Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Ширяев, М. А. Урусов, А. С. Черный, А. В. Селиванов, С. В. Дильман, И. Н. Медведев, А. С. Мищенко, А. П. Шашкин, Информация о четвертой “Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 2, 411–413

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:42:11

© 2005 г.

ИНФОРМАЦИЯ О НАУЧНОЙ ЖИЗНИ

ИНФОРМАЦИЯ О ЧЕТВЕРТОЙ
«КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

В ознаменование дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова при благотворительной поддержке ООО «Левиофан-Технолог», научного центра «Физматкнига» и организационной поддержке попечительского совета механико-математического факультета провела четвертую Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей. (Первая, вторая и третья подобные олимпиады проводились в 2001 г., в 2003 г. и в 2004 г.; см. [1], [2], [3].) Информация о всех олимпиадах содержится также на сайте кафедры теории вероятностей: <http://mech.math.msu.su/probab>.

Олимпиада была проведена 16 апреля 2005 г. отдельно для II и III–V курсов (продолжительность — 5 часов). Оргкомитет констатирует, что в олимпиаде приняли участие 4 студента I курса, 52 студента II курса и 54 студента III–V курсов механико-математического факультета, факультета ВМиК Московского государственного университета, а также Московского физико-технического института, Вологодского государственного педагогического университета, Киевского национального университета, Киевского политехнического института, Самарского государственного университета, Санкт-Петербургского государственного университета и Томского политехнического университета.

Задачи олимпиады

В скобках после номера задачи указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, а затем коэффициент решаемости, т.е. дробь, в числителе которой стоит число студентов (со всех курсов), решивших задачу, а в знаменателе — общее число ее решавших.

Задача 1. (II; $\frac{49}{56}$) Стрелки А и Б по очереди стреляют в мишень (первым стреляет А). Стрелок А попадает в мишень с вероятностью p_A , а стрелок Б — с вероятностью p_B (результаты разных выстрелов независимы). Побеждает тот, кто первым попадет в мишень. Найти вероятность победы А.

Задача 2. (II–V; $\frac{52}{110}$) Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Положим

$$Y_n = \frac{X_n + X_{n+1}}{1 + |X_n + X_{n+1}|}, \quad S_n = Y_1 + \dots + Y_n.$$

Доказать, что существует константа c такая, что $S_n/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} c$.

Задача 3. (III–V; $\frac{15.5}{54}$) Пусть X — равномерно распределенная на отрезке $[0, \pi]$ случайная величина. Найти $E(X | \sin X)$.

Задача 4. (II–V; $\frac{56}{110}$) Пусть X, Y, Z — независимые случайные точки на окружности, имеющие равномерное распределение (т.е. $P\{X \in A, Y \in B, Z \in C\} = \mu(A)\mu(B)\mu(C)$, где μ — нормированная мера Лебега). Найти вероятность того, что треугольник XYZ является остроугольным.

Задача 5. а) (II–V; $\frac{84.5}{110}$) Пусть X, Y, ξ — независимые случайные величины, причем $P(\xi = -1) = P(\xi = 1) = \frac{1}{2}$. Доказать, что $|X + \xi Y|$ и $|Y + \xi X|$ совпадают по распределению (т.е. их функции распределения совпадают).

б) (II-V; $\frac{13.5}{110}$) Пусть X, Y, Z, ξ, η — независимые случайные величины, причем $P(\xi = -1) = P(\xi = 1) = \frac{1}{2}$, $P(\eta = -1) = P(\eta = 1) = \frac{1}{2}$. Доказать, что $|X + \xi|Y + \eta Z|$ и $|X + \xi Y| + \eta Z|$ совпадают по распределению.

Задача 6. а) (II-V; $\frac{9}{110}$) Пусть X — ограниченная случайная величина на некотором вероятностном пространстве, λ — число из полуинтервала $(0, 1]$. Обозначим $u_\lambda(X) = \inf E(ZX)$, где $\inf$ берется по множеству $\mathcal{D}_\lambda$ случайных величин Z таких, что $0 \leq Z \leq \lambda^{-1}$ и $EZ = 1$. Доказать, что существует случайная величина $Z_* \in \mathcal{D}_\lambda$ такая, что $E(Z_*X) = u_\lambda(X)$.

б) (II-V; $\frac{10.5}{110}$) Пусть X, Y — независимые невырожденные ограниченные случайные величины, λ — число из интервала $(0, 1)$ (напомним, что X называется вырожденной, если существует константа c такая, что $X \stackrel{п.н.}{=} c$). Верно ли, что $u_\lambda(X + Y) > u_\lambda(X) + u_\lambda(Y)$?

в) (II-V; $\frac{5}{110}$) Пусть X, Y — независимые невырожденные случайные величины, принимающие конечное число значений, μ — вероятностная мера на борелевской σ -алгебре полуинтервала $(0, 1]$ такая, что $\mu((a, b)) > 0$ для любых $0 < a < b \leq 1$. Доказать, что

$$\int_{(0,1]} u_\lambda(X + Y) \mu(d\lambda) > \int_{(0,1]} u_\lambda(X) \mu(d\lambda) + \int_{(0,1]} u_\lambda(Y) \mu(d\lambda). \quad (*)$$

г) (II-V; $\frac{0}{110}$) Пусть X, Y — независимые невырожденные ограниченные случайные величины, μ — вероятностная мера на борелевской σ -алгебре полуинтервала $(0, 1]$ такая, что $\mu((a, b)) > 0$ для любых $0 < a < b \leq 1$. Доказать, что выполнено (*).

Задача 7. (III-V; $\frac{3}{54}$) Пусть B — броуновское движение (винеровский процесс), $t_1, t_2, \dots$ — последовательность положительных чисел, $t_n \rightarrow \infty$. Верно ли, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{t_n}}{\sqrt{2t_n \ln \ln t_n}} \stackrel{п.н.}{=} 1$?

Задача 8. (II-V; $\frac{4.5}{110}$) Пусть X, Y, Z — независимые одинаково распределенные случайные векторы в $\mathbf{R}^n$, принимающие конечное число значений. Обозначим через L (случайное) линейное подпространство $\mathbf{R}^n$, порожденное X и Y . Обозначим через $d(L)$ его размерность. Верно ли, что $P\{Z \in L | d(L) = 2\} \geq P\{Z \in L | d(L) = 1\}$?

Победители олимпиады

Разбор задач, вручение призов всем участникам, а также награждение победителей проводились в рамках дня механико-математического факультета 22 апреля 2005 г.

Победители среди студентов II курса

Первая премия

Раскин Михаил Александрович — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (7 решенных задач).

Вторая премия

Алиев Амир Фикрет оглы — студент I курса механико-математического факультета Московского государственного университета (5 решенных задач).

Третья премия

Будылин Роман Яковлевич — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (4.5 решенные задачи).

Победители среди студентов III-V курсов

Первая премия

Дремов Владимир Александрович — студент V курса механико-математического факультета Московского государственного университета, научный руководитель — Г. Б. Шабат (8 решенных задач).

Вторая премия

Устинов Филипп Александрович — студент V курса механико-математического факультета Московского государственного университета, научный руководитель — А. Н. Ширяев (7.5 решенных задач).

Третья премия

Горовой Сергей Олегович — студент V курса механико-математического факультета Киевского национального университета, научный руководитель — Н. И. Портенко (6.5 решенных задач).

Клепиков Константин Викторович — студент IV курса механико-математического факультета Московского государственного университета, научный руководитель — Ю. Н. Тюрин (6 решенных задач).

Шкляев Александр Викторович — студент III курса механико-математического факультета Московского государственного университета, научный руководитель — И. В. Денисов (6 решенных задач).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информация о студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 4, с. 823–824.
2. Информация о второй Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 428–430.
3. Информация о третьей Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 3, с. 621–623.

22 апреля 2005 г.

Оргкомитет четвертой
«Колмогоровской студенческой олимпиады
по теории вероятностей»:
член-корр. РАН профессор А. Н. Ширяев,
к.э.н. С. Е. Касаткин,
к.ф.-м.н. М. А. Урусов,
к.ф.-м.н. А. С. Черный,
преп. А. В. Селиванов,
аспиранты С. В. Дильман, И. Н. Медведев,
А. С. Мищенко, А. П. Шашкин,
студенты А. И. Мурашов, Н. В. Шаврова