Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Амосов, О марковских возмущениях квантовых случайных процессов со стационарными приращениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 4, 754–763

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:11:01

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2005 г.

АМОСОВ Г. Г.*

О МАРКОВСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ
КВАНТОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
СО СТАЦИОНАРНЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

В работе вводятся «марковские» коциклические возмущения квантовых случайных процессов со стационарными приращениями и порожденных ими колмогоровских потоков, характеризующиеся свойством локализации действия возмущения на алгебру событий прошлого. Марковские возмущения колмогоровского потока, порожденного квантовым белым шумом, приводят к группам автоморфизмов на алгебрах событий (алгебрах фон Неймана в квантовом случае), для которых можно выделить сужение, изоморфное исходному колмогоровскому потоку. Возможность выделить такое сужение можно интерпретировать как некоторый аналог (в квантовом случае) разложения Вольда, позволяющий получить «недетерминированную» часть процесса.

Ключевые слова и фразы: квантовый случайный процесс, коциклическое возмущение колмогоровского потока, разложение Вольда.

Введение

Квантовый случайный процесс (см. [6]–[8]) представляет собой сильно непрерывное семейство $x = (x_t)_{t \in \mathbf{R}}$ линейных (неограниченных, вообще говоря) операторов в гильбертовом пространстве. Соответственно, стационарный квантовый случайный процесс $x = (x_t)_{t \in \mathbf{R}}$ определяется условием $x_t = \alpha_t(x^0) + x^1$, $t \in \mathbf{R}$, где α и x^0 , x^1 — некоторая группа автоморфизмов и два фиксированных линейных оператора соответственно. Отметим, что $x_0 = x^0 + x^1$. Таким образом, чтобы добиться выполнения стандартного условия $x_0 = 0$, нужно положить $x^1 = -x^0$. Квантовым случайным процессом со стационарными приращениями естественно назвать непрерывную операторнозначную кривую, инвариантную относительно некоторой группы автоморфизмов α . Роль σ -алгебр событий, связанных со случайным процессом, в квантовой теории вероятностей играют алгебры фон Неймана, порожденные приращениями процесса x , т.е. ультраслабо замкнутые алгебры ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, коммутант которых (множество ограниченных операторов, коммутирующих с операторами алгебры) состоит из операторов, коммутирующих с приращениями процесса x (см., например, [7]–[9]). Любой классический случайный процесс ξ с элементами $\xi_t \in L^\infty(\Omega)$ можно считать также квантовым, в котором операторы $x_t = M_{\xi_t}$, составляющие процесс, являются операторами умножения на функцию ξ_t в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$.

* Московский физико-технический институт, Институтский пер., 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл., Россия; e-mail: gramos@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке INTAS (грант № 00-738).

Напомним, что поток $\{T_t, t \in \mathbf{R}\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ называется *колмогоровским потоком* (см. [10]), если существует такая σ -алгебра событий $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$, что $T_t \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_t$,

$$\mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t, \quad s < t, \quad (\text{K1})$$

$$\bigcup_t \mathcal{M}_t = \mathcal{M}, \quad (\text{K2})$$

$$\bigcap_t \mathcal{M}_t = \{\emptyset, \Omega\}. \quad (\text{K3})$$

В [11] понятие колмогоровского потока было перенесено в квантовую теорию вероятностей. При этом σ -алгебры событий $\mathcal{M}_t$ заменяются на алгебры фон Неймана. На практике в качестве $\mathcal{M}_t$ выступают алгебры событий, ассоциированных с «прошлым» некоторого (классического или квантового) случайного процесса ξ до момента времени t . Во избежание путаницы с терминологией, заметим, что в известной монографии [12], где исследованы условия на спектральную функцию процесса ξ , при которых он приводит к колмогоровскому потоку, используется термин «вполне недетерминированный процесс» для случайного процесса, порождающего колмогоровский поток, термин же «колмогоровский поток» не используется совсем. Любой классический или квантовый процесс с независимыми (в классическом смысле) приращениями порождает колмогоровский поток. Мы определяем «марковские» коциклические возмущения квантовых колмогоровских потоков, являющиеся обобщением для случая квантовых случайных процессов марковских возмущений, введенных в [1], таким образом, что в группе автоморфизмов, являющейся марковским возмущением колмогоровского потока, содержится часть, изоморфная исходному колмогоровскому потоку. Отметим, что в модельной ситуации гильбертова пространства $L^2(\mathbf{R})$, рассмотренной в [1], колмогоровскому потоку отвечает группа сдвигов. Следовательно, возможность выделить часть, являющуюся колмогоровским потоком, в квантовом случае можно рассматривать как некоторый аналог разложения Вольда, позволяющего сопоставить любому стационарному случайному процессу процесс с некоррелированными приращениями, который определяет «недетерминированную часть» исходного процесса как интеграл по некоррелированной мере (см. более подробное обсуждение классического разложения Вольда в [1]).

Для любого классического или квантового случайного процесса важную роль играет множество всех (необязательно линейных) функционалов от процесса. В частности, для винеровского процесса определено разложение Винера–Ито пространства L^2 -функционалов в ортогональную сумму, позволяющее эффективно решать стохастические дифференциальные уравнения (см. [13]). Отметим, что с точки зрения теории когомологий групп случайный процесс со стационарными приращениями, определяющий непрерывную кривую, инвариантную относительно группы преобразований U , является аддитивным $(1 - U)$ -коциклом (термин 1-коцикл означает однопараметрический коцикл, см. подробнее в [1]). Естественно рассмотреть кольцо когомологий всех размерностей, порожденное таким $(1 - U)$ -коциклом, которое можно интерпретировать как пространство всех (нелинейных) функционалов от исходного случайного процесса. Мы вводим «марковские» возмущения квантовых случайных процессов с независимыми приращениями, определяющие гомоморфизмы такого кольца когомологий.

Эта работа построена следующим образом. В разделе 1 приведены базовые сведения теории колмогоровских потоков в классической и квантовой теории вероятностей. В разделе 2 мы определяем кольца когомологий, порожденные аддитивными 1-коциклами, и показываем на примере винеровского процесса и квантовых белых шумов, что множество всех функционалов от квантового случайного процесса со стационарными приращениями можно рассматривать как кольцо когомологий группы сдвигов приращений процесса по времени. Кроме того, мы определяем марковское возмущение группы, приводящее к гомоморфизму для кольца когомологий этой группы. Отметим, что для квантовых случайных процессов $x = (x_t = \xi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ также возможно определить преобразования вида

$$\tilde{\xi}_t = W\xi_t + \eta, \quad (*)$$

введенные в [2], [3] для классических случайных процессов со стационарными приращениями, где в качестве W должен быть взят морфизм, а в качестве η — линейный оператор. В разделе 3 вводятся марковские коциклические возмущения квантовых белых шумов, являющихся обобщением классических процессов с независимыми стационарными приращениями для квантового случая, приводящие к преобразованиям вида $(*)$ квантовых случайных процессов, связанных с квантовым белым шумом. Причем эти марковские возмущения определяют гомоморфизмы кольца когомологий, соответствующего случайному процессу в смысле раздела 2. В разделе 3 вводятся марковские возмущения групп автоморфизмов и, в частности, колмогоровских потоков, порожденные марковскими коциклами. Развита в разделе 2 техника позволила получить в разделе 3 некоторый аналог классического разложения Вольда для групп автоморфизмов, являющихся марковскими возмущениями квантового колмогоровского потока, порожденного квантовым белым шумом. Установлено, что можно выделить часть группы, изоморфную исходному потоку, т.е. отвечающую за «недетерминированную» часть процесса.

1. Процессы с независимыми приращениями в классической и квантовой теории вероятностей. Колмогоровские потоки

Обозначим $\mathcal{L}_s(H)$ и $\sigma_1(H)$ множества линейных самосопряженных операторов и положительных операторов с единичным следом в гильбертовом пространстве H соответственно. В квантовой теории вероятностей элементы $x \in \mathcal{L}_s(H)$ называются случайными величинами или наблюдаемыми, а элементы $\rho \in \sigma_1(H)$ — состояниями системы. Рассмотрим спектральное разложение $x = \int \lambda dE_\lambda$ случайной величины $x \in \mathcal{L}_s(H)$, где E_λ есть ортогональное разложение единицы в H . Тогда распределение вероятностей x в состоянии $\rho \in \sigma_1(H)$ задается, по определению, формулой $P\{x < \lambda\} = \text{Tr}(\rho E_\lambda)$. Таким образом, математическое ожидание x в состоянии ρ задается как $E x = \text{Tr}(\rho x)$ (см. [7], [8]). Отметим, что классические случайные величины из $L^\infty(\Omega)$ можно рассматривать как линейные операторы умножения на функцию в гильбертовом пространстве $H = L^2(\Omega)$, где Ω — некоторое вероятностное пространство. Квантовым случайным процессом (в узком смысле слова) называется сильно непрерывное семейство операторов $x_t \in \mathcal{L}_s(H)$, $t \in \mathbf{R}$, — «квантовых наблюдаемых». Мы будем называть такой квантовый случайный процесс *процессом со стационарными приращениями*, если найдется ультраслабо непрерывная однопараметрическая группа, образующая $*$ -автоморфизмами α_t , $t \in \mathbf{R}$, алгебры всех ограниченных операторов в H , такая, что $x_{t+s} = x_t + \alpha_t(x_s)$, $s, t \in \mathbf{R}$. Мы не предполагаем ограниченность операторов x_t , а требуем, чтобы действие $\alpha = (\alpha_t)_{t \in \mathbf{R}}$ было корректно определено на $x = (x_t)_{t \in \mathbf{R}}$. Квантовый случайный процесс x_t со стационарными приращениями называется *стационарным*, если найдется такой $x \in \mathcal{L}_s(H)$, что $x_t = \alpha_t(x) - x$, $t \in \mathbf{R}$. Как и в случае классических случайных процессов, квантовый случайный процесс, непрерывный в среднем квадратичном, определяет непрерывную кривую в гильбертовом пространстве со скалярным произведением, задаваемым математическим ожиданием. Эту кривую мы будем обозначать $[x] = ([x_t])_{t \in \mathbf{R}}$. Поскольку мы отождествили непрерывные кривые в гильбертовом пространстве с классическими случайными процессами, мы получаем, что каждому квантовому случайному процессу x может быть сопоставлен классический случайный процесс $\xi = [x]$. В случае, если x является процессом со стационарными приращениями или стационарным процессом и состояние $\rho \in \sigma_1(H)$ инвариантно относительно действия группы α , т.е. $\text{Tr}(\rho \alpha_t(a)) = \text{Tr}(\rho a)$, $t \in \mathbf{R}$, где a является произвольной линейной комбинацией случайных величин x_t , $t \in \mathbf{R}$, случайный процесс $\xi = [x]$ также является стационарным. Группа унитарных операторов U , сдвигающая приращения ξ по времени, определяется формулой

$$(U_t \xi_s, \xi_r) = \text{Tr}(\rho \alpha_t(x_s) x_r), \quad s, t, r \in \mathbf{R}.$$

В связи с тем, что в квантовой теории вероятностей понятие математического ожидания начинает играть главную роль, мы воспользуемся этим понятием для определения независимости также в классической теории вероятностей, для удобства дальнейшего перехода к квантовой теории вероятностей. Классический случайный процесс

$x = (x_t)_{t \in \mathbf{R}}$ называется процессом с независимыми приращениями или процессом Леви, если справедливо следующее тождество:

$$\mathbf{E}(\varphi_1(x_{t_1} - x_{s_1}) \varphi_2(x_{t_2} - x_{s_2}) \cdots \varphi_n(x_{t_n} - x_{s_n})) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E} \varphi_i(x_{t_i} - x_{s_i}) \quad (I1)$$

для любого выбора функций $\varphi_i \in L^\infty$ и непересекающихся интервалов (s_i, t_i) . Существуют разные подходы к определению процессов Леви в квантовой теории вероятностей (см. [7], [8]). В любом случае кроме условия (I1) предполагается выполнение некоторых дополнительных условий, касающихся алгебраической структуры процесса x . Одним из возможных условий является коммутативность приращений

$$[x_{t_1} - x_{s_1}, x_{t_2} - x_{s_2}] = 0 \quad (I2)$$

для непересекающихся интервалов (s_i, t_i) . Отметим, что для квантовых процессов с независимыми приращениями справедливо представление типа Леви–Хинчина (см. [16], [17]). Пусть $\mathcal{M}_t$ порождается событиями, связанными со стационарным случайным процессом ξ_s , $s < t$. Исследование условий, при которых ξ порождает колмогоровский поток (см. условия (K1), (K2), (K3) во введении), содержится в [12]. В частности, поток винеровского процесса является колмогоровским потоком (см. [13]). Заметим, что для того, чтобы случайный процесс порождал колмогоровский поток, совсем не обязательно требовать независимости приращений. Рассмотрим квантовый случайный процесс $x = (x_t)_{t \in \mathbf{R}}$ со стационарными приращениями. В квантовой теории вероятностей роль σ -алгебр событий играют алгебры фон Неймана, порожденные квантовыми случайными величинами. Соответственно условными математическими ожиданиями называются вполне положительные проекторы с большей алгебры фон Неймана на меньшую (см. [7], [8]). Пусть $\mathcal{M}_t = \{x_s, s < t\}$ и $\mathcal{M}_t = \{x_s, s > t\}$ суть алгебры фон Неймана, порожденные прошлым до момента времени t и будущим после момента времени t квантового случайного процесса x со стационарными приращениями. Здесь A' обозначает множество всех ограниченных операторов в H , коммутирующих с операторами (вообще говоря, неограниченными) из множества A . Из стационарности приращений процесса x следует, что $\mathcal{M}_t = \alpha_t(\mathcal{M}_0)$, $t \in \mathbf{R}$, для группы α , сдвигающей приращения процесса. Группу автоморфизмов α естественно назвать *колмогоровским потоком* на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, если выполнены условия (K1), (K2), (K3), где в условии (K3) тривиальная σ -алгебра $\{\emptyset, \Omega\}$ заменена на тривиальную алгебру фон Неймана $\{C1\}$, содержащую только операторы, кратные единичному. Таким образом мы получаем определение алгебраического (квантового) колмогоровского потока α (см. [11]).

Для классических случайных величин ξ с $\mathbf{E}\xi = 0$ условие $\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 = 0$ означает равенство ξ нулю почти наверное. Ситуация изменяется при переходе к квантовому случаю. Для квантовой случайной величины x с $\mathbf{E}x = 0$ равенство $\mathbf{D}x = \mathbf{E}x^2 = \text{Tr}(\rho x^2) = 0$ не обязательно влечет $x = 0$. Подобное свойство характеризует математическое ожидание $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\rho$. Если такая ситуация осуществляется, т.е. $\text{Tr}(\rho x) = 0$ влечет $x = 0$ для любого положительного оператора x из некоторой алгебры $\mathcal{M}$, говорят, что ρ задает точное состояние $\mathbf{E}(\cdot) = \text{Tr}(\rho \cdot)$ на $\mathcal{M}$.

Предложение 1.1. Пусть математическое ожидание $\mathbf{E}(\cdot) = \text{Tr}(\rho \cdot)$ задает точное состояние алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, порожденной (стационарными) приращениями квантового случайного процесса, удовлетворяющими условию (I1). Тогда группа автоморфизмов α , сдвигающая приращения по времени, является колмогоровским потоком.

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap_t \mathcal{M}_t$, тогда для любого $y \in \bigcup_t \mathcal{M}_t = \mathcal{M}$ условие (I1) влечет

$$\mathbf{E}((x - \mathbf{E}x)y) = \mathbf{E}(x - \mathbf{E}x)\mathbf{E}y = 0 = \text{Tr}(\rho(x - \mathbf{E}x)y).$$

Положим $y = x - \mathbf{E}x$. Тогда, в силу точности состояния ρ , равенство $\text{Tr}(\rho(x - \mathbf{E}x)^2) = 0$ влечет $x = \mathbf{E}x \in \{C1\}$.

В следующем разделе мы приведем важный пример алгебраических колмогоровских потоков, который, в некотором смысле, дополняет пример предложения 1.1.

2. Когомологии групп как язык для описания возмущений пространства функционалов от случайного процесса

Напомним некоторые понятия теории когомологий групп (см., например, [4], [5]). Определим какое-либо действие α действительной прямой $\mathbf{R}$ как группы относительно операции сложения, на некоторой алгебре $\mathcal{M}$. Элемент $I \in \text{Hom}(\mathbf{R}^k, \mathcal{M})$ называется (аддитивным) $(k - \alpha)$ -коциклом, если выполнено тождество

$$\alpha_{t_1} I(t_2, t_3, \dots, t_{k+1}) - I(t_1 + t_2, t_3, \dots, t_{k+1}) + \dots + (-1)^i I(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{k+1}) + \dots + (-1)^{k+1} I(t_1, \dots, t_k) = 0,$$

$t_i \in \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq k+1$; $(k - \alpha)$ -коцикл I называется *кограницей*, если найдется такой элемент $J \in \text{Hom}(\mathbf{R}^{k-1}, \mathcal{M})$, что

$$I(t_1, \dots, t_k) = \alpha_{t_1}(J(t_2, \dots, t_k)) - J(t_1 + t_2, \dots, t_k) + \dots + (-1)^i J(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_k) + \dots + (-1)^{k+1} J(t_1, \dots, t_{k-1}),$$

$t_i \in \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq k$. Обозначим C^k и B^k множества всех аддитивных $(k - \alpha)$ -коциклов и $k - \alpha$ -границ соответственно. Тогда $H^k = H^k(\alpha) = C^k / B^k$ называется k -й группой когомологий α со значениями в $\mathcal{M}$. Введем операцию умножения $\cup: H^k \times H^l \rightarrow H^{k+l}$ по формуле

$$(I_k \cup I_l)(t_1, \dots, t_{k+l}) = I_k(t_1, \dots, t_k) \alpha_{t_1+\dots+t_k}(I_l(t_{k+1}, \dots, t_{k+l})),$$

$I_k \in C^k$, $I_l \in C^l$, $t_i \in \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq k+l$. Группа $H = H(\alpha) = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} H^i$ является градуированным кольцом относительно операции умножения $\cup$. Отметим, что мы опустили нулевую группу когомологий, поскольку в дальнейшем она нам не нужна. Пусть теперь дано два действия α и α' на алгебре $\mathcal{M}$. Мы будем говорить, что кольца $H(\alpha)$ и $H(\alpha')$ *изоморфны*, если найдется взаимно однозначное отображение $w: H(\alpha) \rightarrow H(\alpha')$, переводящее каждую $H^k(\alpha)$ в $H^k(\alpha')$ и действие α в действие α' . Семейство автоморфизмов $w = (w_t)_{t \in \mathbf{R}}$ алгебры $\mathcal{M}$ называется (мультипликативным) α -коциклом, если выполнено условие $w_{t+s} = w_t \circ \alpha_t \circ w_s \circ \alpha_{-t}$, $s, t \in \mathbf{R}$, $w_0 = \text{Id}$. Мы будем называть мультипликативный α -коцикл *марковским относительно некоторого множества $\mathcal{J}$* аддитивных $(1 - \alpha)$ -коциклов $I(t) \in \mathcal{J}$, если выполнено условие $w_t(I(t+s) - I(t)) = I(t+s) - I(t)$, $t, s \geq 0$. Следующее предложение может рассматриваться как некоторое «абстрактное обобщение» марковских возмущений, рассмотренных в [1].

Предложение 2.1. Пусть кольцо $A \subset H(\alpha)$ порождается семейством аддитивных $(1 - \alpha)$ -коциклов $I(t) \in \mathcal{J}$ и операцией умножения $\cup$. Тогда любой мультипликативный α -коцикл w , являющийся марковским относительно $\mathcal{J}$, определяет гомоморфизм A в $H(\alpha')$, где группа $\alpha'_t = w_t \circ \alpha_t$, $t \in \mathbf{R}$. Образ A' при этом гомоморфизме является кольцом, порожденным семейством аддитивных $(1 - \alpha')$ -коциклов $I'(t) = w_t(I(t))$, $t \leq 0$, $I'(t) = I(t)$, $t > 0$, $I(t) \in \mathcal{J}$.

Доказательство. Проверим, что $I'(t) = w_t(I(t))$ удовлетворяет условию $(1 - \alpha')$ -коцикла. Зафиксируем $s, t > 0$ и заметим, что

$$\begin{aligned} w_{-s}(I(-s)) &= w_{-s-t+t}(I(-s)) = w_{-s-t} \circ \alpha_{-s-t} \circ w_t \circ \alpha_{s+t}(I(-s)) \\ &= w_{-s-t} \circ \alpha_{-s-t} \circ w_t(I(t) - I(s+t)) \\ &= w_{-s-t} \circ \alpha_{-s-t}(I(t) - I(s+t)) = w_{-s-t}(I(-s)) \end{aligned}$$

в силу условия коцикла и марковского свойства для w . Следовательно,

$$\begin{aligned} w_{-t-s}(I(-t-s)) &= w_{-t-s}(I(-t) + \alpha_{-t}(I(-s))) = w_{-t-s}(I(-t)) + w_{-t-s} \circ \alpha_{-t}(I(-s)) \\ &= w_{-t}(I(-t)) + w_{-t} \circ \alpha_{-t} \circ w_{-s}(I(-s)) = I'(-t) + \alpha'_{-t}(I'(-s)). \end{aligned}$$

Используя марковское свойство w , получаем $I'(t) = I(t) = -\alpha_t(I(-t)) = -w_t \circ \alpha_t \circ w_{-t}(I(-t)) = -\alpha'_t(I'(-t))$, $t > 0$, поскольку $w_t \circ \alpha_t \circ w_{-t} \circ \alpha_{-t} = \text{Id}$ по свойству коцикла для w .

Ниже мы приводим примеры, иллюстрирующие, как язык теории когомологий групп может описать множество функционалов от классических и квантовых случайных процессов со стационарными приращениями.

2.1. Винеровский процесс. Рассмотрим винеровский процесс $\{B(t), t \in \mathbf{R}\}$, реализованный на вероятностном пространстве (Ω, μ) . Пусть $S = (S_t)_{t \in \mathbf{R}}$ обозначает группу сдвигов по времени. Тогда винеровский процесс удовлетворяет условию аддитивного $(1 - S)$ -коцикла, $B(t + s) = B(t) + S_t(B(s))$, $s, t \in \mathbf{R}$. Рассмотрим кольцо $H(S)$ когомологий группы S со значениями в $L^\infty(\Omega)$. Тогда процесс $B(t)$ порождает кольцо $A \subset H(S)$. Обозначим $\mathcal{H}$ гильбертово пространство L^2 -функционалов от винеровского процесса. Как известно, для $\mathcal{H}$ определено разложение Винера-Ито $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} \mathcal{H}_i$ в ортогональную сумму пространств полиномов возрастающих степеней (см., например, [13]). Отметим, что разложение $A = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} A_i$ градуированного кольца когомологий A , порожденного винеровским процессом, является когомологическим аналогом разложения Винера-Ито. Фиксируем функцию $a(x) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ и введем семейство $w = (w_t)_{t \in \mathbf{R}}$ отображений A по формуле

$$\begin{aligned} w_t(B(t+s) - B(t)) &= B(t+s) - B(t), \quad s \geq 0, \\ w_t(B(s)) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^s a(x) dB(x) - \frac{1}{4} \int_0^t |a(x)|^2 dx \right\} \\ &\quad \times \left(B(s) + \int_0^t a(x) dB(x) \right), \quad s \leq t. \end{aligned} \quad (W)$$

Каждое w_t задает унитарное преобразование в пространстве L^2 -функционалов от белого шума (см. [13, с. 212]) и является марковским коциклом по определению. Таким образом, верно следующее предложение.

Предложение 2.2. Семейство w является марковским коциклом относительно аддитивного $(1 - S)$ -коцикла $\{B(t), t \in \mathbf{R}\}$ — винеровского процесса.

2.2. Квантовый белый шум. Пусть G есть некоторая алгебра Ли с инволюцией. Тогда (см. [18]) существует отображение $j: x \rightarrow j_t(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, сопоставляющее любому элементу $x \in G$ сильно непрерывное множество операторов $j_t(x)$, $t \in \mathbf{R}$, в симметричном пространстве Фока $\mathcal{H} = \mathcal{F}(L^2(\mathbf{R}, \mathcal{H}))$ над одночастичным гильбертовым пространством $L^2(\mathbf{R}, \mathcal{H})$ функций на прямой со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Причем отображение j сохраняет коммутатор, так что $[j_t(x), j_t(y)] = [x, y]$, $x, y \in G$, и каждый $j_t(x)$ удовлетворяет условию аддитивного $(1 - \alpha)$ -коцикла относительно группы автоморфизмов α , порожденной группой сдвигов в пространстве $L^2(\mathbf{R}, \mathcal{H})$. Заметим, что отображение j может быть продолжено до *-гомоморфизма универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(G)$, определяющего квантовый процесс Леви, т.е. процесс с независимыми приращениями (см. [18]). В случае, когда $j_t(x) \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$, $t \in \mathbf{R}$, при фиксированном $x \in G$, семейство $x_t = j_t(x)$, $t \in \mathbf{R}$, является квантовым случайным процессом в смысле определения, данного в разделе 1, причем $x_t = j_t(x)$ является процессом с независимыми приращениями, где независимость понимается как выполнение условий (I1) и (I2) раздела 1. Тем не менее, мы будем рассматривать и кривые $x_t = j_t(x)$, $t \in \mathbf{R}$, состоящие из несамосопряженных операторов. Совокупность всех кривых $x_t = j_t(x)$, $x \in G$, можно называть квантовым белым шумом в силу независимости приращений всех x_t . Отметим также, что квантовые случайные процессы $j_t(x)$ могут играть роль винеровского и пуассоновского процесса в квантовом случае (см. [6]–[8] для дальнейших ссылок и комментариев). Рассмотрим кольцо когомологий A , порожденное аддитивными $(1 - \alpha)$ -коциклами $j_t(x)$, $x \in G$. Заметим, что фоксовское пространство факторизуется, так что $\mathcal{F}(L^2(\mathbf{R}, \mathcal{H})) \simeq \mathcal{F}(L^2(\mathbf{R}_+, \mathcal{H})) \otimes \mathcal{F}(L^2(\mathbf{R}_-, \mathcal{H}))$. Построим пример мультипликативного α -коцикла, порождающего гомоморфизм алгебры A , использующий данную факторизацию. Положим $w_{-t}(\cdot) = W_t \otimes I \cdot W_t^* \otimes I$, $t \geq 0$, где семейство унитарных операторов W_t , $t \geq 0$, в фоксовском пространстве $\mathcal{F}(L^2(\mathbf{R}_+, \mathcal{H}))$ удовлетворяет квантовому стохастическому дифференциальному уравнению, построенному в [6, пример 25.17, с. 198], т.е. $dW = W(dA_m^+ + d\Lambda_{U^{-1}} - d\Lambda_{U^{-1}m} - \frac{1}{2} \langle m, m \rangle)$, где A_m^+ , A_m и $\Lambda_{U^{-1}}$ есть базовые процессы рождения, уничтожения и числа частиц, порожденные функцией $m \in \mathcal{H}$ и унитарным оператором U (см. [6]).

Пусть $\mathcal{M}_t$ и $\mathcal{M}_{[t}$ суть алгебры фон Неймана, порожденные приращениями квантового белого шума $j_t(x)$, $x \in G$, до момента t и после момента t соответственно.

Тогда для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, порожденной всеми операторами $j_t(x)$, $x \in G$, $t \in \mathbf{R}$, имеем $\mathcal{M} = \bigvee_t \mathcal{M}_t = \bigvee_t \mathcal{M}_{[t]}$, причем $\mathcal{M}_{[t]} = \alpha_t(\mathcal{M}_{[0]})$, $t \in \mathbf{R}$.

Предложение 2.3. Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$, порожденная приращениями квантового белого шума $j_t(x)$, $x \in G$, есть фактор. Тогда группа автоморфизмов α является колмогоровским потоком на $\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap_t \mathcal{M}_t \subset \mathcal{M}$. Приращения квантового белого шума, по условию, являются независимыми случайными величинами в квантовом смысле, так что условие (I2) раздела 1 выполнено и алгебра $\mathcal{M}_{[t]}$ принадлежит коммутанту алгебры $\mathcal{M}_t$. Следовательно, оператор x коммутирует со всеми операторами $y \in \bigcup_t \mathcal{M}_{[t]} = \mathcal{M}$. Поскольку алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ является фактором, т.е. $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \{\mathbf{C}1\}$, получаем $x = \text{const} \cdot 1$.

Заметим, что в приложениях алгебра $\mathcal{M}$ часто является алгеброй всех ограниченных операторов, т.е. фактором типа I. В этом случае условия предложения 2.3 выполняются. Математическое ожидание в квантовом случае часто задается чистым состоянием ρ , т.е. по формуле $\mathbf{E}x = (\omega, x\omega)$, где ω есть некоторый вектор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, в котором действуют операторы x . Чистое состояние на алгебре всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ не может быть точным (см. [9]). Следовательно, предложение 2.3 дополняет предложение 1.1.

3. Марковские возмущения стационарных квантовых случайных процессов

Обобщим определение квантового случайного процесса, данное в разделе 1. Следуя [14], квантовым случайным процессом мы будем называть семейство *-гомоморфизмов $j = (j_t)_{t \in \mathbf{R}}$ из некоторой алгебры с инволюцией $\mathcal{A}$ в алгебру линейных (неограниченных, вообще говоря) операторов $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Мы будем предполагать, что $j_0(x) = 0$, $x \in \mathcal{A}$. В качестве $\mathcal{A}$ можно, в частности, взять некоторую алгебру Ли. Рассмотрим минимальную алгебру фон Неймана $\mathcal{M}$, порожденную всеми операторами $j_t(x)$, $x \in \mathcal{A}$, так что $\mathcal{M} = \{j_t(x), x \in \mathcal{A}\}''$, где ' обозначает коммутант в алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Для фиксированных $s, t \in \mathbf{R}$ обозначим $\mathcal{M}_t$, $\mathcal{M}_{[t]}$ и $\mathcal{M}_{[s,t]}$ алгебры фон Неймана, порожденные операторами $\{j_t(x) - j_r(x), r \leq t\}$, $\{j_r(x) - j_t(x), r \geq t\}$ и $\{j_r(x) - j_t(x), s \leq r \leq t\}$ соответственно. Далее мы будем считать, что фиксировано состояние $\rho > 0$, $\text{Tr} \rho = 1$, определяющее математическое ожидание $\mathbf{E}y = \text{Tr}(\rho y)$ квантовых случайных величин $y \in \mathcal{M}$, причем $\mathcal{M}$ дана в «стандартной форме» относительно состояния ρ , т.е. гильбертово пространство $\mathcal{H}$, в котором действует $\mathcal{M}$, определяется отображением $x \rightarrow [x]$ из $\mathcal{M}$ во всюду плотное в $\mathcal{H}$ множество элементов, так что скалярное произведение определяется формулой $([x], [y]) = \mathbf{E}(xy^*)$, $x, y \in \mathcal{M}$. Квантовый случайный процесс j называется стационарным, если найдется группа автоморфизмов $\alpha_t \in \text{Aut}(\mathcal{M})$, $t \in \mathbf{R}$, корректно заданных на операторах $j_s(x)$, $x \in \mathcal{A}$, такая, что $\alpha_t(j_s(x)) = j_{s+t}(x)$, $x \in \mathcal{A}$, причем математическое ожидание $\mathbf{E}(\cdot)$ остается инвариантным относительно действия группы $\alpha = (\alpha_t)_{t \in \mathbf{R}}$, т.е. $\mathbf{E}\alpha_t(y) = \mathbf{E}y$, $y \in \mathcal{M}$. Стационарные квантовые случайные процессы являются частным случаем квантовых случайных процессов со стационарными приращениями, порождаемыми *-гомоморфизмами j_t , для которых кривые $j_t(x)$ являются аддитивными $(1 - \alpha)$ -циклами при любом фиксированном $x \in \mathcal{A}$. Примером случайного процесса со стационарными приращениями является квантовый белый шум. Мы будем предполагать, что α имеет ультрослабо непрерывные орбиты, т.е. все функции $\eta(\alpha_t(y))$ непрерывны по t для любых $\eta \in \mathcal{M}_*$, $y \in \mathcal{M}$. Семейство *-автоморфизмов w_t , $t \in \mathbf{R}$, алгебры $\mathcal{M}$ называется (мультипликативным) марковским α -циклом, если следующие два условия выполнены:

- (i) $w_{s+t} = w_s \circ \alpha_s \circ w_t \circ \alpha_{-s}$, $s, t \in \mathbf{R}$,
- (ii) $w_t(x) = x$, $x \in \mathcal{M}_{[t]}$, $t \geq 0$.

Заметим, что если квантовый случайный процесс j , по которому строилось семейство $\mathcal{M}_{[t]}$, является квантовым белым шумом, марковский цикл w в смысле данного здесь определения будет также марковским относительно семейства аддитивных $(1 - \alpha)$ -циклов $\{j_t(x), x \in \mathcal{A}\}$ в смысле определения, данного в предыдущем разделе.

Предложение 3.1. Пусть $j_t(x)$, $x \in \mathcal{A}$, и w суть квантовый белый шум и марковский коцикл соответственно. Предположим, что w не меняет значений математического ожидания E_j , определяющего распределение вероятностей j . Тогда семейство гомоморфизмов $j_t(x) = w_t \circ j_t(x)$, $t \leq 0$, $\tilde{j}_t(x) = j_t(x)$, $t > 0$, $x \in \mathcal{A}$, является квантовым белым шумом, изоморфным исходному. В частности, процессы $\tilde{j}_t(x)$, $x \in \mathcal{A}$, имеют независимые приращения.

Доказательство. Квантовый белый шум j является квантовым случайным процессом со стационарными приращениями. Обозначим α соответствующую группу автоморфизмов, сдвигающую приращения по времени. Тогда, согласно предложению 2.1, $j_t(x)$ является аддитивным $(1 - \alpha)$ -коциклом для любого фиксированного $x \in \mathcal{A}$, где группа $\tilde{\alpha}$ состоит из автоморфизмов $\tilde{\alpha}_t = w_t \circ \alpha_t$, $t \in \mathbf{R}$. Согласно свойству (I2) независимости приращений квантового белого шума j , коммутатор

$$[j_{t_1}(x_1) - j_{s_1}(x_1), j_{t_2}(x_2) - j_{s_2}(x_2)] = 0 \quad (\text{K})$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ и непересекающихся интервалов (s_1, t_1) и (s_2, t_2) . Докажем, что это свойство выполняется и для процесса $\tilde{j}$. Для s_1, t_1, s_2, t_2 это так в силу свойства $j_r(x) = j_r(x)$, $x \in \mathcal{A}$, $r \geq 0$. Равенство для случая, когда хотя бы одно из s_1, t_1, s_2, t_2 меньше нуля, получается действием на формулу (K), в которой $s_1, t_1, s_2, t_2 \geq 0$, автоморфизмами $\tilde{\alpha}_{-r} = w_{-r} \circ \alpha_{-r}$ для всевозможных $r > 0$. Действительно, автоморфизм $\tilde{\alpha}_{-r}$ сдвигает приращения на r единиц назад и формула (K), справедливая для процесса $\tilde{j}$ при положительных значениях s_1, t_1, s_2, t_2 , автоматически оказывается справедливой и для отрицательных значений. На самом деле, рассуждая приведенным выше образом, легко получить, что любые алгебраические свойства, выполненные для операторов $j_t(x)$, $x \in \mathcal{A}$, $t \in \mathbf{R}$, будут также выполнены и для операторов $\tilde{j}_t(x)$, $x \in \mathcal{A}$, $t \in \mathbf{R}$. Осталось проверить выполнение условия независимости (I1) раздела 1 для приращений процесса $\tilde{j}$. Но это действительно так, поскольку оно выполняется для процесса j и математическое ожидание инвариантно относительно действия коцикла w по условию. Таким образом, процессы j и $\tilde{j}$ изоморфны.

Рассмотрим сужение $\beta_t = \alpha_{-t}$, $t \in \mathbf{R}_+$, на подалгебру $\mathcal{M}_0$, инвариантную относительно действия α_{-t} , $t \in \mathbf{R}_+$. Унитарная полугруппа $\beta = (\beta_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ состоит из эндоморфизмов $\mathcal{M}_0$ таких, что $\beta(\mathcal{M}_0) \neq \mathcal{M}_0$, и имеет непрерывные орбиты в том смысле, что $\eta(\beta_t(x))$ есть непрерывная функция при любых $\eta \in \mathcal{M}_0^*$, $x \in \mathcal{M}_0$. Следовательно, β есть E_0 -полугруппа в смысле определения, данного в [19]. В случае, когда α является колмогоровским потоком, E_0 -полугруппа β является полупотоком сдвигов Пауэрса, т.е. все β_t , $t > 0$, являются сдвигами Пауэрса [19], так что $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \beta_{tn}(\mathcal{M}_0) = \{\mathbf{C}1\}$, $t > 0$ (см. [20]). Заметим, что марковский коцикл w порождает новую группу автоморфизмов $\tilde{\alpha}_t = w_t \circ \alpha_t$, $t \in \mathbf{R}$, алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ и новую E_0 -полугруппу $\tilde{\beta}_t = w_{-t} \circ \beta_t$, $t \in \mathbf{R}_+$, алгебры фон Неймана $\mathcal{M}_0$. Мы будем называть $\tilde{\alpha}$ марковским возмущением группы (в частности, колмогоровского потока) α . Напомним, что условным математическим ожиданием алгебры с единицей $\mathcal{M}$ на алгебру с единицей $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ называется вполне положительный проектор $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$ (см., например, [7], [8]). Используя технику [21], можно выделить максимальную подалгебру алгебры $\mathcal{M}_0$, сужение на которую полугруппы $\tilde{\beta}$ является полугруппой автоморфизмов, причем определено условное математическое ожидание на эту алгебру. Квантовые случайные величины $\tilde{j}_t(x) = w_t \circ j_t(x)$, $x \in \mathcal{A}$, порождают подалгебры фон Неймана $\tilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{j}_t(x), x \in \mathcal{A}, t \in \mathbf{R}\}''$ и $\tilde{\mathcal{M}}_+ = \{\tilde{j}_{-t}(x), x \in \mathcal{A}, t \in \mathbf{R}_+\}''$ алгебр $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_0$ соответственно. Предположим, что $\mathcal{M}$ является фактором. Тогда в силу предложения 2.3 α является колмогоровским потоком на $\mathcal{M}$, а в силу предложения 3.1 сужение марковского возмущения $\tilde{\alpha}|_{\tilde{\mathcal{M}}_+}$ также есть колмогоровский поток. Таким образом, $\tilde{\beta}|_{\tilde{\mathcal{M}}_+}$ — полупоток сдвигов Пауэрса. Классическое «разложение Вольда» (см., например, [15], а также обсуждение в [I]) позволяет однозначно найти случайный процесс с некоррелированными приращениями, соответствующий стационарному в широком смысле случайному процессу, так что «недетерминированная» часть процесса представляется в виде интеграла по некоторой некоррелированной мере. В следующей теореме мы устанавливаем возможность выделить сужение группы автоморфизмов α , являющейся марковским возмущением

колмогоровского потока, порожденного квантовым белым шумом, которое будет колмогоровским потоком, изоморфным исходному. Тем самым, наше утверждение можно считать некоторым аналогом разложения Вольда для квантового случая.

Теорема 3.1. Пусть группа автоморфизмов $\tilde{\alpha}$ фактора фон Неймана $\mathcal{M}$ получена возмущением марковским коциклом w колмогоровского потока, порожденного квантовым белым шумом j , при этом w оставляет инвариантным математическое ожидание, определяющее распределение вероятностей. Тогда найдется такой подфактор $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$, сужение на который группы $\tilde{\alpha}$ является колмогоровским потоком, порожденным квантовым белым шумом $\tilde{j}$, изоморфным исходному. Предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} w_{-t} = w_{-\infty}$ корректно определяет нормальный *-эндоморфизм $w_{-\infty}$ так, что $\tilde{\mathcal{M}} = w_{-\infty}(\mathcal{M})$, $\tilde{j}_t = w_{-\infty} \circ j_t$, $t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы следует из предложения 3.1. Докажем, что существует предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} w_{-t} = w_{-\infty}$, определяющий нормальный *-эндоморфизм на $\mathcal{M}$ с приведенными в формулировке теоремы свойствами. Заметим, что $w_{-t-s}(y) = w_{-t}(y)$, $y \in \mathcal{M}_t$, следовательно, предел существует на всюду плотном множестве элементов. Докажем, что он существует. Формулы $(U_t[x], [y]) = \mathbf{E}(\alpha_t(x)y^*)$ и $(W_t[x], [y]) = \mathbf{E}(w_t(x)y^*)$, $x, y \in \mathcal{M}$, определяют сильно непрерывную группу $U = (U_t)_{t \in \mathbf{R}}$ унитарных операторов в $\mathcal{H}$ и унитарный U -коцикл $W = (W_t)_{t \in \mathbf{R}}$ соответственно. Пусть $\mathcal{H}_t$ — подпространство $\mathcal{H}$, порожденное элементами $[x]$, $x \in \mathcal{M}_t$. Тогда $W_t\xi = \xi$, $\xi \in \mathcal{H}_t$, $t \geq 0$, в силу марковского свойства w . Следовательно, W является марковским U -коциклом в смысле определения раздела 1 работы [1] и предел $s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} W_{-t} = W_{-\infty}$ существует согласно предложению 1.2 в [1]. Заметим, что $w_t(x) = W_t x W_t^*$, $x \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbf{R}$. Отсюда следует, что $w_{-t-s}(x)\xi = W_{-t-s}x W_{-t-s}\xi = W_{-t-s}x W_{-t}\xi \rightarrow W_{-\infty}x W_{-t}\xi$, $x \in \mathcal{M}$, $\xi \in \mathcal{H}_{-t}$, $s \rightarrow +\infty$. Следовательно, предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} w_{-t}(x)\xi$ существует для всюду плотного множества векторов $\xi \in \mathcal{H}$. Заметим, что $\|w_{-t}(x)\| = \|x\|$, поскольку w_{-t} являются автоморфизмами. Значит, сильный предел $s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} w_{-t}(x)$ определен по теореме Банаха–Штейнгауза для любого $x \in \mathcal{M}$, причем предельное отображение $w_{-\infty}$ сохраняет единицу, поскольку все w_{-t} обладают этим свойством, и $\|w_{-\infty}\| = 1$. Тем самым, отображение $w_{-\infty}$ является положительным (см. [9]). С другой стороны, $w_{-\infty}$ является *-эндоморфизмом, поскольку является пределом последовательности *-автоморфизмов w_{-t} . Таким образом, $w_{-\infty}$ вполне положительно. Заметим, что $w_{-\infty}(\mathcal{M}_0) = \tilde{\mathcal{M}}_0$. Марковское свойство дает $w_{-t-s}(y) = w_{-t}(y)$, $y \in \mathcal{M}_{-t}$, $s, t \geq 0$. Согласно предложению 3.1, $\tilde{j}_{-t} = w_{-t} \circ j_{-t}$, $t \geq 0$. Следовательно, $\tilde{j}_{-t} = w_{-t-s} \circ j_{-t} = w_{-\infty} \circ j_{-t}$, $t \geq 0$. Для положительных значений времени, $\tilde{j}_t = j_t = w_{-\infty} \circ j_t$, $t \geq 0$, поскольку $w_{-t}(y) = w_{-\infty}(y) = y$, $t \geq 0$, $y \in \mathcal{M}_0$.

Автор признателен А. С. Холево за постоянное обсуждение и многочисленные полезные замечания, позволившие существенно улучшить работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов Г. Г. О марковских возмущениях группы унитарных операторов, ассоциированной со случайным процессом со стационарными приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 1, с. 145–155.
2. Колмогоров А. Н. Кривые в гильбертовском пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений. — Докл. АН СССР, 1940, т. 26, № 1, с. 6–9.
3. Колмогоров А. Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовском пространстве. — Докл. АН СССР, 1940, т. 26, № 2, с. 115–118.
4. Браун К. С. Когомологии групп. М.: Наука, 1987, 384 с.
5. Гишарде А. Когомологии топологических групп и алгебр Ли. М.: Мир, 1984, 262 с.
6. Parthasarathy K. R. An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Basel: Birkhäuser, 1992, 290 p.
7. Holevo A. S. Statistical Structure of Quantum Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2001, 159 p.

8. Холево А. С. Квантовая вероятность и квантовая статистика. — Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр., 1991, т. 83, с. 5–132.
9. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982, 512 с.
10. Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега. — Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 5, с. 861–864.
11. Emch G. G. Generalized K -flows. — Comm. Math. Phys., 1976, v. 49, № 3, p. 191–215.
12. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970, 384 с.
13. Худа Т. Броуновское движение. М.: Наука, 1987, 304 с.
14. Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T. Quantum stochastic processes. — Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., 1982, v. 18, № 1, p. 97–133.
15. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М.: Физматгиз, 1963, 284 с.
16. Холево А. С. О формуле Леви–Хинчина в некоммутативной теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 4, с. 842–857.
17. Holevo A. S. Lévy processes and continuous quantum measurements. — Lévy Processes. Theory and Applications. Ed. by O. E. Barndorff-Nielsen et al. Boston: Birkhäuser, 2001, p. 225–239.
18. Schürmann M. White noise on bialgebras. — Lecture Notes in Math., 1993, v. 1544, p. 1–146.
19. Powers R. T. An index theory for semigroups of $*$ -endomorphisms of $\mathcal{B}(H)$ and type II_1 factors. — Canad. J. Math., 1988, v. 40, № 1, p. 86–114.
20. Булинский А. В. Алгебраические K -системы и полупотоки сдвигов Пауэрса. — Успехи матем. наук, 1996, т. 51, № 2, с. 145–146.
21. Булинский А. В. Некоторые асимптотические свойства W^* -динамических систем. — Функци. анализ и его прил., 1995, т. 29, в. 2, с. 64–67.

Поступила в редакцию
23.V.2002

Исправленный вариант
19.II.2004

© 2005 г.

ГНЕДЕНКО Б. Д.*

ОБ ОДНОМ РАСШИРЕНИИ ПОНЯТИЯ МАРТИНГАЛА

В настоящей работе автор вводит понятия ε -мартингала и строгого ε -мартингала. Первый определяется неравенством $|\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s) - X_s| \leq \varepsilon$, второй получается из ε -мартингала заменой в определении фиксированных моментов на моменты остановки. Доказано, что непрерывный справа ε -мартингал является строгим 2ε -мартингалом. Одновременно построен пример непрерывного справа ε -мартингала, не являющегося строгим $a\varepsilon$ -мартингалом для любого $a < 2$. Показано, что выявленная зависимость между ε -мартингалами и строгими ε -мартингалами не имеет аналога для ε -субмартингалов. Также в работе приводятся критерии строгой ε -мартингальности для непрерывного справа с пределами слева процесса, выражающийся в возможности его равномерного приближения мартингалом с точностью $\varepsilon/2$.

Ключевые слова и фразы: ε -мартингал, строгий ε -мартингал, теорема Дуба об остановке.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: bgnedenko@science.comcor.ru