Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Алсведе, В. М. Блиновский, О числе ступенчатых функций с ограничениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 4, 625–651

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:22:40

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 50

Выпуск 4, 2005 год

октябрь, ноябрь, декабрь

© 2005 г.

АЛСВЕДЕ Р.* БЛИНОВСКИЙ В. М.* **

О ЧИСЛЕ СТУПЕНЧАТЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹⁾

В статье получена асимптотическая формула для числа ступенчатых функций (границ диаграмм Юнга), к которым применен скейлинг, с ограничениями на длины и высоты ступенек, заданной площадью под графиком и которые находятся в окрестности заданной кривой. Это позволило найти асимптотику числа всех таких функций и предельную границу — кривую концентрации таких ступенчатых функций.

Ключевые слова и фразы: большие уклонения, случайные блуждания, диаграмма Юнга.

1. Введение. Рассмотрим четверть плоскости $x \geq 0$, $y \geq 0$ и ступенчатые, монотонно невозрастающие, непрерывные справа функции с узлами в точках этой четверти с целочисленными координатами и такие, что каждая из них определена на своем конечном интервале $[0, r]$. В этой работе мы будем определять число таких ступенчатых функций при дополнительном условии, что площадь под их графиками асимптотически равняется n и $n \rightarrow \infty$.

Главной проблемой, решение которой представлено в этой работе, является получение асимптотики числа ступенчатых функций после скейлинга, находящихся в окрестности заданной кривой, при условии, что длины и высоты ступенек принимают значения из заданных множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Случай отсутствия ограничений, т.е.

* Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Postfach 100131, D-33501 Bielefeld, Germany; e-mail: hollmann@math.uni-bielefeld.de

** Институт проблем передачи информации РАН, Большой Каретный, 19, 101447 Москва, Россия; e-mail: vblinovs@math.uni-bielefeld.de

¹⁾ Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 03-01-00592, 03-01-00098) и ИНТАС (грант № 00-738).

когда $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{1, 2, \dots\}$, был рассмотрен в [3] и независимо с использованием другого подхода в [5]. В [4] был рассмотрен случай, когда ограничения наложены только на высоту ступенек, т.е. $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots\}$, а $\mathcal{B}$ является произвольным множеством положительных целых чисел. Теперь мы дополняем эти исследования и рассматриваем случай, когда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются заданными множествами целых положительных чисел. Последний случай также отличается от предыдущих дополнительными сложностями при доказательствах. Например, нам неизвестен другой метод получения асимптотики общего числа ступенчатых функций с ограничениями на длину и высоту ступенек. В то же самое время при отсутствии ограничений эта асимптотика известна благодаря результату Харди и Рамануджана (см. [2]), поскольку число ступенчатых функций без ограничений является числом разбиений n , которое в свою очередь имеет логарифмическую асимптотику $\sim \pi \sqrt{2n/3}$. Случай, когда $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots\}$, также может быть рассмотрен явно, без привлечения методов из этой работы.

Исследуемая в этой работе задача может рассматриваться как задача больших уклонений. Разность $2C - L(f)$ (см. обозначения в следующем пункте) является грубой логарифмической асимптотикой (асимптотикой по нескольким параметрам) вероятности того, что ступенчатая функция (после скейлинга) принадлежит окрестности заданной кривой f . В то же время наш метод получения явного выражения для функционала L использует идеи из теории больших уклонений в функциональных пространствах. В частности, при доказательстве теоремы 1 мы применяем схему, грубое описание которой состоит в следующем: вместо заданной кривой мы рассматриваем сплайн с узлами на кривой и для последовательных узлов (c_i, c_{i+1}) находим асимптотику числа ступенчатых функций, которые имеют начальный узел в окрестности c_i и конечный узел в окрестности c_{i+1} . Далее показывается, что полное число ступенчатых функций в окрестности f оценивается произведением этих чисел, когда i пробегает все узлы. Каждое из этих чисел имеет грубую логарифмическую асимптотику из леммы 2, и эта асимптотика зависит только от разностей между соответствующими координатами c_i и c_{i+1} . При нахождении асимптотики полного числа ступенчатых функций в окрестности f логарифм произведения вкладов от пар последовательных узлов приводит к интегральной сумме, которая в пределе дает интеграл, который появляется в формуле для $L(f)$. Помимо этой процедуры нам приходится рассматривать некоторые технические и рутинные детали, касающиеся возможных сингулярных свойств функции f .

Используя теорему 2 и вариационный метод, мы находим максимум функционала L в области достаточно гладких функций и затем доказываем, что тот же максимум достигается на множестве всех функций из $\mathcal{C}$. Здесь мы также приводим ряд деталей, необходимых для

того, чтобы вариационная задача была рассмотрена корректно. Кроме того, мы находим предельную границу, на которой достигается максимум функционала L . Принимая во внимание лемму 2, мы убеждаемся, что эта граница притягивает к себе большинство ступенчатых функций. Круг вопросов, связанных с нахождением предельных границ случайных ступенчатых функций, которые могут рассматриваться как границы случайных диаграмм Юнга, рассмотрен в работе [1]. Там предложено большое число предельных границ при различных распределениях, характерных для диаграмм Юнга.

Наконец, в лемме 2 мы находим логарифмическую асимптотику полного числа ступенчатых функций с ограничениями.

Отметим одно отличие от обычной схемы исследования в теории больших уклонений: сначала мы изучаем ограничение функций на интервал $[1/r, r]$, и последним пределом в формулах, который мы рассматриваем, является предел при $r \rightarrow \infty$. Это делается потому, что рассматриваемый ансамбль ступенчатых функций не является экспоненциально компактным в метрике L^1 (см. определения в [5]).

Начнем с необходимых определений. Мы будем рассматривать только случай, когда множества $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \{1, 2, \dots\}$ бесконечны: $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}| = \infty$. Случай конечных множеств мы рассмотрим в другой публикации. Под ступенчатой функцией мы понимаем кусочно-постоянную, непрерывную справа, невозрастающую функцию с узлами в точках с целыми неотрицательными координатами (позже мы рассмотрим скейлинг координат этих узлов и ступенчатые функции, получаемые в результате такого скейлинга). Мы будем изучать случай, когда длины ступенек принимают значения из множества $\mathcal{A}$, а разность между двумя последовательными различными значениями ступенчатых функций (высота ступенек) может принимать значения из множества $\mathcal{B}$.

Сперва мы сформулируем необходимые леммы, а затем в трех теоремах сформулируем основные результаты. Везде в тексте мы будем предполагать, что числа вида $c\sqrt{n}$ являются целыми. Кроме того, мы будем всегда предполагать, не упоминая это каждый раз, что рассматриваемые ступенчатые функции являются функциями с ограничениями.

2. Формулировка результатов. Пусть $\ell_{\min}^{\mathcal{A}} = \min\{\ell \in \mathcal{A}\}$ ($\ell_{\min}^{\mathcal{B}} = \min\{\ell \in \mathcal{B}\}$) и $\#_{\mathcal{A}}^{k,\varepsilon}(a)$ ($\#_{\mathcal{B}}^{k,\varepsilon}(a)$) — число последовательностей $(x_i)_1^k$, $x_i \in \mathcal{A}$ ($x_i \in \mathcal{B}$), таких, что $|k^{-1} \sum_{i=1}^k x_i - a| < \varepsilon$.

Лемма 1. *Справедливо следующее соотношение:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \#_{\mathcal{A}}^{k,\varepsilon}(a)}{k} = J_{\mathcal{A}}(a) \triangleq \inf_{\lambda \leq 0} \left(\ln \sum_{\ell \in \mathcal{A}} e^{\lambda \ell} - \lambda a \right), \quad a \geq 0. \quad (1)$$

Далее мы формулируем утверждение, касающееся асимптотики числа $\#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b)$ ступенчатых функций с начальным узлом $(c\sqrt{n}, d\sqrt{n})$ и

конечным узлом в прямоугольнике $x = (c + a \pm \varepsilon_1)\sqrt{n}$, $y = (d - b \pm \varepsilon_2)\sqrt{n}$. Заметим, что $\#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b)$ зависит только от a, b , но не от c, d .

Лемма 2. *Справедливы следующие равенства:*

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b)}{\sqrt{n}} = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b)}{\sqrt{n}} = N\left(\frac{b}{a}\right),$$

где

$$N(\xi) = \max_{\kappa \in [0, \min\{1, \xi\}]} \kappa \left(J_{\mathcal{A}}\left(\frac{1}{\kappa}\right) + J_{\mathcal{B}}\left(\frac{\xi}{\kappa}\right) \right).$$

Теперь определим множество функций $\mathcal{C}$. Оно состоит из множества функций $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, для каждой из которых существует $\hat{f}$, $f = \hat{f}$ п.н., такая, что $\hat{f}$ является на $[0, \infty)$ неотрицательной невозрастающей непрерывной справа и

$$\int_0^\infty f(x) dx \leq 1.$$

Для заданных n, δ пусть $S_{n, \delta}$ — множество ступенчатых функций $\varphi_{n, \delta}$, к которым применен скейлинг: все линейные размеры графиков этих функций делятся на $\sqrt{n}$, т.е. мы будем рассматривать невозрастающие ступенчатые функции в положительной четверти плоскости $x, y \geq 0$ с узлами на решетке $(1/\sqrt{n})\mathbf{Z} \times (1/\sqrt{n})\mathbf{Z}$ и такие, что

$$\int_0^\infty \varphi_{n, \delta}(x) dx = 1 \pm \delta.$$

Пусть $S_{n, \delta, r}$ — ограничение множества ступенчатых функций $S_{n, \delta}$ на интервал $[1/r, r]$. Пусть также

$$B(f, \varepsilon, r) = \left\{ y \in L^1\left[\frac{1}{r}, r\right] : \int_{1/r}^r |y(x) - f(x)| dx < \varepsilon \right\}$$

есть L^1 -шар радиуса $\varepsilon > 0$ на интервале $[1/r, r]$.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть*

$$\#^{n, \varepsilon, \delta, r}(f) = \# \{ S_{n, \delta, r} \cup B(f, \varepsilon, r) \},$$

тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#^{n, \varepsilon, \delta, r}(f)}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#^{n, \varepsilon, \delta, r}(f)}{\sqrt{n}} = L(f), \end{aligned}$$

где

$$L(f) = \begin{cases} \int_0^\infty N(-\hat{f}'(x)) dx, & f \in \mathcal{C}, \\ -\infty, & f \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathcal{C}_1$ подмножество функций из $\mathcal{C}$, которые имеют непрерывную первую производную, и пусть $\mathcal{C}_2$ есть подмножество функций из $\mathcal{C}$ с непрерывной второй производной.

Теорема 2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\max_{f \in \mathcal{C}} L(f) = \max_{f \in \mathcal{C}_2} L(f) = 2C, \quad (2)$$

и если

$$\arg \max_{f \in \mathcal{C}_2} L(f) = f_{\max}, \quad (3)$$

то функция $f_{\max}$ определяется соотношением

$$\sum_{\ell \in \mathcal{A}} e^{-C\ell} \sum_{\ell \in \mathcal{B}} e^{-Cf_{\max}(x)\ell} = 1, \quad (4)$$

а константа C определяется из равенства

$$\int_0^\infty f_{\max}(x) dx = 1. \quad (5)$$

Заметим, что из (4) и (5) следует, что если $\psi(x)$ является решением уравнения

$$\sum_{\ell \in \mathcal{A}} e^{-x\ell} \sum_{\ell \in \mathcal{B}} e^{-\psi(x)\ell} = 1,$$

то $C = \sqrt{\int_0^\infty \psi(x) dx}$. Интегрируемость функции $\psi(x)$ мы докажем в конце статьи.

Пусть $\#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \delta} = \#\{S_{n, \delta}\}$ есть число ступенчатых функций из $S_{n, \delta}$.

Теорема 3. *Справедливы следующие равенства:*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \delta}}{\sqrt{n}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \delta}}{\sqrt{n}} = 2C.$$

3. Доказательства. Доказательство леммы 1 аналогично доказательству теоремы Крамера об оценке больших уклонений суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. Определим на множестве $\mathcal{A}$ считающую меру μ : $\mu(\ell) = 1$, если $\ell \in \mathcal{A}$, и $\mu(\ell) = 0$ в противном случае. Аналогично случаю распределений определим последовательность $(X_i)_1^k$ псевдослучайных величин («псевдо» означает, что мы рассматриваем ненормированные меры), принимающих значения из $\mathcal{A}$ и с мерой $\mu(X_i \in A) = \mu(A)$. Также рассмотрим меру-произведение

$$\mu^k \left(\bigotimes_{i=1}^k A_i \right) = \mu^k(X_i \in A_i, i = 1, \dots, k) = \prod_{i=1}^k \mu(A_i).$$

Поскольку окрестность $U(a, \varepsilon) = \{x: |x - a| < \varepsilon\}$ является открытым выпуклым множеством, используя стандартный аргумент, связанный с

субаддитивностью меры (см., например, [6]), получаем существование предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu^k(k^{-1} \sum_{i=1}^k X_i \in U(a, \varepsilon))}{k}. \quad (6)$$

Отметим, что $\mu^k(k^{-1} \sum_{i=1}^k X_i \in U(a, \varepsilon)) = \#_{\mathcal{A}}^{k, \varepsilon}$. Мы опускаем детали доказательства леммы 1, которые совершенно аналогичны доказательству теоремы Крамера [5].

Отметим также, что $J_{\mathcal{A}}$ является $\cap$ -выпуклой, дифференцируемой, монотонно возрастающей функцией и $J_{\mathcal{A}}(\ell_{\min}^{\mathcal{A}}) = 0$, $J_{\mathcal{A}}(a) = -\infty$ при $a < \ell_{\min}^{\mathcal{A}}$.

Доказательство леммы 2. Простым использованием неравенства Чебышева получается оценка

$$\gamma_{n, k, \varepsilon}(a) \triangleq \frac{\ln \# \{(x_i)_1^k: \sum_{i=1}^k x_i \in \sqrt{n} U(a, \varepsilon)\}}{\sqrt{n}} \leq (a + \varepsilon) H\left(\frac{k}{\sqrt{n}(a + \varepsilon)}\right), \quad (7)$$

где $H(z) = -z \ln z - (1 - z) \ln(1 - z)$. Поскольку $H(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$ и H монотонно возрастает на $[0, \frac{1}{2}]$, мы заключаем, что если $k < \sqrt{n} \delta_1$, то $\gamma_{n, k, \varepsilon}(a) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Аналогичные рассуждения справедливы и для множества $\mathcal{B}$. Пусть $a > 0$, $b \geq 0$ — некоторые числа. Если ступенчатая функция имеет начальный узел в точке $(c\sqrt{n}, d\sqrt{n})$, узел (x_p, y_p) в прямоугольнике $x = (c + a \pm \varepsilon_1) \sqrt{n}$, $y = (d - b \pm \varepsilon_2) \sqrt{n}$ и на этом интервале у нее k горизонтальных сегментов, то она может иметь $k - 1$, k или $k + 1$ вертикальных сегментов. Обозначим

$$A_{k_1, j}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b) = \sum_{k=k_1}^{\min\{(a+\varepsilon_1)\sqrt{n}, (b+\varepsilon_2)\sqrt{n}+j\}} \#_{\mathcal{A}}^{k, \varepsilon_1}\left(\frac{a\sqrt{n}}{k}\right) \#_{\mathcal{B}}^{k-j, \varepsilon_2}\left(\frac{b\sqrt{n}}{k-j}\right), \quad (8)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, тогда

$$\#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b) = \left(A_{1, 0}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b) + A_{1, 1}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b) + A_{1, -1}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b) \right) 2^{\sqrt{n} o_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(1)} \quad (9)$$

является числом таких ступенчатых функций. Здесь множитель $2^{\sqrt{n} o_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(1)}$ возникает, поскольку мы считаем число ступенчатых функций по их узлам в конечном прямоугольнике, но одна и та же ступенчатая функция в этом прямоугольнике может иметь несколько узлов.

Отметим, что мы пишем один и тот же символ $o(1)$ для обозначения различных величин, которые стремятся к нулю, когда параметры задачи стремятся к нулю или бесконечности в зависимости от их значения, и сперва берется предел по параметру, расположенному левее. Например, в $o_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(1)$ из правой части (9) сначала $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, а затем $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

Далее мы опускаем индекс j у $A_{k_1, j}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b)$, поскольку величина j не влияет на асимптотику рассматриваемых выражений. Используя

лемму 1 и обозначение (8), мы имеем

$$\ln A_{\delta_1 \sqrt{n}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b) = \max_{\substack{k = \delta_1 \sqrt{n}, \dots, \\ \max\{(a + \varepsilon_1) \sqrt{n}, (b + \varepsilon_2) \sqrt{n}\}}} \left[k \left(J_{\mathcal{A}} \left(\frac{a \sqrt{n}}{k} \right) + J_{\mathcal{B}} \left(\frac{b \sqrt{n}}{k} \right) \right) \right] + o_{k, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(1) \sqrt{n} \quad (10)$$

Обозначим

$$A(\kappa, \xi) = \kappa \left(J_{\mathcal{A}} \left(\frac{1}{\kappa} \right) + J_{\mathcal{B}} \left(\frac{\xi}{\kappa} \right) \right), \quad \kappa, \xi \geq 0.$$

Тогда выражение в квадратных скобках в правой части (10) может быть записано в виде $a \sqrt{n} A(k/(a \sqrt{n}), b/a)$. При заданном $\xi \in [0, \infty)$ функция $A(\kappa, \xi)$ является непрерывной и невозрастающей при

$$0 \leq \kappa \leq \kappa_1 \triangleq \min \left\{ \frac{1}{\ell_{\min}^{\mathcal{A}}}, \frac{\xi}{\ell_{\min}^{\mathcal{B}}} \right\}$$

и равняется $-\infty$ при $\kappa > \kappa_1$. Также при достаточно малом $\kappa > 0$ и произвольных $a, b > 0$ имеем $A(\kappa, b/a) > -\infty$. Поэтому, выбирая $\delta_1 > 0$ достаточно малым, мы достигнем ситуации, когда

$$\max_{\kappa \in [\delta_1/a, \min\{1, b/a\}]} A\left(\kappa, \frac{b}{a}\right) > -\infty$$

и интервал $[\delta_1/a, \min\{1, b/a\}]$ будет иметь непустую внутренность. Таким образом, мы имеем $(1/\sqrt{n}) \ln A_{\delta_1 \sqrt{n}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b) > -\infty$.

Принимая во внимание это неравенство и соотношения (9), (10), получаем ($a, b > 0$)

$$\begin{aligned} & a \max_{\kappa \in [\delta_1/a, \min\{1, b/a\}]} A\left(\kappa, \frac{b}{a}\right) + o_{\delta_1, \varepsilon_1}(1) + o_{\delta_1, \varepsilon_2}(1) \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b)}{\sqrt{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b)}{\sqrt{n}} \\ & \leq a \max_{\kappa \in [\delta_1/a, \min\{1, b/a\}]} A\left(\kappa, \frac{b}{a}\right) + o_{\delta_1, \varepsilon_1}(1) + o_{\delta_1, \varepsilon_2}(1). \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку оцениваемая величина в (11) не зависит от δ_1 , мы можем выбрать $\delta_1 \rightarrow 0$ и получить соотношения

$$\begin{aligned} & a \sup_{\kappa \in (0, \min\{1, b/a\}]} A\left(\kappa, \frac{b}{a}\right) + o_{\varepsilon_1}(1) + o_{\varepsilon_2}(1) \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b)}{\sqrt{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(a, b)}{\sqrt{n}} \\ & \leq a \sup_{\kappa \in (0, \min\{1, b/a\}]} A\left(\kappa, \frac{b}{a}\right) + o_{\varepsilon_1}(1) + o_{\varepsilon_2}(1). \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что функция $A(\kappa, b/a)$ непрерывна при $\kappa = 0$, $A(0, b/a) = 0$ и, таким образом, мы можем изменить область параметра κ в $\sup$ из (12) на $[0, \min\{1, b/a\}]$ и поменять $\sup$ на $\max$.

Теперь если $b = 0$, $a > 0$, то для достаточно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\frac{\ln \#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}}{\sqrt{n}} = o_{\varepsilon_1}(1) + o_{\varepsilon_2}(1). \quad (13)$$

Последнее справедливо, поскольку k не превосходит $O(\varepsilon_2 \sqrt{n} / \ell_{\min}^{\mathcal{B}})$, потому что в противном случае $\#_{\mathcal{B}}^{k, \varepsilon_2}(b) = 0$, и из (7) следует, что величина $(1/\sqrt{n}) \ln \#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \varepsilon_1, \varepsilon_2}$ обладает свойством (13). Также $\max_{\kappa \in [0, \min\{1, b/a\}]} A(\kappa, 0) = 0$ и, таким образом, формула из леммы 2 также справедлива в случае $b = 0$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего исследуем свойства функции

$$N(\xi) = \max_{\kappa \in [0, \min\{1, \xi\}]} \kappa \left(J_{\mathcal{A}} \left(\frac{1}{\kappa} \right) + J_{\mathcal{B}} \left(\frac{\xi}{\kappa} \right) \right). \quad (14)$$

Функция $N(\xi)$ является $\cap$ -выпуклой. Действительно, параметр λ_1 (λ_2), на котором достигается инфимум в выражении для $J_{\mathcal{A}}$ ($J_{\mathcal{B}}$) из (14), должен удовлетворять равенствам

$$\kappa \frac{\sum_{\ell \in \mathcal{A}} \ell e^{\lambda_1 \ell}}{\sum_{\ell \in \mathcal{A}} e^{\lambda_1 \ell}} = 1, \quad \kappa \frac{\sum_{\ell \in \mathcal{B}} \ell e^{\lambda_2 \ell}}{\sum_{\ell \in \mathcal{B}} e^{\lambda_2 \ell}} = \xi. \quad (15)$$

Здесь на значениях κ достигается максимум в определении $N(\xi)$. Далее, параметры λ_1, λ_2 должны также удовлетворять уравнению

$$\sum_{\ell \in \mathcal{A}} e^{\lambda_1 \ell} \sum_{\ell \in \mathcal{B}} e^{\lambda_2 \ell} = 1 \quad (16)$$

(здесь мы полагаем $0 \cdot \infty = 1$). Равенства (15) получены приравниванием производной по λ_1 (λ_2) выражения под знаком инфимума в $J_{\mathcal{A}}(1/\kappa)$ ($J_{\mathcal{B}}(\xi/\kappa)$) к нулю; уравнение (16) получено приравниванием производной функции $A(\kappa, \xi)$ по κ к нулю, при этом также использовались равенства (15). Легко видеть, что если $\xi > 0$, κ меняется в интервале $[0, \min\{1/\ell_{\min}^{\mathcal{A}}, \xi/\ell_{\min}^{\mathcal{B}}\}]$ и выполняются равенства (15), то $A'(\kappa, \xi)$ меняется от $-\infty$ до ∞ . Поскольку при выполнении (15) функция $A'_\kappa(\kappa, \xi)$ непрерывна, мы получаем, что существует значение κ такое, что выполняется (15) и $A'_\kappa(\kappa, \xi) = 0$.

Если $\xi = 0$, то $\kappa = 0$, $\lambda_1 = 0$. В этом случае мы положим $\lambda_2 = -\infty$. Тогда равенства (15), (16) также справедливы и в случае $\xi = 0$.

Поскольку при $\xi > 0$ функция $A(\kappa, \xi)$ конечна, только когда $\kappa \in [0, \min\{1/\ell_{\min}^{\mathcal{A}}, \xi/\ell_{\min}^{\mathcal{B}}\}]$ (в этом случае $A''_{\kappa\kappa}(\kappa, \xi) < 0$), и $A(\kappa, \xi) = -\infty$ в противном случае, мы получаем, что $A(\kappa, \xi)$ является $\cap$ -выпуклой. Если $\xi = 0$, то $A(0, 0) = 0$ и $A(\kappa, 0) = -\infty$ при $\kappa > 0$. Таким образом, $A(\kappa, 0)$ также $\cap$ -выпукла.

Мы имеем систему уравнений (15), (16), которая определяет параметры $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi)$, $\kappa(\xi)$ во всех случаях, когда $N(\xi) > -\infty$. Из предыдущего рассмотрения следует, что $N(\xi) > -\infty$, когда $\xi \geq 0$.

Функция $N(\xi)$ является $\cap$ -выпуклой. Действительно, из соотношений (15), (16) следует, что

$$N(\xi) = -\lambda_1(\xi) - \xi\lambda_2(\xi), \quad (17)$$

и

$$N''_{\xi\xi} = -\lambda'_2(\xi) \leq 0. \quad (18)$$

Нам также понадобится следующее неравенство:

$$N(z + \xi) - N(z) \leq N(\xi), \quad z, \xi \geq 0. \quad (19)$$

Действительно, $N'(z) = -\lambda_2(z)$ и $N'(z + \xi) - N'(z) = \lambda_2(z) - \lambda_2(z + \xi) \leq 0$. Чтобы доказать теорему 1, мы докажем следующие два утверждения, из которых теорема будет следовать.

Утверждение 1. *Справедлива оценка*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#^{n, \varepsilon, \delta, r}(f)}{\sqrt{n}} = K_1(f) \leq L(f). \quad (20)$$

Утверждение 2. *Справедлива оценка*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#^{n, \varepsilon, \delta, r}(f)}{\sqrt{n}} = K_2(f) \geq L(f). \quad (21)$$

Доказательство утверждения 1. Сперва заметим, что если $f \notin \mathcal{C}$, то $K_1(f) = -\infty$. Действительно, если $\int_0^\infty f dx > 1$, или $\nu(f < 0) > 0$ или $\nu(\hat{f}' > 0) > 0$ (ν обозначает меру Лебега), то для достаточно больших r и n и малых $\varepsilon, \delta > 0$ имеем $B(f, \varepsilon, r) \cap S_{n, \delta, r} = \emptyset$.

Фиксируем $r > 1$ и $f \in \mathcal{C}$, и пусть $\hat{f} = \hat{f}^1 + \hat{f}^2$ является разложением $\hat{f}$ на абсолютно непрерывную монотонную составляющую $\hat{f}^1$ и сингулярную монотонную составляющую $\hat{f}^2$. Отметим, что $\hat{f}^2$ является непрерывной справа, поскольку таковой является $\hat{f}$.

Далее мы рассмотрим три случая. *Первый случай:* $\hat{f}(x) > 0$, $x \in [0, \infty)$; *второй случай:* $\hat{f}(x) = 0$ при некотором $x \in (0, \infty)$; и *последний случай:* $\hat{f}(x) \equiv 0$.

Сделаем одно замечание. Ступенчатая функция $\varphi_{n, \delta}$ не имеет горизонтальных и (очевидно) вертикальных сегментов после того, когда она достигнет оси X (когда $\varphi_{n, \delta}(x) = 0$ в первый раз). Иначе мы бы имели бесконечное число ступенчатых функций, поскольку мы бы могли продолжить ступенчатую функцию после точки x_0 , где $\varphi_{n, \delta}(x_0) = 0$ первый раз, с помощью бесконечного числа различных горизонтальных сегментов из $\mathcal{A}$.

Далее мы разбиваем интервал $[1/r, r]$ на последовательные интервалы $[x_i, x_{i+1}]$, и для того чтобы наши рассмотрения были корректными, мы должны предположить, что каждая ступенчатая функция $\varphi_{n, \delta}$ имеет узел в каждом прямоугольнике $R_i = (x_i \pm o_\varepsilon(1), \hat{f}(x_i) \pm o_\varepsilon(1))$. Мы докажем, что каждая $\varphi_{n, \delta}$ обладает следующим свойством: $|\varphi_{n, \delta}(x_i) - \hat{f}(x_i)| <$

$o_\varepsilon(1)$. Таким образом, чтобы иметь функции $\varphi_{n,\delta}$, которые имеют узел в R_i , нам следует ограничиться только функциями $\varphi_{n,\delta}$, которые имеют узел с координатой $x \in (x_i \pm o_\varepsilon(1))$.

В то же самое время возможна ситуация, когда $\varphi_{n,\delta}$ имеет длинные горизонтальные сегменты, такие длинные, что эта функция не имеет узлов в интервале $x_i \pm o_\varepsilon(1)$. Чем меньше величина $\hat{f}(x_i)$, тем более длинные сегменты могут возникать. Скоро мы покажем, что если рассматривать функции f такие, что $\hat{f} > C_0 > 0$, то логарифмическая асимптотика числа $\# \{S_{n,\delta,r} \cap B(f, \varepsilon, r)\}$ и числа функций $\varphi_{n,\delta} \in B(f, \varepsilon, r)$ без длинных сегментов (длина которых превышает $o_\varepsilon(1)$) одна и та же. Если $\hat{f}(r) = 0$ и r_1 является минимальным с этим свойством, наши последующие рассуждения не приводят к результату, и мы будем рассматривать некоторое r_0 такое, что $\hat{f}(r_0) > C_0 > 0$ для некоторого C_0 , и использовать рассуждения для первого случая — когда $\hat{f}$ положительна, но не на всем интервале $[1/r, r]$, а только на интервале $[1/r, r_0]$ (естественно, $1/r < r_0$), а на интервале $[r_0, r]$ мы будем оценивать число ограничений функций $\varphi_{n,\delta}$ таких, что

$$\left| \int_{r_0}^r \varphi_{n,\delta}(x) dx - \int_{r_0}^r f(x) dx \right| < o_\varepsilon(1)$$

и $\int_{r_0}^r f(x) dx \rightarrow 0$ при $r_0 \rightarrow r_1$. Последние соотношения означают, что

$$\int_{r_0}^r \varphi_{n,\delta}(x) dx = o_{\varepsilon, r_0}(1). \quad (22)$$

Полное число ограничений на интервал $[r_0, r]$ ступенчатых функций $\varphi_{n,\delta}$, которые удовлетворяют (22), мало — меньше, чем полное число ступенчатых функций без ограничений с площадью $o_\varepsilon(1)$ под графиком. По формуле Харди–Рамануджана это число меньше, чем $o_{\varepsilon, r_0}(1)\sqrt{n}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\hat{f} > 0$, $x \geq 0$. Пусть $x_0 \in [1/r, r]$ таково, что $|\hat{f}'(x_0)| < C_1$ при некотором C_1 . Если $\varphi_{n,\delta} \in B(f, \varepsilon, r)$, то

$$|\varphi_{n,\delta}(x_0) - \hat{f}(x_0)| < o_\varepsilon(1). \quad (23)$$

Действительно, рассматривая графики функций $\varphi_{n,\delta}$ и $\hat{f}$, легко убедиться, что в противном случае, поскольку функции монотонные, площадь зазора между графиками этих функций в окрестности x_0 была бы положительной величиной, не стремящейся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, что противоречило бы условию $\varphi_{n,\delta} \in B(f, \varepsilon, r)$.

Теперь рассмотрим множество $B_0 = S_{n,\delta,r} \cap B(f, \varepsilon, r)$. Пусть $B_1 \subset B_0$ есть множество ступенчатых функций, которые содержат в точности один горизонтальный сегмент длины, превосходящей $o_\varepsilon(1)$ при $x \in [0, r]$. Начало этого сегмента имеет координату X в множестве $0, 1/\sqrt{n}, \dots, r$, и сегмент может иметь длину ρ такую, что $\rho \leq \rho_{\max}$, где

$$(\hat{f}(r) - o_\varepsilon(1))\rho_{\max} = 1 + \delta. \quad (24)$$

Это следует из того, что площадь под сегментом должна быть меньше $1 + \delta$ и длина сегмента может быть максимальной, когда его координата Y минимальна (именно поэтому мы следим за положительностью $\hat{f}$).

Пусть B_{11} является подмножеством B_1 , состоящим из ступенчатых функций с тем свойством, что B_{11} есть максимальное подмножество B_1 по выбору длинного горизонтального сегмента σ . Тогда

$$\#\{B_1\} \leq rn\rho_{\max}\#\{B_{11}\} \leq \frac{rn(1+\delta)}{\hat{f}(r) - o_\varepsilon(1)} \#\{B_{11}\}. \quad (25)$$

Здесь множитель перед $\#\{B_{11}\}$ есть оценка числа возможных выборов длинного сегмента σ .

Мы проделаем следующую процедуру с элементами из B_{11} . Возьмем сегмент σ и рассмотрим его разбиение на $\lfloor \rho\sqrt{n}/\ell \rfloor$ частей при некотором $\ell \in \mathcal{A}$. Если $\ell \nmid \rho\sqrt{n}$, тогда мы не будем учитывать остаток от деления и будем иметь $\lfloor \rho\sqrt{n}/\ell \rfloor$ частей длины ℓ . Затем между последовательными частями мы вставим вертикальный сегмент длины $\ell_{\min}^{\mathcal{B}}$. Всего будет $\lfloor \rho\sqrt{n}/\ell \rfloor$ таких вставок. Потом мы сдвинем (поднимем) всю конструкцию (график) вместе с левой от σ частью ступенчатой функции таким образом, чтобы было подходящее продолжение этого графика с правой от σ частью $\varphi_{n,\delta}$ и новая функция была монотонной ступенчатой функцией. Мы получим новую ступенчатую функцию φ_n^1 такую, что $\varphi_n^1(x) \geq \varphi_{n,\delta}(x)$,

$$\max_x (\varphi_n^1(x) - \varphi_{n,\delta}(x)) < \frac{\rho}{\ell} \ell_{\min}^{\mathcal{B}} \quad (26)$$

и

$$\int_0^\infty (\varphi_n^1(x) - \varphi_{n,\delta}(x)) dx < \frac{\rho^2}{2\ell} \ell_{\min}^{\mathcal{B}}. \quad (27)$$

Неравенство (26) очевидно, а (27) следует из того факта, что площадь под графиком $\varphi_{n,\delta}$ после поднятия увеличивается не более, чем на величину площади прямоугольного треугольника с катетами $\rho, (\rho/\ell) \ell_{\min}^{\mathcal{B}}$.

Из (26) и (27) следует, что, выбирая малое $\varepsilon > 0$ и большое $\ell \in \mathcal{A}$, мы можем сделать величину в правой части (26) произвольно малой, и если $\varphi_{n,\delta,r} \in B(f, \varepsilon, r)$, то $\varphi_{n,r}^1 \in B(f, 2\varepsilon, r)$. Также из (27) получаем $\int_0^\infty \varphi_{n,r}^1(x) dx < 1 + 2\delta$ и, таким образом, $\varphi_{n,r}^1 = \varphi_{n,2\delta,r}$. Отметим, что мы можем проделать такую процедуру для каждой функции $\varphi_{n,\delta} \in B_{11}$ и получить новое множество $\tilde{B}_{11}$. Эта процедура также устанавливает взаимно однозначное соответствие между B_{11} и $\tilde{B}_{11}$. Поскольку, как было показано, множество $\tilde{B}_{11}$ является подмножеством $B(f, 2\varepsilon, r)$, функции из $\tilde{B}_{11}$ имеют узлы в каждом интервале $x_0 \pm o_\varepsilon(1)$, $x_0 \in [0, r]$, и $\tilde{B}_{11}$ состоит из ступенчатых функций $\varphi_{n,2\delta}$. Обозначим это множество через $S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, r)$. Имеем

$$\#\{B_{11}\} \leq \#\{S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, r)\}, \quad (28)$$

и из (25) следует, что

$$\#\{B_1\} \leq \frac{r(1+\delta)}{\hat{f}(r) - o_\varepsilon(1)} n \#\{S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, r)\}. \quad (29)$$

Далее читатель может легко проделать аналогичные построения с подмножествами B_i , которые содержат i длинных сегментов. Мы опустим подробные рассуждения и приведем только конечное соотношение

$$\begin{aligned} \#\{S_{n,\delta} \cap B(f, \varepsilon, r)\} &\leq \#\left\{ \bigcup_{i=0}^{\lfloor r/o_\varepsilon(1) \rfloor} (B_i \cap S'_{n,\delta}(f, \varepsilon, r)) \right\} \\ &\leq C_2 n^{\lfloor r/o_\varepsilon(1) \rfloor + 1/2} \#\{S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, r)\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, если мы оценим величину $\#\{S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, r)\}$, то мы сумеем построить оценку для $\#\{S_{n,\delta} \cap B(f, \varepsilon, r)\}$, а коэффициент в правой части (30) не влияет на логарифмическую асимптотику этих оценок.

Сейчас мы построим верхнюю оценку числа $\#\{S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, r)\}$. Чтобы это сделать мы предварительно выберем интервалы, на которых подсчитаем число ограничений функций $\varphi_{n,2\delta}$ с заданными свойствами. Затем мы используем мультипликативное свойство: число ограничений ступенчатых функций на всем интервале $[1/r, r]$ равняется произведению чисел ограничений ступенчатых функций на подынтервалы, множество которых составляет разбиение $[1/r, r]$. Перейдем к точным формулировкам.

Определим меру $\beta((a, b]) = \hat{f}^2(a) - \hat{f}^2(b)$. Из регулярности меры Лебега следует, что существует открытое множество $B \subset [1/r, r]$, $\beta(B) = \beta([1/r, r])$, такое, что $\nu(B) < \delta_1$ для произвольного заданного $\delta_1 > 0$. Множество B является объединением не более чем счетного числа интервалов B_i , и для некоторого m имеем $\beta(\bigcup_{i>m} B_i) < \delta_1$. Мы добавим к каждому интервалу B_i , $i \leq m$, граничные точки и получим замкнутые интервалы $\bar{B}_i$, и объединение $\bigcup_{i=1}^m \bar{B}_i$ является объединением конечного числа m_1 непересекающихся замкнутых интервалов $[a_i, b_i]$, $i \leq m_1$: $\bigcup_{i=1}^{m_1} [a_i, b_i] = \bigcup_{i=1}^m \bar{B}_i$. Далее, $\nu(\bigcup_{i=1}^{m_1} [a_i, b_i]) < \delta_1$ и множество $[1/r, r] \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} (a_i, b_i) = \bigcup_{i=1}^s [c_i, d_i]$ является объединением конечного числа s непересекающихся замкнутых интервалов и $\{c_i, d_i\} \subset \{1/r, r, a_i, b_i\}$. Для каждого $i = 1, \dots, s$ рассмотрим разложение $[c_i, d_i] = \bigcup_{j=1}^{s_i} [c_i^j, d_i^j]$ интервала $[c_i, d_i]$ на s_i последовательных подынтервалов «почти» равной длины $d_i^j - c_i^j \approx (d_i - c_i)/s_i$. «Почти» означает, что мы предполагаем, что $|\hat{f}'(x)| < C_1$, $x \in \{c_i^j, d_i^j\}$, для некоторой константы C_1 , иначе мы слегка «пошевелим» точки c_i^j, d_i^j , с тем чтобы это условие удовлетворялось, а также были справедливы все предыдущие построения.

Множество $S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, r)$ таково, что каждая ступенчатая функция $\varphi_{n,2\delta} \in S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, r)$ имеет узел в каждом прямоугольнике $R_i^j = \{x = c_i^j \pm o_\varepsilon(1), y = \hat{f}(c_i^j) \pm o_\varepsilon(1)\}$, $\tilde{R}_i^j = \{x = d_i^j \pm o_\varepsilon(1), y = \hat{f}(d_i^j) \pm o_\varepsilon(1)\}$.

Полное число $\Phi_{i,j,n}$ ограничений ступенчатых функций из $S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, r)$ с начальным узлом в прямоугольнике $\Delta = (x = c_i^j \pm o_\varepsilon(1), \hat{f}(c_i^j) \pm o_\varepsilon(1))$ оценивается следующим образом:

$$\frac{\Phi_{i,j,n}}{\sqrt{n}} \leq \Delta x_i^j N\left(-\frac{\Delta \hat{f}_i^j}{\Delta x_i^j}\right) + o_{n,\varepsilon}(1),$$

где $\Delta x_i^j = d_i^j - c_i^j$, $\Delta \hat{f}_i^j = \hat{f}(d_i^j) - \hat{f}(c_i^j)$. Это следует из леммы 2 и того факта, что число узлов в Δ есть $O(n)$.

Далее мы используем мультипликативное свойство для $\Phi_{i,j,n}$, по которому число $\Phi_n = \#\{S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, r)\}$ оценивается сверху произведением чисел ограничений этих функций на подынтервалы, которые составляют разбиение всего интервала (и пересекаются только в граничных точках). Поскольку $\{[c_i^j, d_i^j], [a_\ell, b_\ell]\}$ является разбиением интервала $[1/r, r]$, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\ln \Phi_n}{\sqrt{n}} &\leq \frac{\ln(\prod_{i,j} \Phi_{i,j,n} \cdot \prod_\ell \Phi_{\ell,n})}{\sqrt{n}} \leq \sum_{i,j} \frac{\ln \Phi_{i,j,n}}{\sqrt{n}} + \sum_\ell \frac{\Phi_{\ell,n}}{\sqrt{n}} + s' o_{n,\varepsilon}(1) \\ &\leq \sum_{i,j} \Delta x_i^j N\left(-\frac{\Delta \hat{f}_i^j}{\Delta x_i^j}\right) + \sum_\ell \Delta x_\ell N\left(-\frac{\Delta \hat{f}_\ell}{\Delta x_\ell}\right) + s' o_{n,\varepsilon}(1), \quad (31) \end{aligned}$$

где $\Phi_{\ell,n}$ является числом ограничений ступенчатых функций из $S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, r)$ на интервал $[a_\ell, b_\ell]$, $s' = \sum_{i=1}^s s_i + m_1$, $\Delta x_\ell = b_\ell - a_\ell$, $\hat{f}_\ell = \hat{f}(b_\ell) - \hat{f}(a_\ell)$. Здесь мы снова использовали лемму 2.

Тогда число $\#^{n,\delta,\varepsilon,r}(f)$ оценивается произведением Φ_n и чисел $\alpha_{n,r}$ и $\beta_{n,r}$, которые являются числами ограничений ступенчатых функций на интервалах $[0, 1/r]$ и $[r, \infty)$ соответственно. Каждое из этих чисел может быть оценено числом ступенчатых функций $\tilde{\varphi}_n$ без ограничений таких, что $\max_{x \in [0, \infty)} \tilde{\varphi}_n(x) \leq (1 + 2\delta)/r$. Действительно, поменяв оси X и Y , мы из функции $\varphi_n(x)$, $x \in [0, 1/r]$, на левом интервале $[0, 1/r]$ очевидным образом получим ступенчатую функцию $\tilde{\varphi}_n$. Также при $x \geq r$, поскольку

$$\int_0^\infty \varphi_{n,2\delta}(x) dx \leq 1 + 2\delta,$$

имеем $\varphi_{n,2\delta}(x) \leq (1 + 2\delta)/r$.

Позже мы докажем, что

$$\frac{\ln \alpha_{n,r}}{\sqrt{n}}, \quad \frac{\ln \beta_{n,r}}{\sqrt{n}} = o_{n,\varepsilon,r}(1). \quad (32)$$

Покажем, что вклад $\sum_\ell$ в оценку (31) может быть сделан произвольно малым. Действительно, функция $N(\xi)$ является $\cap$ -выпуклой и из неравенства Иенсена следует, что

$$\sum_\ell \Delta x_\ell N\left(-\frac{\Delta \hat{f}_\ell}{\Delta x_\ell}\right) \leq N\left(-\frac{\sum_\ell \Delta \hat{f}_\ell}{\sum_\ell \Delta x_\ell}\right) \sum_\ell \Delta x_\ell.$$

Далее,

$$\begin{aligned} N(z) &= \max_{\kappa \in [0, \min\{1, z\}]} \kappa \left(J_{\mathcal{A}} \left(\frac{1}{\kappa} \right) + J_{\mathcal{B}} \left(\frac{z}{\kappa} \right) \right) \\ &\leq \max_{\kappa \in [0, \min\{1, z\}]} \left(\inf_{\lambda_1 \leq 0} \left(\kappa \ln \sum_{\ell \in \mathcal{A}} e^{\lambda_1 \ell} - \lambda_1 \right) + \inf_{\lambda_2 \leq 0} \left(\kappa \ln \sum_{\ell \in \mathcal{B}} e^{\lambda_2 \ell} - z \lambda_2 \right) \right) \\ &= (1+z) H \left(\frac{z}{1+z} \right). \end{aligned}$$

Если $\beta((1/r, r]) = \hat{f}^2(1/r) - \hat{f}^2(r) > 0$, то для некоторых $C_4, C_5 > 0$ справедливы неравенства $\infty > C_5 > \hat{f}(1/r) - \hat{f}(r) > |\sum_{\ell} \Delta \hat{f}_{\ell}| > C_4$. Это следует из выбора интервалов $[a_{\ell}, b_{\ell}]$ концентрации меры β . Также мы имеем $\sum_{\ell} \Delta x_{\ell} < \nu(B) < \delta_1$ и, таким образом, определив $z = -\sum_{\ell} \Delta \hat{f}_{\ell} / \sum_{\ell} \Delta x_{\ell}$, получаем

$$\frac{N(z)}{z} \left(-\sum_{\ell} \Delta \hat{f}_{\ell} \right) < C_5 \frac{N(z)}{z} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta_1 \rightarrow 0.$$

Если $\hat{f}^2(1/r) - \hat{f}^2(r) = 0$, то мы не рассматриваем интервалы $[a_{\ell}, b_{\ell}]$ вообще.

Таким образом, сумма по ℓ в правой части (31) при $\delta_1 \rightarrow 0$ может быть сделана произвольно малой.

Рассмотрим сумму $\sum_{i,j}$ в (31). Из (19) получаем $(\Delta \hat{f}_i^j = \Delta \hat{f}_i^{1j} + \Delta \hat{f}_i^{2j})$

$$N \left(-\frac{\Delta \hat{f}_i^j}{\Delta x_i^j} \right) \leq N \left(-\frac{\Delta \hat{f}_i^{1j}}{\Delta x_i^j} \right) + N \left(-\frac{\Delta \hat{f}_i^{2j}}{\Delta x_i^j} \right).$$

Используя неравенство Иенсена, получаем

$$\sum_{i,j} \Delta x_i^j N \left(-\frac{\Delta \hat{f}_i^{2j}}{\Delta x_i^j} \right) \leq \gamma \triangleq \left(\sum_{i,j} \Delta x_i^j \right) N \left(-\frac{\sum_{i,j} \Delta \hat{f}_i^{2j}}{\sum_{i,j} \Delta x_i^j} \right). \quad (33)$$

Поскольку $\sum_{i,j} \Delta \hat{f}_i^{2j} = \beta(\cup_{i>m} B_i) < \delta_1$ и $\sum_{i,j} \Delta x_i^j > r - 1/r - \delta_1$, имеем

$$\gamma \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta_1 \rightarrow 0. \quad (34)$$

Теперь оценим величину $\alpha_{n,r}$ (величина $\beta_{n,r}$ оценивается аналогично). Как уже было отмечено, $\alpha_{n,r}$ оценивается сверху числом разбиений числа $n(1 \pm 2\delta)$, когда каждый элемент разбиения не превосходит $\sqrt{n}/r$. Мы должны оценить сверху число решений неравенства $\sum_{i=1}^{\sqrt{n}/r} ix_i \leq n(1+2\delta)$, $x_i = 0, 1, 2, \dots$. Это может быть сделано с помощью неравенства Чебышева. Мы опускаем детали рассуждения. Таким образом, получаем

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \# \{ (x_i)_1^{\sqrt{n}/r} : \sum_{i=1}^{\sqrt{n}/r} ix_i \leq n(1+2\delta) \}}{\sqrt{n}} = 0. \quad (35)$$

Собирая вместе соотношения (31)–(35), мы устанавливаем справедливость следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{\ln \#^{n,\delta,\varepsilon,r}(f)}{\sqrt{n}} &\leq \frac{\ln \Phi_n}{\sqrt{n}} + s' o_{n,\varepsilon,\delta}(1) + o_{\delta_1}(1) + o_r(1) \\ &\leq \sum_{i,j} \Delta x_i^j N\left(-\frac{\Delta \hat{f}_i^{1j}}{\Delta x_i^j}\right) + s' o_{n,\varepsilon,\delta}(1) + o_{\delta_1}(1) + o_r(1), \end{aligned}$$

или

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#^{n,\delta,\varepsilon,r}(f)}{\sqrt{n}} \leq \sum_{i,j} \Delta x_i^j N\left(-\frac{\Delta \hat{f}_i^{1j}}{\Delta x_i^j}\right) + s' o_{\varepsilon,\delta}(1) + o_{\delta_1}(1) + o_r(1). \quad (36)$$

Мы можем переписать $\sum_{i,j}$ в правой части (36) следующим образом:

$$\sum_{i,j} \Delta x_i^j N\left(-\frac{1}{\Delta x_i^j} \int_{c_i^j}^{d_i^j} \hat{f}^{1'}(x) dx\right) = \int_{\bigcup_i [c_i, d_i]} N(-f_c(x)) dx,$$

где f_c — кусочно-постоянная функция такая, что для заданного разбиения $\{[c_i^j, d_i^j]\}$ множества $\bigcup_i [c_i, d_i]$

$$f_c(x) = \frac{1}{\Delta x_i^j} \int_{c_i^j}^{d_i^j} \hat{f}^{1'}(x) dx, \quad x \in [x_i^j, d_i^j].$$

Взяв $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, из (36) получаем

$$\begin{aligned} F &\triangleq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#^{n,\delta,\varepsilon,r}(f)}{\sqrt{n}} \leq \sum_{i,j} \Delta x_i^j N\left(-\frac{\Delta \hat{f}_i^{1j}}{\Delta x_i^j}\right) + o_{\delta_1,r}(1) \\ &= \int_{\bigcup_i [c_i, d_i]} N(-f_c(x)) dx + o_{\delta_1,r}(1). \end{aligned}$$

Далее, мы выбираем $\omega_i = d_i^j - c_i^j$ так, что $\omega = \max_i \omega_i \rightarrow 0$, и имеем $f_c(x) \rightarrow \hat{f}^{1'}(x)$ п.н. на $\bigcup_i [c_i, d_i]$ и

$$\begin{aligned} F &\leq \limsup_{\omega \rightarrow 0} \int_{[c_i, d_i]} N(-f_c(x)) dx + o_{\delta_1,r}(1) \\ &\leq \int_{\bigcup_i [c_i, d_i]} \limsup_{\omega \rightarrow 0} N(-f_c(x)) dx = \int_{\bigcup_i [c_i, d_i]} N(\limsup_{\omega \rightarrow 0} (-f_c(x))) dx \\ &= \int_{\bigcup_i [c_i, d_i]} N(-\hat{f}^{1'}(x)) dx = \int_{\bigcup_i [c_i, d_i]} N(-\hat{f}'(x)) dx \\ &\leq \int_{1/r}^r N(-\hat{f}'(x)) dx. \end{aligned} \quad (37)$$

Для простоты мы опустили $o_{\delta_1}(1) + o_r(1)$ в последних соотношениях. Здесь первое неравенство следует из непрерывности $N(\xi)$. Во втором

неравенстве мы использовали лемму Фату, которую можно здесь применить, поскольку, как следует из теоремы 2 (которую мы докажем позднее), функция $N(-\hat{f}'(x))$ интегрируема на $[0, \infty)$. Второе неравенство следует из того факта, что если $y \in L^1([a, b], dx)$, то

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{|D_q|} \int_{D_q} y(x) dx = y(x_0) \quad \text{п.н.},$$

где $(D_q)_1^\infty$ — произвольная последовательность замкнутых интервалов с непустой внутренностью таких, что $\bigcap_q D_q = \{x_0\}$. Третье неравенство в (37) следует из того, что $\hat{f}^{1'} = \hat{f}'$ п.н.

Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, $\delta_1 \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ в обеих частях (37), получаем неравенство $F \leq \int_0^\infty N(-\hat{f}'(x)) dx$. Таким образом оценка (20) доказана для строго положительных функций.

Теперь рассмотрим случай, когда функция $f \in \mathcal{C}$ такова, что $\hat{f}(x_0) = 0$ для некоторого $0 < x_0 < \infty$ и x_0 является минимальным с этим свойством. Мы не будем воспроизводить все детали доказательства в этом случае, так как оно во многом совпадает с доказательством в первом случае, но обратим внимание на различия в этих доказательствах. Рассмотрим снова интервал $[1/r, r]$, $r > x_0$, и другой интервал $[1/r, r_0]$, $r_0 < x_0$. Для $[1/r, r_0]$ мы проделаем рассуждения и построим оценки, аналогичные рассуждениям и оценкам в первом случае на интервале $[1/r, r]$. Таким образом мы оценим число ограничений $S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, \{r, r_0\})$, которое имеет то же значение, что и $S'_{n,2\delta}(f, 2\varepsilon, r)$, но ограничения берутся на интервале $[1/r, r_0]$. Далее, числа ограничений ступенчатых функций на интервалах $[0, 1/r]$, $[r, \infty)$ оцениваются таким же образом, как и в первом случае, и их логарифмическая асимптотика есть $o_{n,r}(1)\sqrt{n}$. Логарифмическая асимптотика числа ограничений ступенчатых функций на интервал $[r_0, r]$ есть $o_{\varepsilon, r_0}(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $r_0 \rightarrow r_1$. Это справедливо благодаря аргументу, аналогичному тому, который использовался при оценке чисел $\alpha_{n,r}$ и $\beta_{n,r}$: число таких ограничений не превосходит числа ступенчатых функций $\varphi_{n,\delta}$ таких, что $\max_x \varphi_{n,\delta} \leq o_\varepsilon(1) + \hat{f}(r_0) \rightarrow 0$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, $r_0 \rightarrow x_0$. В действительности мы можем построить верхнюю оценку в этом случае только на интервале $[1/r, r_0]$ вместо $[1/r, r]$ и затем положить $r_0 \rightarrow r$, но мы выбираем последний интервал, чтобы сделать формулировку теоремы 1 универсальной в обоих случаях. Как и раньше, мы получаем оценку

$$F \leq \int_{1/r}^{r_0} N(-\hat{f}'(x)) dx + o_{r_0,r}(1).$$

Взяв $r_0 \rightarrow x_0$, $r \rightarrow \infty$, мы получаем

$$F \leq \int_0^{x_0} N(-\hat{f}'(x)) dx = \int_0^\infty N(-\hat{f}'(x)) dx,$$

и утверждение 1 доказано и во втором случае.

Последний случай, когда $\hat{f} \equiv 0$, совсем простой. На интервалах $[0, 1/r]$, $[r, \infty)$ мы, как и раньше, получаем, что асимптотика числа ограничений функций $\varphi_{n,\delta}$ есть $o_{n,r}(1)$ и $\int_{1/r}^r \varphi_{n,\delta}(x) dx < \varepsilon$. Таким образом, число ограничений функций из $S_{n,\delta}$ на $[1/r, r]$ не превосходит полного числа ступенчатых функций с площадью под графиком $\leq \varepsilon n$, которое в силу результата Харди и Рамануджана имеет логарифмическую асимптотику $\sqrt{n} o_\varepsilon(1)$. Как и раньше, произведение чисел ограничений функций на различных участках интервала $[0, \infty)$ дает верхнюю границу на число $\#^{n,\delta,\varepsilon,r}(f)$ и $F \leq 0 = \int_0^\infty N(-\hat{f}'(x)) dx$. Утверждение 1 полностью доказано.

Доказательство утверждения 2. Доказательство нижней границы (21) проще, чем то, которое приводит к верхней границе (20), поскольку нам не надо заботиться о длинных горизонтальных сегментах. Выберем разбиение интервала $[1/r, r]$ на s последовательных интервалов $[a_i, b_i]$ одинаковой длины $\Delta = b_i - a_i = (r - 1/r)/s$. Отметим, что при доказательстве (20) мы также рассматривали вклад в $\#^{n,\delta,\varepsilon,r}(f)$ ступенчатых функций, ограничения которых не принадлежат $B(f, \varepsilon, r)$. При доказательстве (21) следует учитывать только те ступенчатые функции, ограничения которых принадлежат $B(f, \varepsilon, r)$. Как и раньше, мы рассмотрим подмножество ступенчатых функций $\varphi_{n,\delta}$, имеющих узел в каждом прямоугольнике $(x = a_i \pm o_\varepsilon(1), y = \hat{f}(a_i) \pm o_\varepsilon(1))$, $i = 1, \dots, s$, и в прямоугольнике $(x = b_s \pm o_\varepsilon(1), y = \hat{f}(b_s) \pm o_\varepsilon(1))$. Выберем произвольно $\varphi_{n,\delta}$, $x \in [0, 1/r]$ или $x \in [r, \infty)$, с условием $\varphi_{n,\delta} \in S_{n,\delta}$. Поскольку мы имеем ограничения на размеры ступенек, иногда может случиться, что невозможно продолжить ступенчатую функцию с $[1/r, r]$ на интервал $[0, 1/r]$ или $[r, \infty)$ без нарушения этих ограничений. В таком случае мы сдвинем ступенчатую функцию по вертикали не более чем на $\ell_{\min}^{\mathcal{B}}/\sqrt{n}$ последовательных узлов целочисленной решетки со скейлингом и не более чем на $\ell_{\min}^{\mathcal{A}}/\sqrt{n}$ последовательных узлов по горизонтали, чтобы получить ступенчатую функцию с начальным узлом в точке $(0, p)$ и конечным узлом в точке $(q, 0)$ при некоторых p, q . Поскольку число таких сдвигов конечно, такая процедура не меняет логарифмической асимптотики числа ступенчатых функций.

Теперь мы оценим $L^1([1/r, r], dx)$ -расстояние между функциями из $S_{n,\delta,r}$ и $\hat{f}$. Легко видеть, что если пара монотонных невозрастающих функций $y, \varphi_{n,\delta}$ такова, что

$$|y(x) - \varphi_{n,\delta}(x)| < \varepsilon_1, \quad (38)$$

когда $x = a, b$, $a < b$, то

$$\int_a^b |y_1(x) - y_2(x)| dx \leq (b - a)(y_1(a) - y_1(b) + 2\varepsilon_1). \quad (39)$$

Так получается потому, что область плоскости, ограниченная кривыми $y, \varphi_{n,\delta}$ и прямыми $x = a, x = b$, покрывается прямоугольником

со сторонами $y = y_1(a) + \varepsilon_1$, $y = y_1(b) - \varepsilon_1$, $x = a$, $x = b$. Пусть неравенство (38) справедливо при $y(x) = \hat{f}(x)$ и всех $x = a_i$ и $x = b_i$. Тогда из (39) для каждого заданного r и достаточно малых $\Delta = \max_i(b_i - a_i)$ и ε_1 получаем

$$\int_{1/r}^r |\varphi_{n,\delta}(x) - f(x)| dx < \varepsilon. \quad (40)$$

Далее, как и при доказательстве верхней оценки (20), логарифм числа ограничений функций из $S_{n,\delta}$ на интервал $[a_i, b_i]$ оценивается снизу величиной

$$\sqrt{n} \left[(b_i - a_i) N \left(\frac{\hat{f}(a_i) - \hat{f}(b_i)}{b_i - a_i} \right) + o_{n,\varepsilon,\delta}(1) \right]. \quad (41)$$

В действительности ограничение ступенчатой функции может иметь узел в любой точке решетки из прямоугольника $(x = a_i \pm o_\varepsilon(1), y = \hat{f}(a_i) \pm o_\varepsilon(1))$ и конечный узел в прямоугольнике $(x = b_i \pm o_\varepsilon(1), y = \hat{f}(b_i) \pm o_\varepsilon(1))$, но число узлов в этих прямоугольниках есть $O(n)$, что не влияет на логарифмическую асимптотику в (41).

Как и раньше, вклад от всех интервалов $[a_i, b_i]$ в нижнюю границу числа $\#\{S_{n,\delta,r} \cap B(f, \varepsilon, r)\}$ ограничен суммой величин (41):

$$\sqrt{n} \left[\sum_{i=1}^s \Delta x_i N \left(- \frac{\hat{f}(b_i) - \hat{f}(a_i)}{b_i - a_i} \right) + so_{n,\varepsilon,\delta}(1) \right],$$

и, принимая во внимание выбор $\varphi_{n,\delta}$ на интервалах $[0, 1/r)$, $[r, \infty)$, мы получаем логарифмическую асимптотику нижней границы числа $\#^{n,\varepsilon,\delta,r}$:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#^{n,\varepsilon,\delta,r}}{\sqrt{n}} &\geq \sum_{i=1}^s \Delta x_i N \left(- \frac{\Delta \hat{f}_i^1}{\Delta x_i} - \frac{\Delta \hat{f}_i^2}{\Delta x_i} \right) + so_{\varepsilon,\delta}(1) \\ &\geq \sum_{i=1}^s \Delta x_i N \left(- \frac{\Delta \hat{f}_i^1}{\Delta x_i} \right) + so_{\varepsilon,\delta}(1) \geq \sum_{i=1}^s \Delta x_i N \left(\frac{\int_{b_i}^{a_i} \hat{f}^{1'}(x) dx}{\Delta x_i} \right) + so_{\varepsilon,\delta}(1) \\ &\geq \sum_{i=1}^s \int_{a_i}^{b_i} N(-\hat{f}^{1'}(x)) dx + so_{\varepsilon,\delta}(1) = \int_{1/r}^r N(-\hat{f}^{1'}(x)) dx + so_{\varepsilon,\delta}(1). \end{aligned}$$

Здесь второе неравенство следует из монотонности $N(\xi)$.

Взяв пределы от обеих частей в последней цепочке неравенств, мы получаем неравенство

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#^{n,\varepsilon,\delta,r}}{\sqrt{n}} \geq L(f).$$

Это доказывает (21) и утверждение 2.

Теперь мы переходим к доказательству теоремы 2. Сначала докажем, что

$$\sup_{f \in \mathcal{C}} L(f) = \sup_{f \in \mathcal{C}_1} L(f). \quad (42)$$

В действительности мы докажем больше, а именно, что супремум в правой части (42) достигается на функциях $y \in \mathcal{C}_1$ таких, что

$$\int_0^\infty y(x) dx < 1. \quad (43)$$

Для этого достаточно показать, что для $\varepsilon > 0$ и каждой функции $f \in \mathcal{C}$ такой, что $\int_0^\infty f(x) dx \leq 1$, существует функция $y \in \mathcal{C}_1$ такая, что

$$\int_0^\infty |N(-y'(x)) - N(-\hat{f}'(x))| dx < \varepsilon_1 \quad (44)$$

и $\int_0^\infty y(x) dx < 1$. Выберем $x_0 > 0$ такое, что

$$\int_0^{1/x_0} N(-\hat{f}'(x)) dx, \quad \int_{x_0}^\infty N(-\hat{f}'(x)) dx < \varepsilon_1. \quad (45)$$

Это возможно, поскольку $\int_0^\infty N(-\hat{f}'(x)) dx < \infty$. Обозначим $a = \operatorname{ess\,sup}_{x \notin A_0} \hat{f}'(x)$, где $A_0 = \{x: \hat{f}'(x) = 0\}$, и для $\beta > \alpha > \gamma > 0$ определим усеченные функции

$$\hat{f}'(x, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} \hat{f}'(x), & \alpha - a \leq -\hat{f}'(x) \leq \beta, \quad x \in \left[\frac{1}{x_0}, x_0\right], \\ a - \gamma, & -\hat{f}'(x) < \alpha - a, \quad x \in \left[\frac{1}{x_0}, x_0\right], \\ -\beta, & -\hat{f}'(x) > \beta, \quad x \in \left[\frac{1}{x_0}, x_0\right], \\ 0, & x \notin \left[\frac{1}{x_0}, x_0\right], \end{cases}$$

и $\hat{f}'(x, \alpha, \beta, \gamma) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Далее мы будем полагать $\beta \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 0$. Выберем сначала $\beta > \alpha > \gamma > 0$ так, что при достаточно малом $\delta > 0$

$$\int_{1/x_0}^{x_0} |N(-\hat{f}'(x, \alpha, \beta, \gamma)) - N(-\hat{f}'(x))| dx < \varepsilon_1 \quad (46)$$

и

$$\int_{1/x_0}^{x_0} |\hat{f}'(x, \alpha, \beta, \gamma) - \hat{f}'(x)| dx < \delta_1, \quad (47)$$

$$\int_0^\infty \hat{f}'(x, \alpha, \beta, \gamma) dx < \int_0^\infty f(x) dx - \delta. \quad (48)$$

Возможность такого выбора следует из стандартных рассуждений для усеченных функций. Необходимость рассмотрения ограничения функций $\hat{f}'(x, \alpha, \beta, \gamma)$ снизу, когда $-\hat{f}'(x) < \alpha - a$, $x \in [1/x_0, x_0]$, диктуется необходимостью выполнения неравенства (48) и тем, что $N'_\xi(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 0$ (см. оценки (55)).

Рассмотрим равномерное приближение функции $-\hat{f}'(x, \alpha, \beta, \gamma)$ на $[1/x_0, x_0]$ простой функцией $\chi(x)$ с конечным числом значений такой, что

$$\gamma - a \leq \chi(x) \leq -\hat{f}'(x, \alpha, \beta, \gamma), \quad (49)$$

и на $[0, 1/x_0]$ и (x_0, ∞) положим $\chi(x) = 0$. Мы аппроксимируем $\chi(x)$ непрерывной функцией $\bar{\chi}(x)$:

$$\int_0^\infty |\chi(x) - \bar{\chi}(x)| dx < \delta_2. \quad (50)$$

Это приближение может быть осуществлено с использованием стандартных рассуждений (см., например, [8, гл. VIII, § 51]). Существенно, и это следует из доказательства возможности такой аппроксимации, что величина

$$\nu^0 = \nu(\{x: |\chi(x) - \bar{\chi}(x)| \neq 0\}) \quad (51)$$

может быть сделана произвольно малой и

$$\hat{s} \max_x \chi(x) \geq \bar{\chi}(x) \geq \min_x \chi(x), \quad (52)$$

где $\hat{s}$ есть число различных значений функции $\chi(x)$. Для произвольного $\delta_3 > 0$ можно выбрать $\bar{\chi}$ так, чтобы эта функция удовлетворяла дополнительному условию

$$\bar{\chi}(x) = 0, \quad x > x_0 + \delta_3. \quad (53)$$

Положим $y'(x) = -\bar{\chi}(x)$ и потребуем, чтобы $y(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Мы имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y(x) dx &= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty \bar{\chi}(z) dz \right) dx \leq \int_0^{x_0} \left(\int_0^{x_0} \chi(z) dz \right) dx + \delta_2(x_0 + \delta_3) \\ &\leq \int_0^\infty f(x) dx - \delta + \delta_2(x_0 + \delta_3). \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь в первом неравенстве мы использовали (50), а во втором неравенстве — (48) и (49).

Справедлива следующая оценка для $L(\cdot)$:

$$\begin{aligned} |L(\bar{\chi}(x)) - L(-\hat{f}'(x))| &= \int_0^{1/x_0} |N(\bar{\chi}(x)) - N(-\hat{f}'(x))| dx \\ &\quad + \int_{1/x_0}^{x_0} |N(\bar{\chi}(x)) - N(-\hat{f}'(x))| dx + \int_{x_0}^\infty |N(\bar{\chi}(x)) - N(-\hat{f}'(x))| dx \\ &\leq 2\varepsilon_1 + 2\nu^0 N(\hat{s}\beta) + \int_{1/x_0}^{x_0} \left| N(-\hat{f}'(x, \alpha, \beta, \gamma)) - N(-\hat{f}'(x)) \right| dx \\ &\quad + \int_{1/x_0}^{x_0} \left| N(-\hat{f}'(x, \alpha, \beta, \gamma)) - N(\chi(x)) \right| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{1/x_0}^{x_0} |N(\chi(x)) - N(\bar{\chi}(x))| dx \\
& \leq 3\varepsilon_1 + 2\nu^0 N(\hat{s}\beta) + N'_\xi(\gamma - a)(\delta_1 + \delta_2).
\end{aligned} \tag{55}$$

Здесь мы использовали соотношения $\nu(\{x: \bar{\chi}(x) > 0\} \cap A_0) \leq \nu^0$ и $\max N(\chi(x)) \leq N(\hat{s}\beta)$. В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что функция $N'(z)$ монотонно убывает. Теперь выберем $\varepsilon_1 < \varepsilon/3$ и затем $\alpha, \beta > 0$ так, чтобы выполнялись соотношения (46), (47) и (48). Далее выберем $\nu^0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ так, что $\delta_2(x_0 + \delta_3) < \delta/2$ и

$$N'_\xi(\gamma - a)(\delta_1 + \delta_2) + 2\nu^0 N(\hat{s}\beta) < \varepsilon - 3\varepsilon_1.$$

Тогда правые части соотношений (54) и (55) не превосходят $\int_0^\infty f(x) dx - \delta/2$ и ε соответственно. Далее выберем функции $\hat{f}'(x, \alpha, \beta, \gamma), \chi(x), \bar{\chi}(x)$ в соответствии с предыдущим выбором параметров. Это доказывает (42) с учетом условия, связанного с неравенством (43).

Теперь все готово для доказательства равенства

$$\sup_{f \in \mathcal{C}_1} L(f) = \sup_{f \in \mathcal{C}_2} L(f). \tag{56}$$

С учетом предыдущих построений нам остается доказать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ и функции $f \in \mathcal{C}_1$ такой, что $\int_0^\infty f(x) dx < 1 - \delta$, существует функция $y \in \mathcal{C}_2$ такая, что $|L(y) - L(f)| < \varepsilon$. Доказательство этого факта во многом аналогично доказательству (42), и мы опишем простую идею доказательства, опуская технические детали. Необходимо повторить предыдущие рассуждения при доказательстве (42) с одним изменением: теперь мы рассматриваем не произвольную простую функцию $\chi(x)$, а ступенчатую функцию — функцию, которая постоянна на интервалах. Это возможно сделать, когда f' непрерывна, если вместо $\hat{f}'(x, \alpha, \beta, \gamma)$ рассмотреть функцию

$$f'_1(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} f'(x), & \alpha \leq -f'(x) \leq \beta, & x \in \left[\frac{1}{x_0}, x_0\right], \\ \alpha, & -f'(x) < \alpha, & x \in \left[\frac{1}{x_0}, x_0\right], \\ & \text{или } x \notin \left[\frac{1}{x_0}, x_0\right], \\ -\beta, & -f'(x) > \beta, & x \in \left[\frac{1}{x_0}, x_0\right], \end{cases}$$

и

$$\int_0^\infty f_1(x, \alpha, \beta) dx < 1 - \delta.$$

Тогда все предыдущие рассуждения остаются справедливыми с 1 вместо $\int_0^\infty f(x) dx$.

Строя функцию $\overline{\chi}(x) \in \mathcal{C}_2$, мы соединим последовательные ступени функции $\chi(x)$ гладкой кривой. Нетрудно видеть, что все предыдущие условия и неравенства будут выполнены. Это доказывает (56).

Прежде чем завершить доказательство теоремы 2, мы докажем теорему 3. Из теоремы 1 и неравенства ($f \in \mathcal{C}$)

$$\#^{n,\delta,\varepsilon,r}(f_{\max}) \leq \#^{n,\delta}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#^{n,\delta}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}{\sqrt{n}} &\geq \lim_{r \rightarrow \infty} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#^{n,\delta,\varepsilon,r}(f_{\max}(x))}{\sqrt{n}} \\ &= \int_0^\infty N(-f'_{\max}(x)) dx = 2C, \end{aligned} \tag{57}$$

где C определяется соотношениями (4), (5). Последнее равенство следует из соотношения

$$N(-f'_{\max}(x)) = -\lambda_1(-f'_{\max}(x)) + f'_{\max}(x) \lambda_2(-f'_{\max}(x)). \tag{58}$$

Сравнивая (15), (16) и (4), мы убеждаемся, что $\lambda_1(-f'_{\max}(x)) = -Cf_{\max}(x)$, $\lambda_2(-f'_{\max}(x)) = -Cx$. Подставляя эти значения в (58), имеем

$$\int_0^\infty N(-f'_{\max}(x)) dx = 2C.$$

Здесь мы использовали интегрирование по частям.

После (57) нам осталось доказать, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#^{n,\delta}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}{\sqrt{n}} \leq \int_0^\infty N(-f'_{\max}(x)) dx.$$

Снова рассмотрим интервал $[1/r, r]$ и множество ограничений ступенчатых функций $S_{n,\delta}$ на этот интервал и на интервалы $[0, 1/r)$, (r, ∞) . Как и ранее, при достаточно большом r число ограничений $S_{n,\delta}$ на $[0, 1/r)$ и (r, ∞) мало:

$$\frac{\ln \alpha_{n,r}}{\sqrt{n}}, \quad \frac{\ln \beta_{n,r}}{\sqrt{n}} = o_{n,r}(1). \tag{59}$$

Теперь мы должны оценить число ограничений $S_{n,\delta,r}$; число $\#^{n,\delta}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ оценивается сверху произведением чисел ограничений на эти три интервала.

Отметим, что если $\varphi_{n,\delta,r}$ есть ограничение ступенчатой функции $\varphi_{n,\delta}$, то

$$\int_{1/r}^r \varphi_{n,\delta,r}(x) dx \leq 1 + \delta - \frac{1}{r} \varphi_{n,\delta}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{60}$$

Таким образом,

$$\varphi_{n,\delta}(x) \leq \varphi_{n,\delta}\left(\frac{1}{r}\right) \leq r(1 + \delta), \quad x \in \left[\frac{1}{r}, r\right]. \tag{61}$$

Далее, используя стандартные аргументы, нетрудно показать, что множество монотонно невозрастающих функций $\varphi(x)$ на $[1/r, r]$ с ограничениями

$$\int_{1/r}^r \varphi(x) dx \leq 1 + \delta - \frac{1}{r} \varphi\left(\frac{1}{r}\right) \quad (62)$$

и (61) является компактным в топологии $L^1([1/r, r], dx)$. Мы обозначим этот компакт через K_r .

Из доказательства теоремы 1 следует, что для каждой функции $f \in \mathcal{C}$ мы можем написать

$$K(f, \varepsilon, r) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \# \{S_{n, \delta, r} \cap B(f, \varepsilon, r)\}}{\sqrt{n}} = \int_{1/r}^r N(-\hat{f}'(x)) dx + o_\varepsilon(1).$$

Далее, для каждой $f \in \mathcal{C}$ мы выберем ε_f так, что

$$\left| K(f, \varepsilon, r) - \int_{1/r}^r N(-\hat{f}'(x)) dx \right| < \varepsilon_2 = o_{\varepsilon_f}(1).$$

Для каждой функции $f \in K_r$ рассмотрим шар $B(f, \varepsilon_f, r)$ и из всего множества таких шаров выберем конечное число шаров $B(f_i, \varepsilon_{f_i}, r)$ так, что $K_r \subset \bigcup_i B(f_i, \varepsilon_{f_i}, r)$.

Имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \# \{S_{n, \delta, r}\}}{\sqrt{n}} &\leq \max_i \frac{\ln \# \{S_{n, \delta, r} \cap B(f_i, \varepsilon_{f_i}, r)\}}{\sqrt{n}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_i \int_{1/r}^r N(-\hat{f}'_i(x)) dx + \varepsilon_2 \leq \sup_{f \in \mathcal{C}^r} \int_{1/r}^r N(-\hat{f}'(x)) dx + \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (63)$$

где $\mathcal{C}^r$ есть множество ограничений функций из $\mathcal{C}$ на $[1/r, r]$. Как и в теореме 2, мы можем выбрать в (63) множество $\mathcal{C}_2^r$ вместо $\mathcal{C}^r$, где $\mathcal{C}_2^r \subset \mathcal{C}^r$ является множеством функций на $[1/r, r]$ с непрерывной второй производной. Доказательство этого аналогично тому, которое приведено при доказательстве теоремы 2, и даже проще, поскольку здесь мы имеем конечный интервал $[1/r, r]$.

Так как функционал $L^r(f) = \int_{1/r}^r N(-\hat{f}'(x)) dx$ выпуклый, то чтобы найти его экстремаль, достаточно найти его локальную экстремаль. Мы имеем следующую задачу: найти

$$f_{\max} = \arg \max_{f \in \mathcal{C}_2^r} L^r(f). \quad (64)$$

Найдем сначала локальную экстремаль среди функций

$$f \in \mathcal{C}_2^r \quad \text{таких, что} \quad |f'(x)| > y_0 \quad (65)$$

при некотором $y_0 > 0$. Если мы найдем такую экстремаль при достаточно малом y_0 , на которое не накладывалось предварительно никаких условий, то эта функция и будет решением задачи (64).

Если (65) выполняется, то

$$y'(x) = f'(x) + th'(x) < -y_0, \quad x \in \left[\frac{1}{r}, r\right], \quad (66)$$

при достаточно малом t , и мы сосредоточим наше внимание на таких $h(x) \in \mathcal{C}_2^r$, что

$$\int_{1/r}^r h(x) dx = 0, \quad h\left(\frac{1}{r}\right) = h(r) = 0. \quad (67)$$

Тогда $y \in \mathcal{C}_2^r$. Поскольку $y'(x) < -y_0$, $y \in \mathcal{C}_2^r$ и функции $N(\xi), \lambda_2(\xi)$ являются возрастающими, мы имеем

$$0 < N'_\xi(-y'(x)) = -\lambda_2(-y'(x)) < -\lambda(y_0).$$

Таким образом, мы можем поменять порядок взятия производной и интеграла и получить

$$\frac{d}{dt} L^r(f + th) \Big|_{t=0} = \int_{1/r}^r N'_\xi(-f'(x)) h'(x) dx \triangleq M.$$

Если f является экстремалью, то $M = 0$ и, интегрируя по частям, мы получаем

$$N'_\xi(-f'(x)) h(x) \Big|_{1/r}^r - \int_{1/r}^r h \frac{d}{dx} N'_\xi(-f'(x)) dx = 0. \quad (68)$$

Поскольку $h \in \mathcal{C}_2^r$ — произвольная функция, удовлетворяющая (65), (67), стандартные рассуждения из вариационного исчисления (см., например, [7]) показывают, что для того, чтобы интеграл в (68) был равен нулю, необходимо условие

$$\frac{d}{dx} N'_\xi(-f'(x)) = C = \text{const}. \quad (69)$$

Первое слагаемое в (68) равняется нулю согласно условию (67).

Уравнение (69) имеет решение

$$N'_\xi(-f'(x)) = C(x + \alpha), \quad C, \alpha = \text{const},$$

и, таким образом,

$$\lambda_2(-f'(x)) = -C(x + \alpha). \quad (70)$$

В то же время из (15), (16) следует, что $d\lambda_1/d\lambda_2 = f'(x)$, т.е.

$$\lambda_1(x) = -C \int f'(x) dx + \text{const} = -C(f(x) + \beta), \quad \beta = \text{const}. \quad (71)$$

Используя (16), (70) и (71), мы получаем равенство

$$\sum_{\ell \in \mathcal{A}} e^{-C(x+\alpha)\ell} \sum_{\ell \in \mathcal{B}} e^{-C(y+\beta)\ell} = 1.$$

Это равенство определяет (с точностью до констант C, α, β) y как функцию x . Также мы имеем условие

$$\int_{1/r}^r y(x) dx \leq 1 - \frac{1}{r} y\left(\frac{1}{r}\right). \quad (72)$$

Значения α и β являются сдвигами вдоль оси X и Y графика функции $y(x)$ при $\alpha = \beta = 0$. Сдвиг вдоль оси Y не влияет явным образом на значение функционала

$$L^r(f) \triangleq \int_{1/r}^r N(-\hat{f}'(x)) dx.$$

Наилучший выбор β , который доставляет максимум функционала $L^r(f)$, таков, что условие (72) становится наименее ограничительным, т.е. $y(r) = 0$. Так как $y'(x)$ является непрерывной функцией переменных α, β, C , то функционал $L^r(y)$ также является непрерывной функцией этих переменных. Кроме того, легко видеть, что для некоторого y_0 имеем $|y'(x)| > y_0$, $x \in [1/r, r]$, при заданных α, C, r . Мы должны также учесть возможность того, что супремум $L^r(f)$ достигается, когда $\alpha \rightarrow \infty$. В таком случае

$$y'(x) \rightarrow C_1 = \text{const}, \quad x \in \left[\frac{1}{r}, r\right]. \quad (73)$$

Если это как раз тот случай, когда L^r достигает супремума, то

$$\sup_{f \in \mathcal{C}} L^r(f) = \left(r - \frac{1}{r}\right) N(-C_1).$$

Покажем, что это не так (последнее выражение не есть супремум $L^r(f)$). Действительно, если $y'(x) = C_1$ и $y(r) = 0$, то $-C_1 = y(1/r)/(r - 1/r)$ и из (72) следует, что

$$y\left(\frac{1}{r}\right) \leq \frac{2}{r + 1/r}, \quad \text{или} \quad -C_1 \leq \frac{2}{r^2 - 1/r^2}.$$

Поскольку

$$\int_{1/r}^r N(-y'(x)) dx \leq (1 - C_1) r H\left(\frac{-C_1}{1 - C_1}\right) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

при большом r функционал $L^r(-y'(x))$ стремится к нулю, и, таким образом, при большом r функция $y(x)$ не может доставлять супремум $L^r(f)$, потому что нетрудно предложить функцию f , которая удовлетворяет условию (72) и для которой $L^r(f)$ возрастает с ростом r (например, если взять $f(x) = \psi(x)$, где $\psi(x)$ определена в (75) ниже).

Таким образом, экстремум функционала $L^r(f)$ достигается при некотором конечном значении α . При заданном C функция $|y'(x)|$ возрастает, когда α убывает и $\alpha \geq -1/r$. Мы приведем грубую оценку величины $\max L^r(y)$. Предположим, что $\alpha = -1/r$, и вместо условия (72)

будем считать выполненным более грубое условие

$$\int_{1/r}^r y(x) dx \leq 1. \quad (74)$$

Если $\psi(x)$ есть решение уравнения

$$\sum_{\ell \in \mathcal{A}} e^{-x\ell} \sum_{\ell \in \mathcal{B}} e^{-\psi(x)\ell} = 1, \quad (75)$$

мы имеем

$$1 = \sum_{\ell \in \mathcal{A}} e^{-x\ell} \sum_{\ell \in \mathcal{B}} e^{-\psi(x)\ell} \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-x\ell} \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-\psi(x)\ell} \frac{1}{(e^x - 1)(e^{\psi(x)} - 1)},$$

и, таким образом, функция $\psi(x)$ интегрируема на $[0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq -\ln(1 - e^{-x}), \\ \int_0^{\infty} \psi(x) dx &\leq -\int_0^{\infty} \ln(1 - e^{-x}) dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Мы имеем

$$y(x) = \frac{1}{C} \psi\left(C\left(x - \frac{1}{r}\right)\right) - \beta, \quad (76)$$

$$\bar{y}(r) = \frac{1}{C} \psi\left(C\left(r - \frac{1}{r}\right)\right) - \beta = 0. \quad (77)$$

Из условия (74) следует, что

$$M(C, r, \beta) \triangleq \int_{1/r}^r y(x) dx = \frac{1}{C^2} \int_0^{C(r-1/r)} \psi(x) dx - \beta\left(r - \frac{1}{r}\right) \leq 1. \quad (78)$$

Кроме того,

$$L^r(y) = \frac{1}{C} \int_0^{C(r-1/r)} N(-\psi'(x)) dx$$

и $\psi(x), -\psi'(x) \searrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Далее, $(L^r)'_C(y) < 0$ и, используя дифференцирование в (75), (77) и (78), нетрудно видеть, что $M'_C(C, r, \beta) < 0$.

Таким образом, мы должны выбрать величину C как можно малой, чтобы при этом удовлетворялось условие (78), т.е. мы должны иметь

$$\frac{1}{C^2} \int_0^{C(r-1/r)} \psi(x) dx = \beta(C) \left(r - \frac{1}{r}\right) + 1. \quad (79)$$

Равенства (77), (79) вместе с (75) определяют C как функцию r . Так как при заданном r $M(C, r, \beta(C))$ является непрерывной, монотонной функцией C , стремящейся к 0 при $C \rightarrow \infty$ и

$$M(C, r, \beta(C)) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad C \rightarrow 0, \quad (80)$$

то всегда возможно найти единственное значение C , которое удовлетворяет этим соотношениям.

Осталось показать, что

$$C(r) \longrightarrow \left(\int_0^\infty \psi(x) dx \right)^{1/2} \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (81)$$

Предположим на время, что (81) выполняется. Тогда, поскольку $N(-\psi'(x)) = \psi(x) - x\psi'(x)$, мы получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L^r(y) = \frac{2}{C} \int_0^\infty \psi(x) dx = 2C.$$

Принимая во внимание (59), мы приходим к неравенству

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \#_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{n, \delta}}{\sqrt{n}} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} L^r(y) = 2C.$$

Из этого неравенства и (57) следует теорема 3.

Теперь неравенство $\max_{f \in \mathcal{C}_2} L(f) \leq 2C$ следует из теорем 1 и 3. Кроме того, $\max_{f \in \mathcal{C}_2} L(f) \geq L(f_{\max}) = 2C$, и это завершает доказательство соотношения (2). Теорема 2 также доказана. Таким образом, $\lim_{r \rightarrow \infty} C(r)$ существует.

Далее, поскольку функция $\psi(x)$ монотонно убывает и интеграл $\int_0^\infty \psi(x) dx$ сходится, нетрудно видеть, что $\beta(C(r))r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Взяв предел $\lim_{r \rightarrow \infty}$ от обеих частей (79), получаем

$$\frac{1}{C^2} \int_0^\infty \psi(x) dx = 1.$$

Это доказывает (81). Все доказательства закончены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вершик А. М. Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации. — Функц. анализ и его прил., 1996, т. 30, № 2, с. 19–39.
2. Чандрасекхаран К. Арифметические функции. М.: Наука, 1975, 272 с.
3. Блиновский В. М. Принцип больших уклонений для границы случайной диаграммы Юнга. — Проблемы передачи информации, 1999, т. 35, № 1, с. 61–74.
4. Blinovskiy V. M. Large deviations problem for the shape of a random Young diagram with restrictions. — Numbers, Information and Complexity. Ed. by I. Althöfer et al. Dordrecht: Kluwer, 2000, p. 473–488.
5. Dembo A., Vershik A., Zeitouni O. Large deviations for integer partitions. — Markov Process. Related Fields, 2000, v. 6, № 2, p. 147–179.
6. Dembo A., Zeitouni O. Large Deviations Techniques and Applications. Boston: Jones and Bartlett, 1993, 346 p.
7. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961, 228 с.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Вып. 2: Мера, интеграл Лебега, гильбертово пространство. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960, 118 с.

Поступила в редакцию
17.VIII.2004