)$$

где $c_5 = c_3 V(x_0)/x_0^\alpha$ и $c_6 = c_4 V(x_0)/x_0^\beta$.

Теорема 1. *Предположим, что случайная величина X имеет плотность $p(x)$. Если выполнены условия (*), (1.2) и при некоторой постоянной $C > 0$*

$$p(x) \leq C e^{-\lambda x} \frac{V(x)}{x}, \quad x \geq x_0, \quad (1.9)$$

то утверждения (1.3) и (1.5) остаются справедливыми.

Следует сказать, что условия (*) и (1.9), в отличие от (1.1), вряд ли предполагают наличие у коэффициентов $a_j(h)$ пределов при $h \uparrow \lambda$.

З а м е ч а н и е 2. В теореме 1 достаточно предполагать существование плотности $p^*(x)$ и выполнение условия

$$p^*(x) \leq C e^{-\lambda x} \frac{V^m(x)}{x}, \quad x \geq x_0, \quad (1.10)$$

при некотором целом $m > 1/\alpha$ (см. (1.7), (1.8)) и некоторой постоянной $C > 0$. Условие (1.2) также может быть ослаблено:

$$\sup_{x < x_0} e^{\varepsilon x} p^*(x) < \infty, \quad (1.11)$$

где $0 < \varepsilon < \lambda$ удовлетворяет уравнению $m(\varepsilon) = \mu$ (напомним, что μ обозначает произвольную постоянную, большую $\mathbf{E}X$). Отметим, что условие (1.11) связано с нижней границей больших уклонений, и чем μ больше, тем ε ближе к λ .

З а м е ч а н и е 3. Теорема 1 является новой лишь при $x > Kn$, где K — некоторая достаточно большая положительная постоянная. Этот факт вытекает из [2] и был отмечен в [1, замечание 1]. Асимптотическое поведение вероятностей $\mathbf{P}\{x \leq S_n < x + y\}$ при $K > x/n > \mathbf{E}X$ без предположений абсолютной непрерывности изучалось в [3] и [4].

Отметим также, что полученный результат дополняет теорему 7.3 из [5].

2. Доказательство теоремы 1. Пусть случайная величина $X(h)$, $0 \leq h < \lambda$, имеет распределение $e^{hx} dF(x)/L(h)$ (см. (1.6)). Заметим, что $m(h) = \mathbf{E}X(h)$, $\sigma^2(h) = \mathbf{D}X(h)$.

Лемма 1. *Пусть δ_0 обозначает некоторую достаточно малую положительную постоянную. Если выполнено условие (*), то при всех $h \in (\lambda - \delta_0, \lambda)$*

$$c_7 V(\delta^{-1}) \leq L(h) \leq c_8 V(\delta^{-1}), \quad (2.1)$$

$$c_7 \leq \delta \mathbf{E}X(h) \leq c_8, \quad (2.2)$$

$$c_7 \leq \delta^2 \mathbf{D}X(h) \leq c_8, \quad (2.3)$$

$$\delta^l \mathbf{E}|X(h)|^l \leq M_l, \quad l \geq 1. \quad (2.4)$$

Здесь и в дальнейшем $\delta = \lambda - h$, $c_7, c_8, \dots$ обозначают положительные постоянные, зависящие лишь от распределения V и, возможно, δ_0 ; M_l зависит от V , δ_0 , l .

Доказательство леммы 1. Очевидно,

$$L(h) \geq \int_0^{1/\delta} e^{-\delta t} dV(t) \geq e^{-1} V\left(\frac{1}{\delta}\right). \quad (2.5)$$

Обозначим k некоторую достаточно большую постоянную, которая будет выбрана позже. Имеем:

$$L(h) = \int_{-\infty}^0 e^{hu} dF(u) + \int_0^{\infty} e^{-\delta x} dV(x) \leq \delta \int_0^{\infty} e^{-\delta u} V(u) du \leq V\left(\frac{k}{\delta}\right) + L_0, \quad (2.6)$$

где (см. условие $(*)$)

$$\begin{aligned} L_0 &= \int_k^{\infty} e^{-u} V\left(\frac{u}{\delta}\right) du \leq c_2 \int_k^{\infty} e^{-u} V\left(\frac{u}{\delta b}\right) du \\ &= c_2 \delta b \int_{k/(\delta b)}^{\infty} e^{-u\delta(b-1)} e^{-u} V(u) du \leq c_2 b e^{-k(b-1)/b} \delta \int_0^{\infty} e^{-u\delta} V(u) du. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.6) при k , удовлетворяющем условию $c_2 b e^{-k(b-1)/b} \leq \frac{1}{2}$, следует (см. также (1.7)) $L_0 \leq 2V(k/\delta) \leq 2c_6 k^\beta V(1/\delta)$, что вместе с (2.5) доказывает (2.1).

Далее, если $l \geq 1$, то

$$\begin{aligned} L(h) \mathbf{E}|X(h)|^l &= \delta^l \int_{-\infty}^{\infty} |u|^l e^{hu} dF(u) + \delta^l \int_0^{\infty} u^{l-1} e^{-\delta u} (\delta u - l) V(u) du \\ &\leq \left(\frac{\delta l}{he}\right)^l + \int_l^{\infty} u^{l-1} e^{-u} (u - l) V\left(\frac{u}{\delta}\right) du. \end{aligned}$$

При этом последний интеграл по условию $(*)$ не превосходит

$$\begin{aligned} c_2 \int_l^{\infty} u^{l-1} e^{-u} (u - l) V\left(\frac{u}{\delta b}\right) du &= c_2 b \int_{l/b}^{\infty} u^{l-1} e^{-ub} (ub - l) V\left(\frac{u}{\delta}\right) du \\ &\leq M_l b \int_{l/b}^{\infty} e^{-u} V\left(\frac{u}{\delta b}\right) du \leq M_l L(h), \end{aligned}$$

откуда следует (2.4) и оценки сверху в (2.2), (2.3).

Теперь

$$L(h) \delta \mathbf{E}X(h) \geq \int_{1/\delta}^{b/\delta} \delta u e^{-\delta u} dV(u) \geq b e^{-b} \left(V\left(\frac{b}{\delta}\right) - V\left(\frac{1}{\delta}\right) \right) \geq b e^{-b} (c_1 - 1) V\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

и, если постоянная $k \geq \delta \mathbf{E}X(h) + 1$,

$$\begin{aligned} L(h) \delta^2 \mathbf{D}X(h) &\geq \int_k^{kb} (u - \delta \mathbf{E}X(h))^2 e^{-u} dV\left(\frac{u}{\delta}\right) \geq c_9 \left(V\left(\frac{bk}{\delta}\right) - V\left(\frac{k}{\delta}\right) \right) \\ &\geq c_9 (c_1 - 1) V\left(\frac{1}{\delta}\right) \geq c_{10} L(h). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. (1.9) $\implies$ (1.10).

Доказательство леммы 2 проведем индукцией. Положим $p_m(x) = e^{\lambda x} p^{*m}(x)$, $m \geq 1$. Имеем:

$$p_{m+1}(x) = \left(\int_0^{x/2} + \int_{x/2}^x + \int_{-\infty}^0 + \int_x^{\infty} \right) p_1(x-y) p_m(y) dy = I_1 + \dots + I_4. \quad (2.7)$$

Далее, по (1.9), (1.10) и (1.7), при $x \geq x_0$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c_8 \frac{V^m(x)}{x} \int_{x/2}^x p_1(x-y) dy \leq c_9 \frac{V^{m+1}(x)}{x}, \\ I_3 &\leq c_8 \int_{-\infty}^0 p_m(y) \frac{V(x+|y|)}{x+|y|} dy \\ &\leq c_8 c_2 \frac{V(x)}{x} \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda|y|} \left(1 + \frac{|y|}{x}\right)^{\beta-1} p_m(y) dy \leq c_9 \frac{V(x)}{x}, \end{aligned}$$

$$I_4 \leq c_8 \int_x^\infty p_1(x-y) \frac{V^m(y)}{y} dy = c_8 \int_{-\infty}^0 p_1(y) \frac{V^m(x+|y|)}{x+|y|} dy \leq c_{10} \frac{V^m(x)}{x},$$

$$I_1 \leq c_8 \frac{V(x)}{x} \int_0^{x/2} p_m(y) dy. \quad (2.8)$$

Положим $V_m(x) = \int_0^x p_m(y) dy$, $m \geq 1$, и, снова по индукции, докажем, что при некоторой постоянной $C > 0$, зависящей от V и m ,

$$V_m(x) \leq CV^m(x). \quad (2.9)$$

Имеем:

$$V_{m+1}(x) = \left(\int_0^x + \int_x^\infty + \int_{-\infty}^0 \right) p_1(u) \int_0^x p_m(y-u) dy du = J_1 + J_2 + J_3, \quad (2.10)$$

причем

$$J_1 = \int_0^x p_1(u) du \left(\int_{-u}^0 + \int_0^{x-u} \right) p_m(y) dy \leq V(x)(1 + V_m(x)) \leq c_{10} V_{m+1}(x),$$

$$J_2 \leq \int_x^\infty p_1(u) e^{\lambda(x-u)} du = e^{\lambda x} \int_x^\infty p(u) du \leq e^{\lambda x} c_{11} \int_x^\infty e^{-\lambda u} \frac{V(u)}{u} du$$

$$= c_{11} \int_0^\infty e^{-\lambda u} \frac{V(u+x)}{u+x} du \leq c_{12} \frac{V(x)}{x},$$

$$J_3 = \int_{-\infty}^0 p_1(u) V_m(x+|u|) du \leq c_{13} \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda|u|} p(u) V^m(x+|u|) du$$

$$\leq c_{14} V^m(x) \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda|u|} p(u) \left(1 + \frac{|u|}{x} \right)^\beta du \leq c_{15} V^m(x).$$

Проведенные выкладки и (2.10) доказывают индукционный переход. Таким образом, соотношение (2.9) обосновано.

Из (2.9) и (2.8) следует $I_1 \leq c_{16} V^{m+1}(x)/x$. Имея в виду (2.7) и ранее полученные оценки для $I_1, \dots, I_4$, осуществляем индукционный переход и завершаем доказательство леммы 2.

Используя леммы 1 и 2, теорему 1 с учетом замечания 2 можно доказать так же, как теорему 2С из [1]. При этом условия [1, (3.6), (3.11)] заменяются на (2.1)–(2.4), а оценка [1, (3.7)] проверяется при помощи соотношений (1.7) и (1.8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розовский Л. В. О сверхбольших уклонениях суммы независимых случайных величин с общим абсолютно непрерывным распределением, удовлетворяющим условию Крамера. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 1, с. 78–103.
2. Боровков А. А., Розогин Б. А. О центральной предельной теореме в многомерном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 1, с. 61–69.
3. Розовский Л. В. Вероятности больших уклонений для некоторых классов распределений, удовлетворяющих условию Крамера. — Записки научн. сем. ПОМИ, 2003, т. 298, в. 1, с. 161–185.
4. Розовский Л. В. О нижней границе вероятностей больших уклонений для выборочного среднего при выполнении условия Крамера. — Записки научн. сем. ПОМИ, 2001, т. 278, в. 1, с. 208–224.
5. Боровков А. А., Могульский А. А. О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 2, с. 260–294.

Поступила в редакцию
23.XI.2005