Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Богачев, М. Рёкнер, С. В. Шапошников, Глобальная регулярность и оценки решений параболических уравнений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 4, 652–674

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:16:06

© 2005 г.

БОГАЧЁВ В. И.*, РЁКНЕР М.**,
ШАПОШНИКОВ С. В.*ГЛОБАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ И
ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

Для заданного параболического оператора второго порядка

$$Lu(t, x) := \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a^{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t, x) + b^i(t, x) \partial_{x_i} u(t, x),$$

рассматривается слабое параболическое уравнение $L^* \mu = 0$ для борелевских вероятностных мер на $(0, 1) \times \mathbf{R}^d$. Уравнение понимается как равенство

$$\int_{(0,1) \times \mathbf{R}^d} Lu \, d\mu = 0$$

для всех гладких функций u с компактным носителем в $(0, 1) \times \mathbf{R}^d$. Это уравнение выполнено для переходных вероятностей диффузионного процесса, ассоциированного с L . Показано, что при широких предположениях μ имеет вид $\mu = \varrho(t, x) \, dt \, dx$, где функция $x \mapsto \varrho(t, x)$ является соболевской, функция $|\nabla_x \varrho(x, t)|^2 / \varrho(t, x)$ интегрируема по Лебегу на $[0, \tau] \times \mathbf{R}^d$ и $\varrho \in L^p([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ для всех $p \in [1, +\infty)$ и $\tau < 1$. Более того, дано достаточное условие равномерной ограниченности ϱ на $[0, \tau] \times \mathbf{R}^d$.

Ключевые слова и фразы: параболическое уравнение для мер, переходные вероятности, регулярность решений параболических уравнений, оценки решений параболических уравнений.

1. Введение и обозначения

Цель этой работы — дать эффективные условия глобальной соболевской регулярности и интегрируемости плотностей решений параболических уравнений вида

$$L^* \mu = 0 \tag{1.1}$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: sfb1@mathematic.uni-bielefeld.de

** Department of Mathematics, Purdue University, 150 N. University Str., West Lafayette, IN 47907-2067, USA

¹⁾ Работа выполнена проектами РФФИ 04-01-00748, НШ 1758.2003.1, DFG 436 RUS 113/343/0(R), INTAS 03-51-5018 и SFB 701 при университете Билефельда.

для борелевских мер μ на $(0, 1) \times \mathbf{R}^d$. Такие уравнения недавно исследовались в [1]–[4]. Здесь L — параболический оператор второго порядка

$$Lu(t, x) := \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a^{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t, x) + b^i(t, x) \partial_{x_i} u(t, x),$$

а интерпретация нашего уравнения состоит в следующем. Будем говорить, что борелевская вероятностная мера μ на $(0, 1) \times \mathbf{R}^d$, представленная в виде $\mu(dt dx) = \mu_t(dx) dt$ посредством семейства борелевских мер $(\mu_t)_{t \in [0, 1]}$ на $\mathbf{R}^d$, удовлетворяет слабому параболическому уравнению (1.1), если функции a^{ij} и b^i интегрируемы на каждом компактном множестве в $(0, 1) \times \mathbf{R}^d$ относительно меры $\mu = \mu_t dt$ и для каждого $u \in C_0^\infty((0, 1) \times \mathbf{R}^d)$ имеем

$$\int_{(0, 1) \times \mathbf{R}^d} Lu d\mu = \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} Lu(t, x) \mu_t(dx) dt = 0. \quad (1.2)$$

Будем говорить, что μ удовлетворяет начальному условию $\mu_0 = \nu$ при $t = 0$, если ν — борелевская мера на $\mathbf{R}^d$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(x) \mu_t(dx) = \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(x) \nu(dx) \quad (1.3)$$

для всех $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$.

Такие же определения вводятся в случае, когда $\mathbf{R}^d$ заменяется открытым множеством $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ или открытым множеством в римановом многообразии.

Уравнение (1.1) выполнено для переходных вероятностей диффузионного процесса, управляемого стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi_t = \sqrt{2A(t, \xi_t)} dw_t + b(t, \xi_t) dt$$

при условии, что такая диффузия существует, а коэффициенты A и b удовлетворяют некоторым условиям. Однако (1.1) может рассматриваться независимо от всяких вероятностных предположений. Более того, изучение этого уравнения в чисто аналитической постановке может быть полезно для построения ассоциированной диффузии (см. [4]).

Наш основной результат утверждает, что плотность ϱ всякого решения обладает тем свойством, что функция $\varrho(t, \cdot)$ является соболевской на пространстве $\mathbf{R}^d$, а функция $|\nabla_x \varrho(t, x)|^2 / \varrho(t, x)$ интегрируема на $[0, \tau] \times \mathbf{R}^d$ при условии, что функции $|b|$ и $\ln(|x| + 1)$ входят в $L^2(\mu)$, коэффициент A равномерно ограничен, равномерно обратим и равномерно липшицев по x , а начальное распределение $\mu_0 = \varrho(0, \cdot) dx$ имеет конечную энтропию. Предположения относительно A можно ослабить, если b обладает некоторой дополнительной локальной интегрируемостью. Дано конструктивное условие в терминах функций Ляпунова,

обеспечивающее квадратичную интегрируемость $|b|$ и $\ln(|x| + 1)$ относительно решения μ . Основной результат позволяет показать, что ϱ входит во все $L^p([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ при $\tau < 1$, если $\sup_t \|b(t, \cdot)\|_{L^d(\mu_t)} < \infty$ и $\varrho(0, \cdot) \in L^p(\mathbf{R}^d)$ для всех $p \geq 1$. Если же $|b| \in L^\beta(\mu)$ при некотором $\beta > d + 2$ и $\varrho(0, \cdot) \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$, то плотность ϱ равномерно ограничена на $[0, \tau] \times \mathbf{R}^d$ при $\tau < 1$. С помощью этого утверждения получены поточечные оценки сверху вида $\varrho(t, x) \leq \Phi(x)^{-1}$. Отметим, что в отличие от многих известных результатов о глобальной ограниченности решений здесь не требуется, чтобы коэффициент сноса b был диссипативным или потенциальным.

Аналогичные результаты в эллиптическом случае были получены в [5]–[10]. Можно было бы рассмотреть эллиптический случай как ситуацию, когда решение и коэффициенты не зависят от времени. Тогда наш параболический результат не покрывает эллиптический, так как начальное распределение (которое в этом случае совпадает с решением) должно иметь конечную энтропию, а последнее предположение не может быть полностью устранено в параболическом случае. С другой стороны, разумный параболический аналог эллиптического результата мог бы быть таким: интегрируемость $|\varrho|^2/\varrho$ на $[\tau_1, \tau_2] \times \mathbf{R}^d$ для всякого отрезка $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, 1)$ без ограничений на начальное распределение. Пока мы не преуспели в исследовании этой второй возможности. Конечно, если для некоторого $\tau > 0$ мера μ_τ имеет конечную энтропию, то наши предположения выполнены на $[\tau, 1]$.

Наш результат будет применен в готовящейся работе о проблеме единственности для параболических уравнений для мер. Он может быть полезен также в изучении переходных вероятностей диффузионных процессов и в динамике Нельсона (см. [11]–[15]).

Пусть $W^{p,1}(\mathbf{R}^d)$ обозначает соболевское пространство функций, принадлежащих $L^p(\mathbf{R}^d)$ вместе с их обобщенными частными производными. Это пространство наделяется стандартной нормой

$$\|f\|_{W^{p,1}} := \|f\|_p + \|\nabla f\|_p,$$

где $\|\cdot\|_p$ обозначает $L^p(\mathbf{R}^d)$ -норму скалярных или векторных функций. Символ $L^{p,q}$, где $1 \leq p, q < \infty$, будет использоваться для пространства всех измеримых функций f на $[0, 1] \times \mathbf{R}^d$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,q} := \left(\int_0^1 \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(t, x)|^p dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q}.$$

Пространство $L^{p,\infty}$, где $1 \leq p < \infty$, состоит из измеримых функций f на $[0, 1] \times \mathbf{R}^d$ с $t \mapsto \|f(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} \in L^\infty[0, 1]$. Для аналогичных пространств функций на $[0, \tau] \times \mathbf{R}^d$ используются обозначения $L^{p,q}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$. Наконец, $\mathbf{H}^{p,q}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ обозначает пространство всех измеримых функций f

на $[0, \tau] \times \mathbf{R}^d$ с конечной нормой

$$\|f\|_{\mathbf{H}^{p,q}([0,\tau] \times \mathbf{R}^d)} := \left(\int_0^\tau \|f(t, \cdot)\|_{W^{p,1}}^q dt \right)^{1/q}.$$

Для упрощения обозначений градиент функции u на $(0, 1) \times \mathbf{R}^d$ относительно аргумента из $\mathbf{R}^d$ обозначается через ∇u , т.е.

$$\nabla u(t, x) := \nabla_x u(t, x) = (\partial_{x_1} u(t, x), \dots, \partial_{x_d} u(t, x)).$$

Мы используем стандартное правило суммирования по повторяющимся индексам, например, $\partial_{x_i} a^{ij} := \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} a^{ij}$, $a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u := \sum_{i,j=1}^d a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u$.

Будем говорить, что неотрицательная мера μ_0 на $\mathbf{R}^d$ имеет конечную энтропию, если $\mu_0 = \varrho_0 dx$ и $\varrho_0 \ln \varrho_0 \in L^1(\mathbf{R}^d)$, где мы полагаем $0 \ln 0 := 0$. Энтропией ϱ_0 называется интеграл от $\varrho_0 \ln \varrho_0$.

В [3] было показано, что если коэффициент A невырожден, то мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $(0, 1) \times \mathbf{R}^d$. Соответствующая плотность будет обозначаться через ϱ .

Достаточное условие существования решения в классе вероятностных мер состоит в следующем (см. работу [2], которая улучшает [1]). Коэффициенты a^{ij} и b^i — такие борелевские функции на $[0, 1] \times \mathbf{R}^d$, что $A(t, x) = (a^{ij}(t, x))$ является неотрицательной симметричной матрицей, причем существует такое $p > d + 2$, что для каждого шара B и всех $i, j \leq d$ имеем

(C1) $\inf_{(t,x) \in [0,1] \times B} \det A(t, x) \geq M_1(B) > 0$ и выполняется неравенство $\sup_{t \in [0,1]} \|a^{ij}(t, \cdot)\|_{W^{p,1}(B)} \leq M_2(B)$,

(C2) $\sup_{t \in [0,1]} \|b^i(t, \cdot)\|_{L^p(B)} \leq M_3(B)$.

Если выполнены (C1) и (C2) и существует такая неотрицательная функция V на $\mathbf{R}^d$, что $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$ и $LV \leq c_1 V + c_2$ с некоторыми постоянными c_1 и c_2 , то решение $\mu = \mu_t(dx) dt$ с вероятностными мерами μ_t существует для каждого начального распределения μ_0 , причем функция $t \mapsto \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(x) \mu_t(dx)$ непрерывна на $[0, 1]$ для всех $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$. Более того, если $V \in L^1(\mu_0)$, то $\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} V(x) \mu_t(dx) dt < \infty$. Кроме того, если $LV \leq c_2$, то $\int_{\mathbf{R}^d} V(x) \mu_t(dx) \leq c_2$ для почти всех t . Например, если коэффициент A равномерно ограничен и

$$\langle b(t, x), x \rangle \leq k_1 |x|^2 + k_2,$$

то возьмем функцию $V(x) = \ln(|x|^2 + 1)$. Это дает оценку $LV \leq \text{const}$, значит, интегралы от $\ln(|x|+1)$ относительно μ_t равномерно ограничены, если $\ln(|x|+1) \in L^1(\mu_0)$. Если коэффициент A равномерно ограничен и

$$\langle b(t, x), x \rangle \leq k_1 |x|^2 \ln(|x|+1) + k_2,$$

то положим $V(x) = |\ln(|x|^2 + 1)|^2$ и получим $LV \leq c_1 V + c_2$, значит, является μ -интегрируемой функция $|\ln(|x|+1)|^2$, если она μ_0 -интегрируема.

Наша основная оценка будет установлена в двух случаях, соответствующих двум различным подходам:

- 1) когда (C1) заменяется более сильным предположением и (C2) заменяется условием, что $|b|, \ln \max(|x|, 1) \in L^2(\mu)$,
- 2) условие $|b|, \ln \max(|x|, 1) \in L^2(\mu)$ накладывается в дополнение к (C1), (C2) и некоторому глобальному условию на A .

Положим

$$\Theta_A(t, x) := \sum_{j=1}^d \left| \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} a^{ij}(t, x) \right|.$$

2. Оценки логарифмических градиентов

Наш первый основной результат устанавливает квадратичную интегрируемость логарифмического градиента μ , т.е. отображения $\nabla \varrho / \varrho$, относительно μ . Если $\varrho(t, \cdot) \in W_{\text{loc}}^{1,1}$, то мы используем следующее соглашение: $\nabla \varrho(t, x) / \varrho(t, x) := 0$ при $\varrho(t, x) = 0$.

Теорема 2.1. *Предположим, что μ , где каждая μ_t есть вероятностная мера, удовлетворяет (1.1), (1.3). Пусть*

(i) *отображение A равномерно ограничено и $A(t, x) \geq \alpha \cdot I$ для некоторой постоянной $\alpha > 0$, а функции $x \mapsto a^{ij}(t, x)$ липшицевы с постоянной λ ,*

(ii) $|b| \in L^2(\mu)$.

Предположим также, что функция $\Lambda(x) := \ln \max(|x|, 1)$ входит в $L^2(\mu)$ (что имеет место, если, например, $\langle b(t, x), x \rangle \leq C_1 |x|^2 \Lambda(x) + C_2$ с некоторыми постоянными C_1 и C_2 и $\Lambda \in L^2(\mu_0)$). Если μ_0 имеет конечную энтропию, то $\mu_t = \varrho(t, \cdot) dx$, где $\varrho(t, \cdot) \in W^{1,1}(\mathbf{R}^d)$, причем для каждого $\tau < 1$ имеем

$$\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|\nabla \varrho(t, x)|^2}{\varrho(t, x)} dx dt < \infty. \quad (2.1)$$

В частности, имеем $\sqrt{\varrho} \in \mathbf{H}^{2,2}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$, $\varrho \in L^{d/(d-2),1}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$, если $d > 2$, и $\varrho \in L^{s,1}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ для всех $s \in [1, \infty)$ при $d = 2$.

Если интегралы $\int_{\mathbf{R}^d} \varrho(t, x) \Lambda(x) dx$ ограничены при $t \rightarrow 1$ (что выполнено, например, если $\langle b(t, x), x \rangle \leq C_1 |x|^2 + C_2$ с некоторыми постоянными C_1 и C_2 и $\Lambda \in L^1(\mu_0)$), то (2.1) верно с $\tau = 1$.

Доказательство. Воспользуемся следующим фактом (см., например, лемму 2.1 в работе [6]): если даны две неотрицательные функции $f_1, f_2 \in L^1(\mathbf{R}^d)$, то для всякой измеримой функции ψ такой, что $|\psi|^2 f_1 \in L^1(\mathbf{R}^d)$, имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{|(\psi f_1) * f_2|^2}{f_1 * f_2} dx \leq \int_{\mathbf{R}^d} |\psi|^2 f_1 dx \int_{\mathbf{R}^d} f_2 dx, \quad (2.2)$$

где $|(\psi f_1) * f_2(x)|^2 / (f_1 * f_2(x)) := 0$, если $f_1 * f_2(x) = 0$.

Для функции $w \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ положим

$$\varrho * w(t, x) := \int_{\mathbf{R}^d} w(x - y) \varrho(t, y) dy, \quad x \in \mathbf{R}^d.$$

Здесь и далее свертки берутся всегда относительно аргумента из $\mathbf{R}^d$. Из уравнения (1.2) и включения $|b| \in L^2(\mu)$ вытекает, что в соболевском смысле выполнено равенство

$$\partial_t(\varrho * w) = (a^{ij} \varrho) * \partial_{x_i} \partial_{x_j} w - (b^i \varrho) * \partial_{x_i} w. \quad (2.3)$$

Мы будем иметь дело с версией $\varrho * w$ (обозначаемой тем же символом), заданной формулой

$$\varrho * w(t, x) := \varrho * w(0, x) + \int_0^t v(s, x) ds, \quad (2.4)$$

где v — правая часть (2.3). Так как $|b| \in L^2(\mu)$ и функции a^{ij} ограничены, то $v \in L^1([0, 1] \times \mathbf{R}^d)$. Поэтому функция $\varrho * w$ абсолютно непрерывна по t на $[0, 1]$ и входит в класс $C_b^\infty(\mathbf{R}^d)$ по x . При почти каждом t указанная версия совпадает при всех x с исходной версией, заданной сверткой. Ниже важно также то, что это верно для $t = 0$. Поскольку исходная версия не превосходит $\sup_x |w(x)|$, то это же верно и для новой версии при почти всех t , а тогда и поточечно в силу непрерывности по t . Из условий (i) и (ii) легко усмотреть, что сказанное, включая (2.3), остается верным также для функций $w_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} g(x/\varepsilon)$, где g — стандартная гауссовская плотность и $\varepsilon \in (0, 1)$. Ниже в качестве ε берем только числа вида $1/n$, $n \in \mathbf{N}$. Положим

$$\varrho_\varepsilon := \varrho * w_\varepsilon, \quad f_\varepsilon(t, x) := \varrho_\varepsilon(t, x) + \varepsilon \max(1, |x|)^{-d-1},$$

причем в качестве $\varrho * w_\varepsilon$ берем версию, указанную в (2.4). Так как функция $\varrho \Lambda$ интегрируема, то сколь угодно близко к 1 найдутся такие τ , что

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varrho(\tau, x) \Lambda(x) dx < \infty. \quad (2.5)$$

Число τ , для которого выполнено (2.5), можно взять так, что для каждого $\varepsilon = 1/n$ наша версия $\varrho_\varepsilon(\tau, x)$ будет совпадать со сверткой $\varrho(\tau, \cdot) * w_\varepsilon(x)$ при всех x . Тогда легко проверяемое неравенство $\ln \max(|x + y|, 1) \leq \ln \max(|x|, 1) + |y|$ дает

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} f_\varepsilon(\tau, x) \Lambda(x) dx &\leq \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(\tau, x) \Lambda(x) dx + \varepsilon \int_{\mathbf{R}^d} \max(|x|, 1)^{-d-1} \Lambda(x) dx \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(\tau, x) \Lambda(x) dx + \int_{\mathbf{R}^d} |y| w_\varepsilon(y) dy + \varepsilon \int_{\mathbf{R}^d} \max(|x|, 1)^{-d-1} \Lambda(x) dx \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(\tau, x) \Lambda(x) dx + \varepsilon M_1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где M_1 — число, не зависящее от ε . В силу (2.3) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t(\varrho * w_\varepsilon) \ln f_\varepsilon dx dt \\ &= \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} [(a^{ij} \varrho) * \partial_{x_i} \partial_{x_j} w_\varepsilon - (b^i \varrho) * \partial_{x_i} w_\varepsilon] \ln f_\varepsilon dx dt, \end{aligned} \quad (2.7)$$

ибо $|\ln f_\varepsilon| \leq c_1 + c_2 \Lambda$ с некоторыми постоянными c_1 и c_2 , а функции $((b^i \varrho) * \partial_{x_i} w_\varepsilon) \Lambda$ и $((a^{ij} \varrho) * \partial_{x_i} \partial_{x_j} w_\varepsilon) \Lambda$ интегрируемы на $(0, 1) \times \mathbf{R}^d$. Действительно, так как $\varrho * |\partial_{x_i} w_\varepsilon| > 0$, то

$$((b^i \varrho) * \partial_{x_i} w_\varepsilon) \Lambda = ((b^i \varrho) * \partial_{x_i} w_\varepsilon)(\varrho * |\partial_{x_i} w_\varepsilon|)^{-1/2} (\varrho * |\partial_{x_i} w_\varepsilon|)^{1/2} \Lambda.$$

Тогда $((b^i \varrho) * \partial_{x_i} w_\varepsilon)(\varrho * |\partial_{x_i} w_\varepsilon|)^{-1/2} \in L^2((0, 1) \times \mathbf{R}^d)$ в силу (2.2) и включения $|b| \in L^2(\mu)$. Кроме того, $(\varrho * |\partial_{x_i} w_\varepsilon|)^{1/2} \Lambda \in L^2((0, 1) \times \mathbf{R}^d)$ в силу оценки $|\ln \max(|x + y|, 1)|^2 \leq 4 + 2|\ln \max(|x|, 1)|^2 + 2|\ln \max(|y|, 1)|^2$ и таких же выкладок, как и в (2.6). Аналогичным образом проверяется интегрируемость $[(a^{ij} \varrho) * \partial_{x_i} \partial_{x_j} w_\varepsilon] \Lambda$ на $(0, 1) \times \mathbf{R}^d$. Заметим, что можно проинтегрировать по частям в правой части (2.7). Действительно,

$$\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|\nabla f_\varepsilon|^2}{f_\varepsilon} dx dt \leq 2 \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|\nabla \varrho_\varepsilon|^2}{\varrho_\varepsilon} dx dt + 2\varepsilon(d+1)^2 \int_{\{|x| \geq 1\}} |x|^{-d-3} dx,$$

что конечно в силу (2.2), поскольку $\nabla \varrho_\varepsilon = (\nabla w_\varepsilon) * \varrho$ и $|\nabla w_\varepsilon|^2/w_\varepsilon \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Кроме того, $[(b^i \varrho) * w_\varepsilon] \varrho_\varepsilon^{-1/2} \in L^2((0, 1) \times \mathbf{R}^d)$ также в силу (2.2) и включения $|b| \in L^2(\mu)$. Аналогично имеем $[(a^{ij} \varrho) * \partial_{x_i} w_\varepsilon] \varrho_\varepsilon^{-1/2} \in L^2((0, 1) \times \mathbf{R}^d)$. Поскольку $f_\varepsilon > \varrho_\varepsilon$, то $\partial_{x_i} f_\varepsilon(\partial_{x_j} [(a^{ij} \varrho) * w_\varepsilon] - (b^i \varrho) * w_\varepsilon) f_\varepsilon^{-1} \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Следовательно,

$$\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t \varrho_\varepsilon \ln f_\varepsilon dx dt = - \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial_{x_i} f_\varepsilon}{f_\varepsilon} \left(\partial_{x_j} [(a^{ij} \varrho) * w_\varepsilon] - (b^i \varrho) * w_\varepsilon \right) dx dt. \quad (2.8)$$

Подынтегральное выражение слева можно записать как $\partial_t(f_\varepsilon \ln f_\varepsilon) - \partial_t \varrho_\varepsilon$. Так как интегралы от $\varrho_\varepsilon(\tau, x)$ и $\varrho_\varepsilon(0, x)$ по x равны 1, мы видим, что левая часть (2.8) равна

$$L_\varepsilon := \int_{\mathbf{R}^d} \left[f_\varepsilon(\tau, x) \ln f_\varepsilon(\tau, x) - f_\varepsilon(0, x) \ln f_\varepsilon(0, x) \right] dx.$$

Поскольку $f_\varepsilon(\tau, \cdot) \ln f_\varepsilon(\tau, \cdot) \in L^1(\mathbf{R}^d)$ ввиду (2.6) и оценки $|\ln f_\varepsilon| \leq c_1 + c_2 \Lambda$, то $f_\varepsilon(0, \cdot) \ln f_\varepsilon(0, \cdot) \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Нам нужна оценка снизу на L_ε . С этой целью заметим, что ввиду выпуклости функции $s \mapsto s \ln s$ на $(0, +\infty)$ и неравенства Йенсена мы имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} f_\varepsilon(0, x) \ln f_\varepsilon(0, x) dx \leq \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(0, x) \ln(2\varrho_\varepsilon(0, x)) dx \\ &+ \int_{\mathbf{R}^d} \varepsilon \max(|x|, 1)^{-d-1} \ln(2\varepsilon \max(|x|, 1)^{-d-1}) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \ln 2 + \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(0, x) \ln \varrho_\varepsilon(0, x) dx + \varepsilon \ln 2 \int_{\mathbf{R}^d} \max(|x|, 1)^{-d-1} dx \\ &\leq \ln 2 + \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_0(x) \ln \varrho_0(x) dx + \varepsilon \ln 2 \int_{\mathbf{R}^d} \max(|x|, 1)^{-d-1} dx =: M(\varepsilon). \end{aligned}$$

С другой стороны, (2.6) дает

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^d} f_\varepsilon(\tau, x) \ln f_\varepsilon(\tau, x) dx \geq -(d+1) \int_{\mathbf{R}^d} f_\varepsilon(\tau, x) \Lambda(x) dx \\ &\geq -(d+1) \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(\tau, x) \Lambda(x) dx - \varepsilon M_1(d+1) =: -K(\varepsilon). \end{aligned}$$

Заметим, что для всякой ограниченной борелевской функции a на $(0, 1) \times \mathbf{R}^d$, которая липшицева по второму аргументу с константой Липшица λ , для каждого j имеем

$$\begin{aligned} &\partial_{x_j}[(a\varrho) * w_\varepsilon](t, x) = a(t, x) \partial_{x_j} \varrho_\varepsilon(t, x) \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^d} \partial_{x_j} w_\varepsilon(x - y)[a(t, y) - a(t, x)] \varrho(t, y) dy \end{aligned} \quad (2.9)$$

и

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbf{R}^d} \partial_{x_j} w_\varepsilon(x - y)[a(t, y) - a(t, x)] \varrho(t, y) dy \right| \\ &\leq \lambda \int_{\mathbf{R}^d} |\partial_{x_j} w_\varepsilon(x - y)| |y - x| \varrho(t, y) dy \\ &\leq \lambda \int_{\mathbf{R}^d} \varepsilon^{-d} \frac{|x - y|^2}{\varepsilon^2} g\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \varrho(t, y) dy = \lambda(\varrho * q_\varepsilon)(t, x), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $q_\varepsilon(x) := w_\varepsilon(x)|x/\varepsilon|^2$, $x \in \mathbf{R}^d$. Отметим для дальнейшего, что при выводе (2.9) и (2.10) мы не использовали μ -интегрируемость Λ^2 и существование энтропии для μ_0 . Используя (2.8) и (2.9), получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} a^{ij} \frac{\partial_{x_i} f_\varepsilon}{f_\varepsilon} \partial_{x_j} f_\varepsilon dx dt \\ &= \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial_{x_i} f_\varepsilon}{f_\varepsilon} \left[(b^i \varrho) * w_\varepsilon + \varepsilon a^{ij} \partial_{x_j} \frac{1}{\max(|x|, 1)^{d+1}} \right] dx dt \\ &\quad - \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \left(\frac{\partial_{x_i} f_\varepsilon(t, x)}{f_\varepsilon(t, x)} \int_{\mathbf{R}^d} \partial_{x_j} w_\varepsilon(x - y) \right. \\ &\quad \quad \left. \times [a^{ij}(t, y) - a^{ij}(t, x)] \varrho(t, y) dy \right) dx dt - L_\varepsilon. \end{aligned}$$

Правая часть этого равенства не превосходит

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|\nabla f_\varepsilon|^2}{f_\varepsilon} dx dt \right)^{1/2} \left[\left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\sum_{i=1}^d [(b^i \varrho) * w_\varepsilon]^2}{f_\varepsilon} dx dt \right)^{1/2} + \varepsilon M C_d \right] \\ &\quad + d^{3/2} \lambda \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|\nabla f_\varepsilon|^2}{f_\varepsilon} dx dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{(\varrho * q_\varepsilon)^2}{f_\varepsilon} dx dt \right)^{1/2} \\ &\quad + M(\varepsilon) + K(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $M = \sup_{t,x} \|A(t, x)\|$ и C_d — интеграл от $(d+1)^2|x|^{-d-3}$ по множеству $\{|x| \geq 1\}$. В силу (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{[(b^i \varrho) * w_\varepsilon]^2}{f_\varepsilon} dx dt &\leq \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |b^i|^2 d\mu, \quad 1 \leq i \leq d, \\ \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{(\varrho * q_\varepsilon)^2}{f_\varepsilon} dx dt &\leq \gamma := \int_{\mathbf{R}^d} |x|^4 g(x) dx. \end{aligned}$$

Поскольку $A \geq \alpha \cdot I$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|\nabla f_\varepsilon|^2}{f_\varepsilon} dx dt &\leq \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|\nabla f_\varepsilon|^2}{f_\varepsilon} dx dt \right)^{1/2} \\ &\times \left(\|b\|_{2,\mu} + \varepsilon M C_d + \lambda d^{3/2} \sqrt{\gamma} \right) + M(\varepsilon) + K(\varepsilon), \end{aligned}$$

что ввиду неравенства $c\sqrt{x} \leq \alpha x/2 + c^2/(2\alpha)$ дает

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|\nabla f_\varepsilon|^2}{f_\varepsilon} dx dt &\leq \alpha^{-2} \left(\|b\|_{2,\mu} + \varepsilon M C_d + \lambda d^{3/2} \sqrt{\gamma} \right)^2 \\ &+ 2\alpha^{-1} (M(\varepsilon) + K(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Величины $M(\varepsilon)$ и $K(\varepsilon)$ равномерно ограничены по ε . Полагая $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что $\sqrt{\varrho(t, \cdot)} \in W^{2,1}(\mathbf{R}^d)$ для почти всех $t \in (0, \tau)$. Значит, $\varrho(t, \cdot) \in W^{1,1}(\mathbf{R}^d)$ для почти всех $t \in (0, \tau)$. Кроме того, интеграл от $|\nabla \varrho|^2/\varrho$ не превосходит правой части (2.11) с $\varepsilon = 0$. Итак, $\sqrt{\varrho} \in \mathbf{H}^{2,2}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$. По теореме вложения Соболева имеем $\varrho \in L^{d/(d-2),1}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$, если $d > 2$, и $\varrho \in L^{s,1}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ для всех $s \in [1, \infty)$ при $d = 2$.

Последнее утверждение теоремы ясно из наших рассуждений. Теорема 2.1 доказана.

Из доказательства следует полезная оценка

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|\nabla \varrho|^2}{\varrho} dx dt &\leq \alpha^{-2} \left(\|b\|_{2,\mu} + \lambda d^{3/2} \sqrt{\gamma} \right)^2 + 2 \ln 2 \alpha^{-1} \\ &+ 2\alpha^{-1} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_0(x) \ln \varrho_0(x) dx + 2\alpha^{-1} (d+1) \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(\tau, x) \Lambda(x) dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Из доказательства ясно, что для энтропии $\varrho_\varepsilon(0, x)$ нужна лишь оценка сверху, поэтому вместо интегрируемости $\varrho(0, x) \ln \varrho(0, x)$ достаточно требовать лишь интегрируемость $\varrho(0, x) \max(0, \ln \varrho(0, x))$ (тогда неравенство Йенсена надо применять к функции $s \max(0, \ln s)$). Это приводит к тому, что в оценке (2.12) вместо $\varrho(0, x) \ln \varrho(0, x)$ будет стоять $\varrho(0, x) \max(0, \ln \varrho(0, x))$. Однако полученные оценки и (2.8) показывают, что при сохранении прочих наших условий энтропия $\varrho(0, x)$ все равно оказывается конечной. Если же не требовать μ -интегрируемость Λ , то ситуация может измениться. Например,

если $d = 1$, $b = 0$ и $a = \frac{1}{2}$, то для всякого начального распределения μ_0 решение дается сверткой $\mu_0 * g_t$, где $g_t(x) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-x^2/(2t))$. Если μ_0 имеет такую плотность ϱ_0 , что $|\varrho'_0|^2/\varrho_0 \in L^1(\mathbf{R}^1)$, но функция $\varrho_0 \ln \varrho_0$ не интегрируема, то решение $\varrho(t, x)$ не имеет энтропии ни при каком t , хотя величины $\int |\partial_x \varrho(t, x)|^2 \varrho(t, x)^{-1} dx$ равномерно ограничены. Этот же пример показывает, что для справедливости оценки (2.1) необходимы какие-то условия на начальное распределение. Достаточно взять в качестве μ_0 дираковскую меру в начале координат. Тогда функция $|\partial_x \varrho|^2/\varrho$ не интегрируема на $(0, 1) \times \mathbf{R}^1$. Было бы интересно найти достаточное условие на A и b , обеспечивающее конечную энтропию $\varrho(t, \cdot)$ для $t > 0$ и всякого начального условия.

В примере 3.1 ниже и в работе [1] можно найти условия на коэффициенты A и b , обеспечивающие включение $|b| \in L^2(\mu)$.

Оценку (2.12) можно улучшить при дополнительных предположениях относительно A и b . Положим $b_0 := (b_0^j)$, $b_0^j = b^j - \partial_{x_i} a^{ij}$.

Теорема 2.2. *Предположим, что μ удовлетворяет (1.1), (1.3), где $\nu = \varrho_0 dx$, функция ϱ_0 имеет конечную энтропию и локально гёльдерова. Пусть A и b удовлетворяют (C1) и (C2) с некоторым $p > d + 2$. Предположим, что $|A^{-1/2}b_0| \in L^2(\mu)$, $\ln(1 + |x|) \in L^4(\mu)$ и*

$$\liminf_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_{r \leq |x| \leq 2r} \left[r^{-4} \|A(t, x)\|^2 + r^{-2} \Theta_A(t, x)^2 \right] \mu_t(dx) dt = 0. \quad (2.13)$$

Тогда $\varrho(t, \cdot) \in W_{\text{loc}}^{p,1}$ и для почти всех $\tau \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \left| \frac{\sqrt{A} \nabla \varrho}{\varrho} \right|^2 d\mu &\leq \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |A^{-1/2}b_0|^2 d\mu \\ &+ 2 \int_{\mathbf{R}^d} [\varrho(0, x) \ln \varrho(0, x) - \varrho(\tau, x) \ln \varrho(\tau, x)] dx, \end{aligned}$$

причем правая часть конечна. При дополнительном предположении, что $A \geq \alpha \cdot I$ для некоторого $\alpha > 0$, имеем $\sqrt{\varrho} \in \mathbf{H}^{2,2}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ и $\varrho \in L^{d/(d-2),1}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$, если $d > 2$, и $\varrho \in L^{s,1}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ для всех $s \in [1, \infty)$ при $d = 2$.

Доказательство. Из локальной теории [3] мы знаем, что μ обладает непрерывной положительной плотностью ϱ такой, что для каждого шара B и каждого отрезка $[t_1, t_2]$ в $(0, 1)$ имеем $\|\varrho(t, \cdot)\|_{W^{p,1}(B)} \in L^p[t_1, t_2]$. Пусть B_j обозначает замкнутый шар радиуса j с центром в начале координат. Зафиксируем такую функцию $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, что $\zeta(x) = 1$, если $|x| \leq 1$ и $\zeta(x) = 0$, если $|x| > 2$. Положим $\zeta_j(x) := \zeta(x/j)$. Для малых $\varepsilon > 0$ и больших $k > 0$ положим

$$\varrho_{k,\varepsilon} := \min(k, \varrho_\varepsilon), \quad \varrho_k = \min(k, \varrho), \quad \Omega_{k,\varepsilon} := \{\varrho_\varepsilon < k\}, \quad \Omega_k := \{\varrho < k\}.$$

Как и в теореме 2.1, для почти всех τ выполнено (2.5), что дает интегрируемость $\varrho(\tau, \cdot) \ln \varrho(\tau, \cdot)$ на $\mathbf{R}^d$. Для всех $\delta > 0$ и $\tau \in (\delta, 1)$ с указанным

свойством имеем равенство

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} (\partial_t \varrho_{\varepsilon}) (\ln \varrho_{k,\varepsilon}) \zeta_j^2 dx dt &= - \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} (a^{ik} \partial_{x_i} \varrho) * w_{\varepsilon} \frac{\partial_{x_k} \varrho_{\varepsilon}}{\varrho_{\varepsilon}} \zeta_j^2 I_{\Omega_{k,\varepsilon}} dx dt \\ &\quad - 2 \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} (a^{ik} \partial_{x_i} \varrho) * w_{\varepsilon} \partial_{x_k} \zeta_j (\ln \varrho_{k,\varepsilon}) \zeta_j dx dt \\ &\quad + \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} I_{\Omega_{k,\varepsilon}} \left((b_0 \varrho) * w_{\varepsilon}, \frac{\nabla \varrho_{\varepsilon}}{\varrho_{\varepsilon}} \right) \zeta_j^2 dx dt \\ &\quad + 2 \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} ((b_0 \varrho) * w_{\varepsilon}, \nabla \zeta_j) \zeta_j \ln \varrho_{k,\varepsilon} dx dt. \end{aligned}$$

Поскольку $\varrho_{\varepsilon} \partial_t \ln \varrho_{k,\varepsilon} = \partial_t \varrho_{k,\varepsilon}$, левая часть равна

$$\begin{aligned} E(j, k, \varepsilon, \delta) &:= \int_{\mathbf{R}^d} \zeta_j^2(x) \varrho_{\varepsilon}(\tau, x) \ln \varrho_{k,\varepsilon}(\tau, x) dx \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}^d} \zeta_j^2(x) \varrho_{\varepsilon}(\delta, x) \ln \varrho_{k,\varepsilon}(\delta, x) dx \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^d} \zeta_j^2(x) \varrho_{k,\varepsilon}(\delta, x) dx - \int_{\mathbf{R}^d} \zeta_j^2(x) \varrho_{k,\varepsilon}(\tau, x) dx. \end{aligned}$$

Сохраняя $\delta > 0$ фиксированным, полагая $\varepsilon \rightarrow 0$ и используя интегрируемость функции $t \mapsto \|\varrho(t, \cdot)\|_{W^{p,1}(B_{2j})}$ на $[\delta, \tau]$, а также непрерывность и строгую положительность ϱ на $[\delta, \tau] \times B_{2j}$, получаем

$$\begin{aligned} S_{j,k,\delta} &:= \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} \left(A \nabla \varrho, \frac{\nabla \varrho}{\varrho} \right) \zeta_j^2 I_{\Omega_k} dx dt \\ &= -2 \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} (A \nabla \varrho, \nabla \zeta_j) \zeta_j \ln \varrho_k dx dt + \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} I_{\Omega_k} \left(b_0, \frac{\nabla \varrho}{\varrho} \right) \zeta_j^2 \varrho dx dt \\ &\quad + 2 \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} (b_0, \nabla \zeta_j) \zeta_j (\ln \varrho_k) \varrho dx dt - E(j, k, \delta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E(j, k, \delta) &:= \int_{\mathbf{R}^d} \zeta_j^2(x) \varrho(\tau, x) \ln \varrho_k(\tau, x) dx - \int_{\mathbf{R}^d} \zeta_j^2(x) \varrho(\delta, x) \ln \varrho_k(\delta, x) dx \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^d} \zeta_j^2(x) \varrho_k(\delta, x) dx - \int_{\mathbf{R}^d} \zeta_j^2(x) \varrho_k(\tau, x) dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям в интеграле от

$$(A \nabla \varrho, \nabla \zeta_j) \zeta_j \ln \varrho_k = (\nabla \varrho, \zeta_j A \nabla \zeta_j) \ln \varrho_k$$

и записывая $(b_0, \nabla \varrho) = (A^{-1/2} b_0, A^{1/2} \nabla \varrho)$, находим

$$\begin{aligned} S_{j,k,\delta} &= 2 \int_{\delta}^{\tau} \int_{\Omega_k} \left(\frac{\nabla \varrho}{\varrho}, A \nabla \zeta_j \right) \zeta_j \varrho dx dt + 2 \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} \operatorname{div}(\zeta_j A \nabla \zeta_j) (\ln \varrho_k) \varrho dx dt \\ &\quad + \int_{\delta}^{\tau} \int_{\Omega_k} \left(b_0, \frac{\nabla \varrho}{\varrho} \right) \zeta_j^2 \varrho dx dt + 2 \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} (b_0, \nabla \zeta_j) \zeta_j (\ln \varrho_k) \varrho dx dt \\ &\quad - E(j, k, \delta) \leq \sqrt{S_{j,k,\delta}} \left(2 \|I_{\Omega_k} \sqrt{A} \nabla \zeta_j\|_{L^2(\mu)} + \|A^{-1/2} b_0\|_{L^2(\mu)} \right) \\ &\quad + R_{j,k,\delta} - E(j, k, \delta), \end{aligned} \tag{2.14}$$

где

$$R_{j,k,\delta} := 2 \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} \operatorname{div}(\zeta_j A \nabla \zeta_j) (\ln \varrho_k) \varrho \, dx \, dt \\ + 2 \int_{\delta}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} (b_0, \nabla \zeta_j) \zeta_j (\ln \varrho_k) \varrho \, dx \, dt.$$

Поскольку функция ϱ_0 гёльдерова на B_{2j} , имеем $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varrho(\delta, x) = \varrho(0, x)$ равномерно по B_{2j} (см., например, теоремы 7.1 и 10.1 в гл. III в [16]). Значит, $\lim_{\delta \rightarrow 0} E(j, k, \delta) = E(j, k, 0)$. Следовательно, (2.14) выполнено для $\delta = 0$. Сохраняя k фиксированным, заметим, что для заданного $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших чисел j вида $j = r_l$ с числами $r_l \rightarrow \infty$, выбранными согласно (2.13), величина $R_{j,k,\delta}$ может быть сделана меньше ε по модулю. В самом деле, из предположений и оценок

$$\sup_x |\nabla \zeta_j(x)| \leq j^{-1} \sup_x |\nabla \zeta(x)|, \quad \sup_x |\partial_{x_i} \partial_{x_m} \zeta_j(x)| \leq j^{-2} \sup_x |\partial_{x_i} \partial_{x_m} \zeta(x)|$$

вытекает, что для всех $j = r_l$ первый член в выражении для $R_{j,k,\delta}$ может быть оценен через

$$M \|\ln \varrho_k\|_{L^2(\mu)} r_l^{-2} \left(\int_0^1 \int_{\{r_l \leq |x| \leq 2r_l\}} \|A(t, x)\|^2 \mu_t(dx) \, dt \right)^{1/2} \\ + M \|\ln \varrho_k\|_{L^2(\mu)} r_l^{-1} \left(\int_0^1 \int_{\{r_l \leq |x| \leq 2r_l\}} \Theta_A(t, x)^2 \mu_t(dx) \, dt \right)^{1/2},$$

где M — постоянная, зависящая от максимума первых и вторых производных ζ . Тот факт, что $\ln \varrho_k \in L^2(\mu)$, вытекает из μ -интегрируемости $|\ln(|x| + 1)|^2$, так как на множестве $\{x: \varrho(t, x) \leq 1\}$ имеем $|\ln \varrho(t, x)|^2 \sqrt{\varrho(t, x)} \leq C$ и потому

$$|\ln \varrho(t, x)|^2 \varrho(t, x) \leq (2d + 2)^2 (\ln(|x| + 1))^2 \varrho(t, x) + C(|x| + 1)^{-d-1}.$$

Аналогично, ввиду неравенства Коши и оценки

$$|b(t, x)| \leq \|A^{1/2}(t, x)\| \|A^{-1/2}(t, x) b(t, x)\|,$$

второй член в выражении для $R_{j,k,\delta}$ мажорируется величиной

$$M r_l^{-1} \|A^{-1/2} b\|_{L^2(\mu)} \|\ln \varrho_k\|_{L^4(\mu)}^2 \left(\int_0^1 \int_{r_l \leq |x| \leq 2r_l} \|A(t, x)\|^2 \mu_t(dx) \, dt \right)^{1/2}.$$

Величины $E(j, k, 0)$ ограничены снизу постоянной, не зависящей от j и k , ибо мы рассматриваем такие τ , что $\varrho(\tau, \cdot) \ln \varrho(\tau, \cdot) \in L^1(\mathbf{R}^d)$, причем $\varrho(0, \cdot) \ln \varrho(0, \cdot) \in L^1(\mathbf{R}^d)$ по условию. Это означает, что интегралы от $|\sqrt{A} \nabla \varrho / \varrho|^2$ по множествам Ω_k относительно μ равномерно ограничены. Полагая $k \rightarrow \infty$, а затем $j \rightarrow \infty$, мы заключаем, что функция $|\sqrt{A} \nabla \varrho|^2 \varrho^{-1}$ интегрируема по $[0, \tau] \times \mathbf{R}^d$. Кроме того, ввиду (2.14) для ее интеграла S выполнено неравенство $S \leq \sqrt{S} \|A^{-1/2} b_0\|_{L^2(\mu)} + E$,

где E — разность энтропий $\varrho(0, \cdot)$ и $\varrho(\tau, \cdot)$. Это дает желаемую оценку. Теорема 2.2 доказана.

З а м е ч а н и е (2.2) Если A равномерно ограничено, то предположение, что $\Lambda \in L^4(\mu)$ во второй теореме, можно ослабить до включения $\Lambda \in L^2(\mu)$.

3. Более высокая интегрируемость и ограниченность плотностей

Результаты предыдущего раздела показывают, что решения глобально интегрируемы в некоторой степени больше 1. Здесь мы выведем еще более сильные свойства интегрируемости, а также глобальной ограниченности при дополнительных предположениях о коэффициентах. Ниже мы считаем, что мера μ задана плотностью ϱ , причем при каждом $t \in [0, 1]$ функция $x \mapsto \varrho(t, x)$ является вероятностной плотностью относительно меры Лебега.

Положим $\|u\|_{p,q,\tau} = \|uI_{[0,\tau]}\|_{p,q}$, где $t \rightarrow I_{[0,\tau]}(t)$ — индикатор отрезка $[0, \tau]$.

Лемма 3.1. Пусть $d > 2$. Для всякой функции $u \in \mathbf{H}^{2,2}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d) \cap L^{2,\infty}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{p,q,\tau} \leq c(d, p)(\|\nabla u\|_{L^2([0,\tau] \times \mathbf{R}^d)} + \|u\|_{2,\infty,\tau}),$$

где $2 \leq q$, $2 < p \leq 2d/(d-2)$, $1/q + d/(2p) = d/4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta = d/2 - d/p = 2/q$. Тогда

$$\frac{(d-2)\delta}{2d} + \frac{1-\delta}{2} = \frac{1}{p}.$$

Пусть $r = 2d(p\delta(d-2))^{-1}$. Тогда $r \geq 1$ ($r > 1$ при $p < 2d/(d-2)$) и $r' = r(r-1)^{-1} = 2(p(1-\delta))^{-1}$. Записав $|u|^p = |u|^{p\delta}|u|^{p(1-\delta)}$ и применив неравенство Гёльдера с r и r' , получим

$$\left(\int_{\mathbf{R}^d} |u|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} |u|^{2d/(d-2)} dx\right)^{(d-2)\delta/d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |u|^2 dx\right)^{(1-\delta)/2}.$$

Неравенство Соболева дает

$$\|u(t, \cdot)\|_p \leq c(d, p) \|\nabla u(t, \cdot)\|_2^\delta \|u(t, \cdot)\|_2^{1-\delta}.$$

Следовательно, для почти всех $t \in [0, \tau]$ имеем

$$\|u(t, \cdot)\|_p \leq c(d, p)(\|\nabla u(t, \cdot)\|_2)^\delta (\|u\|_{2,\infty,\tau})^{1-\delta}.$$

Поскольку $\delta = 2/q$, то

$$\left(\int_0^\tau \|u(t, \cdot)\|_p^q dt\right)^{1/q} \leq c(d, p) \left(\int_0^\tau \|\nabla u(t, \cdot)\|_2^2 dt\right)^{1/q} (\|u\|_{2,\infty,\tau})^{1-2/q}.$$

В силу неравенства Юнга получаем требуемую оценку. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Предположим, что выполнено условие (i) теоремы 2.1, причем дополнительно имеем*

$$\sup_{t \in [0,1]} \|b(t, \cdot)\|_{L^s(\mu_t)} < \infty, \quad \varrho \in L^{ks/(s-2)+1, k+(s-2)/s}([0, T] \times \mathbf{R}^d) \quad (3.1)$$

с некоторыми $T \in [0, 1]$, $s > 2$, $k \geq 2/s$. Кроме того, пусть $\mu_0 = \varrho(0, \cdot) dx$, где $\varrho(0, \cdot) \in L^{k+1}(\mathbf{R}^d)$. Тогда для почти всех $\tau \in [0, T]$ имеем $\varrho(\tau, \cdot) \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ и

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\alpha k(k+1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(\tau, x)^{k+1} dx + \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho(t, x)|^2 \varrho(t, x)^{k-1} dx dt \\ & \leq C(\alpha, \lambda, d, s) \int_0^\tau \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho(t, x)^{ks/(s-2)+1} dx \right)^{(s-2)/s} dt \\ & \quad + \frac{2}{\alpha k(k+1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где α — константа из условия $A(t, x) \geq \alpha \cdot I$, а $C(\alpha, \lambda, d, s)$ — некоторое число, зависящее только от α, λ, d, s .

Если же вместо (3.1) выполнено условие

$$|b| \in L^s(\mu), \quad \varrho \in L^{ks/(s-2)+1}([0, T] \times \mathbf{R}^d), \quad (3.3)$$

где $s > 2$, $k > 0$, то для почти всех $\tau \in [0, T]$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\alpha k(k+1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(\tau, x)^{k+1} dx + \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho(t, x)|^2 \varrho(t, x)^{k-1} dx dt \\ & \leq C(\alpha, \lambda, d, s) \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(t, x)^{ks/(s-2)+1} dx dt \right)^{(s-2)/s} \\ & \quad + \frac{2}{\alpha k(k+1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Доказательство. Пусть ϱ_ε — те же самые, что и в теореме 2.1, в частности $\varepsilon \in \{1/n\}$. В силу (2.3) имеем

$$\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t(\varrho * w_\varepsilon) \varphi dx dt = \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \left[(a^{ij} \varrho) * \partial_{x_i} \partial_{x_j} w_\varepsilon - (b^i \varrho) * \partial_{x_i} w_\varepsilon \right] \varphi dx dt$$

для всякой ограниченной измеримой функции φ на $[0, 1] \times \mathbf{R}^d$, ибо указанные свертки интегрируемы. Возьмем $\varphi(t, x) := \varrho_\varepsilon(t, x)^k$. Заметим, что

$$[(a^{ij} \varrho) * \partial_{x_j} w_\varepsilon - (b^i \varrho) * w_\varepsilon] \varrho_\varepsilon^{k-1} \partial_{x_i} \varrho_\varepsilon \in L^1([0, 1] \times \mathbf{R}^d).$$

Действительно, функция ϱ_ε^k ограничена, а функции

$$[(a^{ij} \varrho) * \partial_{x_j} w_\varepsilon - (b^i \varrho) * w_\varepsilon] \varrho_\varepsilon^{-1/2}, \quad |\nabla \varrho_\varepsilon| \varrho_\varepsilon^{-1/2}$$

входят в $L^2([0, 1] \times \mathbf{R}^d)$, как уже отмечалось в доказательстве теоремы 2.1. Следовательно, мы можем проинтегрировать по частям, что

дает

$$\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t (\varrho * w_\varepsilon) \varrho_\varepsilon^k dx dt = - \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} [(a^{ij} \varrho) * \partial_{x_j} w_\varepsilon - (b^i \varrho) * w_\varepsilon] k \varrho_\varepsilon^{k-1} \partial_{x_i} \varrho_\varepsilon dx dt. \quad (3.5)$$

Обозначим левую часть этого равенства через L_ε . Тогда

$$L_\varepsilon = \frac{1}{k+1} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(\tau, x)^{k+1} dx - \frac{1}{k+1} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(0, x)^{k+1} dx.$$

Отметим, что интегрируемость $\varrho_\varepsilon(\tau, x)^{k+1}$ по x следует из ограниченности этой функции и интегрируемости при $k=0$. Используя неравенство Гёльдера, оценим L_ε снизу следующим образом:

$$L_\varepsilon \geq \frac{1}{k+1} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(\tau, x)^{k+1} dx - \frac{1}{k+1} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx.$$

Рассмотрим правую часть R_ε равенства (3.5). Используя равенство (2.9), получаем

$$\begin{aligned} R_\varepsilon = & -k \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} a^{ij} \partial_{x_j} \varrho_\varepsilon \partial_{x_i} \varrho_\varepsilon \varrho_\varepsilon^{k-1} dx dt \\ & -k \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \left(\partial_{x_i} \varrho_\varepsilon(t, x) \varrho_\varepsilon(t, x)^{k-1} \int_{\mathbf{R}^d} \partial_{x_j} w_\varepsilon(x-y) [a^{ij}(t, y) - a^{ij}(t, x)] \right. \\ & \quad \left. \times \varrho(t, y) dy \right) dx dt \\ & + k \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon \partial_{x_i} \varrho_\varepsilon \varrho_\varepsilon^{k-1} [(b^i \varrho) * w_\varepsilon] dx dt. \end{aligned}$$

Значит, в силу (2.10) (напомним, что при выводе (2.10) не использовалась μ -интегрируемость $|\ln(1+|x|)|^2$ и существование энтропии μ_0) имеем

$$\begin{aligned} R_\varepsilon \leq & -k\alpha \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho_\varepsilon|^2 \varrho_\varepsilon^{k-1} dx dt + kd^{3/2} \lambda \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho_\varepsilon|^2 \varrho_\varepsilon^{k-1} dx dt \right)^{1/2} \\ & \times \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon^{k-1} (\varrho * q_\varepsilon)^2 dx dt \right)^{1/2} + k \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho_\varepsilon|^2 \varrho_\varepsilon^{k-1} dx dt \right)^{1/2} \\ & \times \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon^{k-1} \sum_{i=1}^d [(b^i \varrho) * w_\varepsilon]^2 dx dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где q_ε — те же, что и в (2.10). Ввиду неравенства $ab \leq \alpha a^2/4 + b^2/\alpha$ получаем оценку

$$\begin{aligned} R_\varepsilon \leq & -\frac{1}{2} k\alpha \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho_\varepsilon|^2 \varrho_\varepsilon^{k-1} dx dt + \frac{kd^3 \lambda^2}{\alpha} \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon^{k-1} (\varrho * q_\varepsilon)^2 dx dt \\ & + \frac{k}{\alpha} \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon^{k-1} \sum_{i=1}^d [(b^i \varrho) * w_\varepsilon]^2 dx dt. \end{aligned}$$

Соединяя оценки на L_ε и R_ε , приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\alpha k(k+1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(\tau, x)^{k+1} dx + \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho_\varepsilon|^2 \varrho_\varepsilon^{k-1} dx dt \\ & \leq C(\alpha, \lambda, d) \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon^{k-1} (\varrho * q_\varepsilon)^2 dx dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon^{k-1} \sum_{i=1}^d [(b^i \varrho) * w_\varepsilon]^2 dx dt \right) \\ & \quad + \frac{2}{\alpha k(k+1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx. \end{aligned}$$

Заметим, что $|(b^i \varrho) * w_\varepsilon|^2 \leq \varrho_\varepsilon(|b^i|^2 \varrho) * w_\varepsilon$. По неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon^{k-1} |(b^i \varrho) * w_\varepsilon|^2(t, x) dx \leq \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon^k (|b^i|^2 \varrho) * w_\varepsilon(t, x) dx \\ & = \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(t, x)^k w_\varepsilon(x - y) dx \right) |b^i(t, y)|^2 \varrho(t, y) dy \\ & \leq \| (b^i(t, \cdot))^2 \|_{L^{s/2}(\mu_t)} \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(t, x)^k w_\varepsilon(x - y) dx \right)^{s/(s-2)} \right. \\ & \quad \left. \times \varrho(t, y) dy \right)^{(s-2)/s} \\ & \leq \| b^i(t, \cdot) \|_{L^s(\mu_t)}^2 \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(t, x)^{k(s-2)/s} w_\varepsilon(x - y) dx \right) \varrho(t, y) dy \Big)^{(s-2)/s} \\ & = \| b^i(t, \cdot) \|_{L^s(\mu_t)}^2 \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(t, x)^{ks/(s-2)+1} dx \right)^{(s-2)/s}. \end{aligned}$$

Аналогично с учетом оценки

$$|\varrho * q_\varepsilon(t, x)|^2 \leq \varrho_\varepsilon(t, x) \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(t, y) \frac{|x - y|^4}{\varepsilon^4} w_\varepsilon(x - y) dy$$

получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon^{k-1} (\varrho * q_\varepsilon)^2(t, x) dx \leq \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(t, x)^k \varrho(t, y) \frac{|x - y|^4}{\varepsilon^4} w_\varepsilon(x - y) dx dy \\ & \leq \gamma(s) \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(t, y) \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(t, x)^{ks/(s-2)} w_\varepsilon(x - y) dx \right)^{s/(s-2)} dy \\ & \leq \gamma(s) \left(\int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(t, y) \varrho_\varepsilon(t, x)^{ks/(s-2)} w_\varepsilon(x - y) dx dy \right)^{s/(s-2)} \\ & = \gamma(s) \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(t, x)^{ks/(s-2)+1} dx \right)^{(s-2)/s}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma(s) := \left(\int_{\mathbf{R}^n} |x|^{2s} g(x) dx \right)^{2/s}.$$

Положим

$$B(s) := \max_{t \in [0,1]} \|b(t, \cdot)\|_{L^s(\mu_t)}^2.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\alpha k(k+1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(\tau, x)^{k+1} dx + \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho_\varepsilon|^2 \varrho_\varepsilon^{k-1} dx dt \\ & \leq C(\alpha, \lambda, d)(\gamma(s) + B(s)) \int_0^\tau \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(t, x)^{ks/(s-2)+1} dx \right)^{(s-2)/s} dt \\ & \quad + \frac{2}{\alpha k(k+1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем искомую оценку для почти всякого $\tau \in [0, T]$. Действительно, для почти всякого τ имеем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varrho_\varepsilon(\tau, x) = \varrho(\tau, x)$ для почти всех x , а правая часть неравенства выше остается ограниченной при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из этого следует, что $\varrho(\tau, \cdot) \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ при почти всех τ . Поэтому $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla \varrho_\varepsilon(\tau, x) = \nabla \varrho(\tau, x)$ для почти всех x , что по теореме Фату дает указанную оценку.

В случае условия (3.3) доказательство полностью повторяет предыдущие рассуждения за исключением оценки интеграла от $\varrho_\varepsilon^{k-1} |(b^i \varrho) * w_\varepsilon|^2$, для которого имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon^{k-1} |(b^i \varrho) * w_\varepsilon|^2 dx dt \leq \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon^k (|b^i|^2 \varrho) * w_\varepsilon dx dt \\ & = \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(t, x)^k w_\varepsilon(x-y) dx \right) |b^i(t, y)|^2 \varrho(t, y) dy dt \\ & \leq \| (b^i)^2 \|_{L^{s/2}(\mu)} \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(t, x)^k w_\varepsilon(x-y) dx \right)^{s/(s-2)} \right. \\ & \quad \left. \times \varrho(t, y) dy dt \right)^{(s-2)/s} \\ & \leq \|b\|_{L^s(\mu)}^2 \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(t, x)^{ks/(s-2)+1} dx dt \right)^{(s-2)/s} \end{aligned}$$

по неравенству Гёльдера. Лемма 3.2 доказана.

З а м е ч а н и е 3.1. Из доказательства видно, что условие равенства единице интегралов от $\varrho(t, x)$ по x можно заменить на условие равномерной ограниченности этих интегралов.

Теорема 3.1. Пусть при предположениях теоремы 2.1 мы дополнительно имеем

$$\sup_{t \in [0,1]} \|b(t, \cdot)\|_{L^d(\mu_t)} < \infty$$

и $\mu_0 = \varrho(0, \cdot) dx$, где $\varrho(0, \cdot) \in L^p(\mathbf{R}^d)$ при всех $p \in [1, +\infty)$. Тогда $\varrho \in L^{p,q}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ для всех $p, q \in [1, +\infty)$ и $\tau \in (0, 1)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $d > 2$. Пусть $\varrho \in L^{ks/(s-2)+1, k+(s-2)/s}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$, где $k \geq 2/s$ и $s > 2$. Тогда в силу неравенства (3.2) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho(t, x)|^2 \varrho(t, x)^{k-1} dx dt \\ & \leq C(\alpha, \lambda, d, s) \int_0^\tau \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho(t, x)^{ks/(s-2)+1} dx \right)^{(s-2)/s} dt \\ & \quad + \frac{2}{\alpha k(k+1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx. \end{aligned}$$

По теореме вложения Соболева, применяемой к функциям $x \mapsto \varrho(t, x)^{(k+1)/2}$ с

$$|\nabla \varrho^{(k+1)/2}|^2 = \frac{(k+1)^2}{4} |\varrho^{(k-1)/2} \nabla \varrho|^2,$$

имеем

$$\begin{aligned} & \frac{4}{(k+1)^2} \int_0^\tau \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho(t, x)^{d(k+1)/(d-2)} dx \right)^{(d-2)/d} dt \\ & \leq \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho(t, x)|^2 \varrho(t, x)^{k-1} dx dt \\ & \leq \tilde{C}(\alpha, \lambda, d, s) \int_0^\tau \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho(t, x)^{ks/(s-2)+1} dx \right)^{(s-2)/s} dt \\ & \quad + \frac{2}{\alpha k(k+1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & (\|\varrho\|_{d(k+1)/(d-2), k+1, \tau})^{k+1} \\ & \leq C(\alpha, \lambda, d, s, k) (\|\varrho\|_{ks/(s-2)+1, k+(s-2)/s, \tau})^{k+(s-2)/s} + M(k, \alpha), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$M(k, \alpha) := \frac{k+1}{2\alpha k} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx.$$

Теперь положим

$$p_n := p_{n-1} + \frac{2}{d-2}, \quad q_n := q_{n-1} + \frac{2}{d}, \quad q_1 = 1, \quad p_1 = \frac{d}{d-2}.$$

По теореме 2.1 имеем $\varrho \in L^{p_1, 1}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ при всех $\tau < 1$. Это дает возможность начать итерации с помощью (3.6). А именно, если в (3.6) положить $s = d$ и $k = q_{n-1} - (d-2)/d = q_n - 1$, то придем к оценке

$$(\|\varrho\|_{p_n, q_n, \tau})^{q_n} \leq C(\alpha, \lambda, d, d, q_n - 1) (\|\varrho\|_{p_{n-1}, q_{n-1}, \tau})^{q_{n-1}} + M(q_n - 1, \alpha).$$

Так как $p_n \rightarrow \infty$ и $q_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то теорема доказана при $d > 2$. Случаи $d = 1$ и $d = 2$ даже проще, поскольку в неравенстве Соболева

вместо показателя $d/(d-2)$ можно брать любое число $r > 1$. Однако эти случаи можно не рассматривать отдельно, а вывести из результата для $d = 3$. Для этого от функции двух переменных можно перейти к функции трех переменных $u = \varrho(t, x_1, x_2)g(x_3)$, где g — стандартная гауссовская плотность. Мера $u dx dt$ удовлетворяет нашему уравнению на $[0, 1] \times \mathbf{R}^3$ с коэффициентами a^{ij} и b^i , совпадающими с прежними при $i, j \leq 2$, причем $a^{33} = 1$, $a^{3j} = a^{j3} = 0$, $b^3(t, x) = -x_3$. Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. *Предположим, что при условиях теоремы 2.1 для некоторого числа $\beta > d + 2$ мы имеем $|b| \in L^\beta(\mu)$ и $\varrho(0, \cdot) \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$. Пусть либо*

$$\sup_{t \in [0, 1]} \|b(t, \cdot)\|_{L^d(\mu_t)} < \infty,$$

либо $\varrho \in L^p([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ при всех $\tau < 1$ и некотором $p > 1$. Тогда $\varrho \in L^\infty([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ для всякого $\tau < 1$.

Доказательство. Пусть $d > 2$. Зафиксируем $\tau < 1$. Пусть $\varrho \in L^{k\beta/(\beta-2)+1}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$, где $k > 0$. Тогда в силу (3.4) получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho(t, x)|^2 \varrho(t, x)^{k-1} dx dt \\ & \leq C(\alpha, \lambda, d, \beta) \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(t, x)^{k\beta/(\beta-2)+1} dx dt \right)^{(\beta-2)/\beta} \\ & \quad + \frac{2}{\alpha k(k+1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{4}{(k+1)^2} (\|\nabla(\varrho^{(k+1)/2})\|_{L^2([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)})^2 \\ & \leq C(\alpha, \lambda, d, \beta) \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(t, x)^{k\beta/(\beta-2)+1} dx dt \right)^{(\beta-2)/\beta} \\ & \quad + \frac{2}{\alpha k(k+1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx. \end{aligned}$$

В силу неравенства (3.4) для почти всех $t < \tau$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(t, x)^{k+1} dx & \leq k(k+1) C(\alpha, \lambda, d, \beta) \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho^{k\beta/(\beta-2)+1} dx dt \right)^{(\beta-2)/\beta} \\ & \quad + \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} (\|\varrho^{(k+1)/2}\|_{2, \infty, \tau})^2 & \leq k(k+1) C(\alpha, \lambda, d, \beta) \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varrho^{k\beta/(\beta-2)+1} dx dt \right)^{(\beta-2)/\beta} \\ & \quad + \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx. \end{aligned}$$

Лемма 3.1 для $u = \varrho^{(k+1)/2}$ при $p = q = 2(d+2)/d$ дает оценку

$$\|\varrho^{(k+1)/2}\|_{p,q,\tau} \leq C\left(d, \frac{2(d+2)}{d}\right) \left(\|\nabla(\varrho^{(k+1)/2})\|_{L^2([0,\tau] \times \mathbf{R}^d)} + \|\varrho^{(k+1)/2}\|_{2,\infty,\tau}\right).$$

Используя неравенство $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ и найденные выше оценки, получаем

$$\begin{aligned} & (\|\varrho\|_{L^{(d+2)(k+1)/d}([0,\tau] \times \mathbf{R}^d)})^{k+1} \\ & \leq 4(k+1)^2 C(\alpha, \lambda, d, \beta) (\|\varrho\|_{L^{k\beta/(\beta-2)+1}([0,\tau] \times \mathbf{R}^d)})^{k+(\beta-2)/\beta} \\ & \quad + \left(2 + \frac{k+1}{\alpha k}\right) \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как $\varrho(0, \cdot) \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$, то существует такая константа C , что

$$\left(2 + \frac{k+1}{\alpha k}\right) \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(0, x)^{k+1} dx \leq C^{k+1} \quad \forall k \geq 1.$$

Теперь положим

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{(d+2)(\beta-2)}{d\beta} \left(p_{n-1} + \frac{2}{\beta-2}\right), \quad p_1 = \frac{d}{d-2}, \\ A_n &= \|\varrho\|_{L^{p_n}([0,\tau] \times \mathbf{R}^d)}, \quad C_1 = 4\left(\frac{d}{d+2}\right)^2 C(\alpha, \lambda, d, \beta). \end{aligned}$$

Мы имеем $\varrho \in L^{p_1}([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ в силу теоремы 3.1, если выполнено условие на $b(t, \cdot)$, а если $\rho \in L^p$ с $p > 1$, то это же выводится из (3.7). Заметим, что

$$1 < \frac{(d+2)(\beta-2)}{d\beta} \leq \frac{d}{d-2},$$

ибо $\beta > d+2$. Поэтому $p_n \geq ((d+2)\beta-2)/(d\beta))^n$. Для доказательства принадлежности ϱ к пространству $L^\infty([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ достаточно установить равномерную ограниченность $\{A_n\}$. Предположим, что $A_n \rightarrow \infty$. Тогда существует такое N , что для всякого $n > N$ имеем

$$\frac{C}{A_{n-1}} < 1, \quad (A_{n-1})^{-2/\beta} < 1, \quad \left(\frac{C}{A_{n-1}}\right)^{p_n d/(d+2)} < 1.$$

Пусть $k := p_n d/(d+2) - 1$. Тогда

$$p_{n-1} = \frac{k\beta}{\beta-2} + 1, \quad p_{n-1} \frac{\beta-2}{\beta} - p_n \frac{d}{d+2} = -\frac{2}{\beta}$$

и потому из (3.7) получаем

$$(A_n)^{p_n d/(d+2)} \leq p_n^2 C_1 (A_{n-1})^{p_{n-1}(\beta-2)/\beta} + C^{p_n d/(d+2)}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^{p_n d/(d+2)} \leq p_n^2 C_1 (A_{n-1})^{-2/\beta} + \left(\frac{C}{A_{n-1}}\right)^{p_n d/(d+2)} \leq p_n^2 C_1 + 1,$$

откуда получаем

$$\ln A_n - \ln A_{n-1} \leq \frac{d+2}{p_n d} \ln(p_n^2 C_1 + 1), \quad n > N.$$

Поскольку $p_n \geq ((d+2)(\beta-2)/(d\beta))^n$, то полученная выше оценка дает сходимость ряда из $\ln A_n - \ln A_{n-1}$, что противоречит неограниченности A_n . Случай $d \leq 2$ обосновывается так же, как и в предыдущей теореме. Теорема 3.2 доказана.

З а м е ч а н и е 3.2. (i) Согласно сказанному в замечании 2.1, в теоремах 3.1 и 3.2 можно не требовать интегрируемости функции $\varrho(0, x) \ln \varrho(0, x)$, ибо интегрируемость $\varrho(0, x) \max(0, \ln \varrho(0, x))$ следует из включения $\varrho(0, \cdot) \in L^p(\mathbf{R}^d)$ с $p > 1$.

(ii) Из доказательства и замечания 3.1 видно, что в теоремах 3.1 и 3.2 условие равенства единице интегралов от $\varrho(t, x)$ по x можно заменить на условие равномерной ограниченности этих интегралов.

(iii) Отметим, что если в теореме 3.2 заранее дано, что $\varrho \in L^p([0, \tau] \times \mathbf{R}^d)$ при некотором $p > 1$, то можно не требовать интегрируемости функции $|\ln(1 + |x|)|^2 \varrho(t, x)$, но ограниченность $\varrho(0, x)$ важна.

Теперь мы воспользуемся доказанной теоремой для получения оценок сверху для ϱ . Как и в эллиптическом случае, рассмотренном в работах [8]–[10], идея такова: чтобы получить поточечную оценку $\varrho(t, x) \leq \Phi(t, x)^{-1}$, надо рассмотреть меру $\nu := \Phi \cdot \mu$ и установить ограниченность ее плотности. Мы будем рассматривать функции Φ , не зависящие от t . Если Φ имеет локально ограниченные производные первого и второго порядка, то мера ν удовлетворяет уравнению

$$L^* \nu = (a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \Phi) \varrho + 2 \partial_{x_i} \Phi \partial_{x_j} (a^{ij} \varrho) - b^i \partial_{x_i} \Phi \varrho = -L\Phi \cdot \varrho + 2 \partial_{x_j} (a^{ij} \partial_{x_i} \Phi \varrho),$$

понимаемому в том же смысле, что и (1.1).

Теорема 3.3. Пусть выполнены все предположения теоремы 3.2, и пусть задана такая функция $\Phi \geq c > 0$ на $\mathbf{R}^d$ с локально ограниченными производными второго порядка, что $\varrho(0, x) \leq C\Phi(x)^{-1}$, $\Phi \in L^1(\mu_0)$ и $\Phi^{1+\varepsilon}$, $|L\Phi|^{\beta/2} \Phi^{1-\beta/2}$, $|A\nabla\Phi|^{\beta} \Phi^{1-\beta} \in L^1(\mu)$,

$$\sup_{t \in [0, 1]} \int_{\mathbf{R}^d} \Phi(x) \varrho(t, x) dx < \infty$$

с некоторым $\varepsilon > 0$. Тогда для всякого $\tau < 1$ найдется такое число C_τ , что $\varrho(t, x) \leq C_\tau \Phi(x)^{-1}$ для почти всех $(t, x) \in [0, \tau] \times \mathbf{R}^d$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 3.2, и замечания 3.2 видно, что достаточно установить оценку (3.4) с $s = \beta$ для меры $\nu = \Phi \cdot \mu$, плотность которой входит в $L^{1+\varepsilon}([0, 1] \times \mathbf{R}^d)$ ввиду ограниченности ϱ . В этой оценке речь шла об однородном уравнении, причем меры μ_t были вероятностными. Однако

при наложенных условиях такая же оценка остается в силе и при наличии указанной выше правой части, если вместо условия $\mu_t(\mathbf{R}^d) = 1$ предполагать лишь равномерную ограниченность мер μ_t . Действительно, в правой части (3.5) с ν вместо μ , т.е. с $u := \Phi \varrho$ вместо ϱ , дополнительно появится интеграл от выражения

$$-(L\Phi \cdot \varrho) * w_\varepsilon[u * w_\varepsilon]^k + [2\partial_{x_j}(a^{ij}\partial_{x_i}\Phi\varrho)] * w_\varepsilon[u * w_\varepsilon]^k.$$

Положим $\xi := L\Phi/\Phi$, $\eta := |A\nabla\Phi|/\Phi$ и оценим этот интеграл J следующим образом:

$$\begin{aligned} J &= -\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} (\xi u)_\varepsilon u_\varepsilon^k dx dt - 2k \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} (a^{ij}\partial_{x_i}\Phi\varrho)_\varepsilon u_\varepsilon^{k-1} \partial_{x_j} u_\varepsilon dx dt \\ &\leq \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\xi|^{\beta/2} u dx dt \right)^{2/\beta} \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} u_\varepsilon^{k\beta/(\beta-2)+1} dx dt \right)^{(\beta-2)/\beta} \\ &\quad + 2k \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} (\eta u)_\varepsilon^2 u_\varepsilon^{k-1} dx dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u_\varepsilon|^2 u_\varepsilon^{k-1} dx dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Остается заметить, что имеет место равенство

$$\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |\xi|^{\beta/2} u dx dt = \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} |L\Phi|^{\beta/2} \Phi^{1-\beta/2} \varrho dx dt$$

и неравенство

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} (\eta u)_\varepsilon^2 u_\varepsilon^{k-1} dx dt \\ &\leq \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \eta^\beta \Phi \varrho dx dt \right)^{2/\beta} \left(\int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^d} u_\varepsilon^{k\beta/(\beta-2)+1} dx dt \right)^{(\beta-2)/\beta}, \end{aligned}$$

что проверяется таким же образом, как и в лемме 3.2. Теорема 3.2 доказана.

Пример 3.1. Предположим, что A и A^{-1} равномерно ограничены, A равномерно липшицево по x , причем для некоторых $\beta > d + 2$, $r > 0$, $\varepsilon > 0$, $K > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |b| &\in L^\beta(\mu), \quad \exp[(2K + \varepsilon)|x|^r] \in L^1(\mu), \\ \sup_{t \in [0,1]} \int_{\mathbf{R}^d} \exp(K|x|^r) \varrho(t, x) dx &< \infty. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Пусть $\sup_{t \in [0,1]} \|b(t, \cdot)\|_{L^d(\mu_t)} < \infty$. Наконец, функция $\exp(K|x|^r) \varrho(0, x)$ ограничена и интегрируема по $\mathbf{R}^d$. Тогда для всякого $\tau < 1$ найдется такое число $C(\tau)$, что $\varrho(t, x) \leq C(\tau) \exp(-K|x|^r)$, $(t, x) \in [0, \tau] \times \mathbf{R}^d$. Для выполнения условия (3.8) и условий на b и $\varrho(0, \cdot)$ достаточно оценок $|b(t, x)| \leq C \exp(2K\beta^{-1}|x|^r)$, $\varrho(0, x) \leq C \exp(-K'|x|^r)$ с $K' > K$ и

$$(x, b(t, x)) \leq c_1 - c_2|x|^r, \quad c_2 > 2rK \sup_{t,x} \|A(t, x)\|. \quad (3.9)$$

Действительно, пусть $\Phi \in C^2(\mathbf{R}^d)$, $\Phi(x) = \exp(K|x|^r)$ при $|x| \geq 1$. Все условия теоремы 3.3 выполнены. При условии (3.9) выберем $\delta \in (0, \varepsilon)$ так, что выполнено неравенство $r(2K + \delta) \sup_{t,x} \|A(t, x)\| < c_2$, и возьмем какую-нибудь функцию $V \in C^2(\mathbf{R}^d)$, равную $\exp[(2K + \delta)|x|^r]$ при $|x| \geq 1$. Тогда при некотором c справедлива оценка $LV \leq c$. Из [1] следует существование решения и равномерная ограниченность норм $\|V\varrho(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^d)}$. Выполнены также остальные условия теоремы 3.3. Аналогично при более слабых условиях можно получить степенную оценку.

Аналогичные теоремы справедливы в ситуации теоремы 2.2.

Большая часть работы была выполнена во время визитов первого и третьего авторов в университет Билефельда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M. Existence of solutions to weak parabolic equations for measures. — Proc. London Math. Soc., 2004, v. 88, № 3, p. 753–774.
2. Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M. On solvability of weak parabolic equations for measures. — Preprint. Bielefeld: Research Center BiBoS, Bielefeld University, 2005.
3. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions. — Comm. Partial Differential Equations, 2001, v. 26, № 11–12, p. 2037–2080.
4. Stannat W. Time-dependent diffusion operators on L^1 . — Preprint SFB 343, № 00-080. Bielefeld: Univ. Bielefeld, 2000.
5. Bogachev V. I., Röckner M. Regularity of invariant measures on finite- and infinite-dimensional spaces and applications. — J. Funct. Anal., 1995, v. 133, № 1, p. 168–223.
6. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. Regularity of invariant measures: the case of non-constant diffusion part. — J. Funct. Anal., 1996, v. 138, № 1, p. 223–242.
7. Bogachev V. I., Röckner M., Wang F.-Y. Elliptic equations for invariant measures on finite and infinite dimensional manifolds. — J. Math. Pures Appl., 2001, v. 80, № 2, p. 177–221.
8. Metafune G., Pallara D., Rhandi A. Global regularity of invariant measures. — J. Funct. Anal., 2005, v. 223, № 2, p. 396–424.
9. Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М. Регулярность и глобальные оценки плотностей инвариантных мер диффузионных процессов. — Докл. РАН., 2005, т. 405, № 5 (в печати).
10. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. Elliptic equations for measures: regularity and global bounds of densities. — Preprint № 05-06-186, Bielefeld: Research Center BiBoS, Bielefeld University; J. Math. Pures Appl. (to appear).
11. Carlen E. A. Conservative diffusions. — Comm. Math. Phys., 1984, v. 94, № 3, p. 293–315.
12. Cattiaux P., Fradon M. Entropy, reversible diffusion processes, and Markov uniqueness. — J. Funct. Anal., 1996, v. 138, № 1, p. 243–272.
13. Cattiaux P., Léonard C. Minimization of the Kullback information of diffusion processes. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1994, v. 30, № 1, p. 83–132; correction: ibid., 1995, v. 31, № 4, p. 705–707.
14. Föllmer H. Random fields and diffusion processes. — Lecture Notes in Math., 1988, v. 1362, p. 101–203.
15. Nelson E. Quantum Fluctuations. Princeton: Princeton Univ. Press, 1985, 147 p.
16. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.

Поступила в редакцию
31.X.2005