Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гнеденко, Об одном расширении понятия мар-
тингала, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50,
выпуск 4, 763–767

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:51:34

8. Холево А. С. Квантовая вероятность и квантовая статистика. — Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр., 1991, т. 83, с. 5–132.
9. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982, 512 с.
10. Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега. — Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 5, с. 861–864.
11. Emch G. G. Generalized K -flows. — Comm. Math. Phys., 1976, v. 49, № 3, p. 191–215.
12. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970, 384 с.
13. Худа Т. Броуновское движение. М.: Наука, 1987, 304 с.
14. Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T. Quantum stochastic processes. — Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., 1982, v. 18, № 1, p. 97–133.
15. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М.: Физматгиз, 1963, 284 с.
16. Холево А. С. О формуле Леви–Хинчина в некоммутативной теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 4, с. 842–857.
17. Holevo A. S. Lévy processes and continuous quantum measurements. — Lévy Processes. Theory and Applications. Ed. by O. E. Barndorff-Nielsen et al. Boston: Birkhäuser, 2001, p. 225–239.
18. Schürmann M. White noise on bialgebras. — Lecture Notes in Math., 1993, v. 1544, p. 1–146.
19. Powers R. T. An index theory for semigroups of $*$ -endomorphisms of $\mathcal{B}(H)$ and type II_1 factors. — Canad. J. Math., 1988, v. 40, № 1, p. 86–114.
20. Булинский А. В. Алгебраические K -системы и полупотоки сдвигов Пауэрса. — Успехи матем. наук, 1996, т. 51, № 2, с. 145–146.
21. Булинский А. В. Некоторые асимптотические свойства W^* -динамических систем. — Функци. анализ и его прил., 1995, т. 29, в. 2, с. 64–67.

Поступила в редакцию
23.V.2002

Исправленный вариант
19.II.2004

© 2005 г.

ГНЕДЕНКО Б. Д.*

ОБ ОДНОМ РАСШИРЕНИИ ПОНЯТИЯ МАРТИНГАЛА

В настоящей работе автор вводит понятия ε -мартингала и строгого ε -мартингала. Первый определяется неравенством $|\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s) - X_s| \leq \varepsilon$, второй получается из ε -мартингала заменой в определении фиксированных моментов на моменты остановки. Доказано, что непрерывный справа ε -мартингал является строгим 2ε -мартингалом. Одновременно построен пример непрерывного справа ε -мартингала, не являющегося строгим $a\varepsilon$ -мартингалом для любого $a < 2$. Показано, что выявленная зависимость между ε -мартингалами и строгими ε -мартингалами не имеет аналога для ε -субмартингалов. Также в работе приводятся критерии строгой ε -мартингальности для непрерывного справа с пределами слева процесса, выражающийся в возможности его равномерного приближения мартингалом с точностью $\varepsilon/2$.

Ключевые слова и фразы: ε -мартингал, строгий ε -мартингал, теорема Дуба об остановке.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: bgnedenko@science.comcor.ru

Введение. ε -мартингал X определяется как прогрессивно измеримый интегрируемый процесс, для которого выполнено $|\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s) - X_s| \leq \varepsilon$ для любых $s \leq t$. Строгий ε -мартингал получается из ε -мартингала заменой в определении фиксированных моментов на моменты останова. Интуитивно строгий ε -мартингал можно рассматривать как мартингал, «деформированный» на величину $\varepsilon/2$ (см. теорему 2). Естественной областью применения строгих ε -мартингалов может быть спектр задач финансовой математики, в рамках которых рассматриваются рынки с операционными издержками. Для непрерывного справа мартингала X справедлива теорема Дуба об останове, гласящая, что $\mathbf{E}(X_\tau - X_\sigma | \mathcal{F}_\sigma) = 0$ для любых моментов останова $\sigma \leq \tau$. Доказанная в статье теорема о связи ε -мартингалов и строгих ε -мартингалов может рассматриваться как соответствующее обобщение теоремы Дуба. Утверждается, что для непрерывного справа ε -мартингала X и любых моментов останова $\sigma \leq \tau$ справедливо неравенство $|\mathbf{E}(X_\tau - X_\sigma | \mathcal{F}_\sigma)| \leq 2\varepsilon$ (теорема 1). Построен пример, показывающий, что уменьшить множитель, равный 2, нельзя. Наконец построен пример, из которого следует, что утверждение о том, что непрерывный справа ε -субмартингал является строгим 2ε -субмартингалом, вообще говоря, не верно. Также в статье доказан критерий строгой ε -мартингалности для непрерывного справа с пределами слева процесса, заключающийся в возможности его равномерного приближения мартингалом с точностью $\varepsilon/2$ (теорема 2).

Автор выражает благодарность М. А. Урусову и А. С. Черному за ценные замечания и дополнения к настоящей работе. Так, пример 2 и теорема 2 были добавлены А. С. Черным, им же было предложено начало доказательства теоремы 1, более компактное, чем первоначальный вариант автора. Также автор выражает признательность рецензенту за существенные замечания, позволившие улучшить первоначальный текст.

1. Определения. Пусть задан стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$. Будем предполагать, что фильтрация $(\mathcal{F}_t)$ непрерывна справа. Зададим некоторое число $T < \infty$. Везде в работе будем считать, что $(X_t)_{t \geq 0}$ — прогрессивно измеримый процесс на $[0, T]$. Через $\mathbb{T}$ обозначим множество марковских моментов τ таких, что $\tau \leq T$.

Зафиксируем число $\varepsilon \geq 0$. Дадим следующие определения.

О п р е д е л е н и е 1. Процесс X такой, что для любых $s, t \in [0, T]$, $s \leq t$, выполнено $\mathbf{E}|X_t| < \infty$ и $\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s - \varepsilon$, назовем ε -субмартингалом на $[0, T]$.

О п р е д е л е н и е 2. Процесс X такой, что процесс $Y = -X$ является ε -субмартингалом на $[0, T]$, назовем ε -супермартингалом на $[0, T]$.

О п р е д е л е н и е 3. Процесс X такой, что X одновременно является ε -субмартингалом и ε -супермартингалом на $[0, T]$, назовем ε -мартингалом на $[0, T]$.

О п р е д е л е н и е 4. Процесс X такой, что для любых $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$, $\sigma \leq \tau$, величина X_τ интегрируема и $\mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma - \varepsilon$, назовем строгим ε -субмартингалом на $[0, T]$.

О п р е д е л е н и е 5. Процесс X такой, что процесс $Y = -X$ является строгим ε -субмартингалом на $[0, T]$, назовем строгим ε -супермартингалом на $[0, T]$.

О п р е д е л е н и е 6. Процесс X такой, что X одновременно является строгим ε -субмартингалом и строгим ε -супермартингалом на $[0, T]$, назовем строгим ε -мартингалом на $[0, T]$.

2. Результаты. Прежде чем перейти к формулировке первой теоремы, приведем важный пример непрерывного справа ε -мартингала X на конечном отрезке, не являющегося строгим ε -мартингалом.

П р и м е р 1. Пусть заданы число $T < \infty$ и случайная величина τ , распределенная равномерно на $[0, T]$: $\text{Law}(\tau) \sim R[0, T]$. Определим процесс X по формуле

$$X_t \triangleq \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ 1, & t \in \left[\tau, \tau + \frac{T-\tau}{2} \right), \\ \frac{1}{2}, & t \in \left[\tau + \frac{T-\tau}{2}, T \right]. \end{cases}$$

В качестве фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ выберем фильтрацию, порожденную процессом X : $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$. Очевидно, что относительно $(\mathcal{F}_t^X)_{t \leq T}$ величина τ является моментом остановки, а процесс X прогрессивно измерим (в силу согласованности и непрерывности справа). Покажем, что X является $\frac{1}{2}$ -мартингалом.

Дадим оценку сверху для $|\mathbf{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s^X)|$, где $t \geq s$. Поскольку на множестве $\{\tau \leq s\}$ неравенство $|\mathbf{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s^X)| \leq \frac{1}{2}$ очевидно, то остается показать, что $|\mathbf{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s^X)| \leq \frac{1}{2}$ на множестве $\{\tau > s\}$. На множестве $\{\tau > s\}$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s^X) &= \mathbf{E}(X_t - X_s | \tau > s) = \frac{1}{2} \mathbf{P}\left(\tau + \frac{T - \tau}{2} \leq t \mid \tau > s\right) \\ &+ \mathbf{P}\left(\tau \leq t, \tau + \frac{T - \tau}{2} > t \mid \tau > s\right) = \frac{(2t - T - s)^+}{2(T - s)} + \frac{t - (2t - T) \vee s}{T - s}. \end{aligned}$$

Несложно показать, что последнее выражение не превосходит $\frac{1}{2}$.

Итак, мы доказали, что X является $\frac{1}{2}$ -мартингалом. В заключение отметим, что $\mathbf{E}(X_\tau - X_0) = 1$. Следовательно, процесс X есть непрерывный справа $\frac{1}{2}$ -мартингал, не являющийся строгим ε -мартингалом для любого $\varepsilon < 1$.

Основной результат настоящей статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть на отрезке $[0, T]$ задан непрерывный справа ε -мартингал X . Тогда X является строгим 2ε -мартингалом на $[0, T]$.

Доказательство. Для любого $\tau \in \mathbb{T}$ докажем неравенство

$$|\mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_\tau) - X_\tau| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Предположим сначала, что τ — простой момент остановки, т.е. он принимает только конечное число значений $\{t_1, \dots, t_N\}$. Тогда $\mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_{t_k})$ на $\{\tau = t_k\}$ и, следовательно, $|\mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_\tau) - X_\tau| \leq \varepsilon$.

Для произвольного момента τ рассмотрим последовательность простых моментов $\{\tau_n: \tau \leq \tau_n \leq \tau_{n-1}\}_{n \geq 1}$, где $\tau_n = \sum_{k=1}^n (kT/n) I((k-1)T/n < \tau \leq kT/n)$. Очевидно, что $\tau_n \rightarrow \tau$ для всех $\omega \in \Omega$. Следовательно, для любого $A \in \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_{\tau_n}$ и для любого $t \leq T$ мы имеем $A \cap \{\tau < t\} = A \cap \bigcup_{n=1}^\infty \{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t$, и из непрерывности справа фильтрации $(\mathcal{F}_t)$ вытекает, что $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Значит, $\bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_{\tau_n} = \mathcal{F}_\tau$ и в соответствии с [3, гл. II, следствие 2.4] приходим к тому, что $\mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_{\tau_n}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_\tau)$ (п.н.).

Отметим также, что поскольку процесс X непрерывен справа и $\tau_n \downarrow \tau$ (п.н.), то $X_{\tau_n} \rightarrow X_\tau$ (п.н.). Поскольку $|\mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_{\tau_n}) - X_{\tau_n}| \leq \varepsilon$, то из доказанных предельных соотношений следует, что $|\mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_\tau) - X_\tau| \leq \varepsilon$.

Покажем теперь, что $\mathbf{E}|X_\tau| < \infty$. Действительно, из (1) следует, что $|X_\tau| \leq |\mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_\tau)| + \varepsilon$, поэтому

$$\mathbf{E}|X_\tau| \leq \mathbf{E}|\mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_\tau)| + \varepsilon \leq \mathbf{E}|X_T| + \varepsilon < \infty.$$

В заключение рассмотрим моменты остановки $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$ такие, что $\sigma \leq \tau$. Для них

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) - X_\sigma| &= |\mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) - \mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_\sigma) + \mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_\sigma) - X_\sigma| \\ &\leq |\mathbf{E}(X_T - X_\tau | \mathcal{F}_\sigma)| + |\mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_\sigma) - X_\sigma|. \end{aligned}$$

Из (1) вытекает, что каждое из слагаемых в правой части последнего неравенства не больше, чем ε . Следовательно, $|\mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) - X_\sigma| \leq 2\varepsilon$. Теорема доказана.

Как показывает следующий пример, результат о том, что ε -мартингал является строгим 2ε -мартингалом, не имеет аналога для ε -субмартингалов. Пример будет построен в дискретной модели, однако он очевидным способом переносится на непрерывный случай.

Пример 2. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и η — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ такая, что $\mathbf{P}\{\eta = n\} = 1/(2N)$, $n = 1, \dots, N$, $\mathbf{P}\{\eta = N + 1\} = \frac{1}{2}$. Рассмотрим процесс $(X_n)_{n=0,1,\dots,N}$, где

$$X_n(\omega) \triangleq \begin{cases} -1, & \eta(\omega) = n, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и фильтрацию $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\dots,N}$, где $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X \triangleq \sigma(X_k; k \leq n)$.

Тогда для любого $n \leq N$ мы имеем $X_n \leq 0$, и для любого $n < m$, где $m \in \{0, 1, \dots, N\}$, справедливо соотношение

$$\mathbf{E}(X_m | \mathcal{F}_n) = -\mathbf{P}(X_m = -1 | \mathcal{F}_n) \geq -\frac{1}{N+1},$$

поэтому X — это $1/(N+1)$ -субмартингал. С другой стороны, для моментов остановки $\sigma = 0$ и $\tau = \inf\{n: X_n = -1\} \wedge N$ мы имеем $X_\sigma = 0$ и $\mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{F}_0) = \mathbf{E}X_\tau = -\frac{1}{2}$, из чего следует, что X не является строгим ε -субмартингалом для любого $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Приведем также пример, показывающий, что требование непрерывности процесса X справа в теореме 1 является существенным.

Пример 3. Определим на отрезке $[0, 1]$ равномерно распределенную случайную величину τ : $\text{Law}(\tau) = R[0, 1]$. Процесс X определим равенством

$$X_t \triangleq \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau. \end{cases}$$

Фильтрацию $(\mathcal{F}_t)_{t \leq 1}$ определим следующим образом: $\mathcal{F}_t = \sigma(\{\tau \leq s\}; s \leq t)$. Можно показать, что относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)$ процесс X является прогрессивно измеримым. Очевидно, что τ — момент остановки относительно $(\mathcal{F}_t)$, а X является $(\mathcal{F}_t)$ -мартингалом. При этом $\mathbf{E}(X_\tau - X_0) = 1$, поэтому для любого $\varepsilon \in [0, 1]$ процесс X не является строгим ε -мартингалом.

З а м е ч а н и е. Если найдется $\mathcal{F}$ -измеримая интегрируемая случайная величина X_∞ такая, что для любого $t \geq 0$ выполнено $|\mathbf{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t) - X_t| \leq \varepsilon$, то результат теоремы можно без существенных изменений в доказательстве перенести на случай $T = \infty$.

В заключение сформулируем и докажем интересный критерий строгой ε -мартингальности для непрерывных справа с пределами слева процессов X .

Теорема 2. Пусть X — согласованный непрерывный справа с пределами слева процесс такой, что для любого момента остановки $\tau \in \mathbb{T}$ величина X_τ интегрируема. Процесс X является строгим ε -мартингалом на $[0, T]$ тогда и только тогда, когда найдется $(\mathcal{F}_t)$ -мартингал M такой, что $|X_t - M_t| \leq \varepsilon/2$ для любого $t \leq T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим процессы $Y \triangleq X - \varepsilon/2$ и $Z \triangleq X + \varepsilon/2$. Утверждение критерия сразу же вытекает из следующей леммы.

Лемма. Пусть фильтрация $(\mathcal{F}_t)$ непрерывна справа. Предположим, что Y и Z — $(\mathcal{F}_t)$ -согласованные непрерывные справа с пределами слева процессы такие, что для любого момента остановки величины Y_τ и Z_τ интегрируемы. В этом случае указанная пара процессов удовлетворяет условиям

$$\mathbf{E}(Y_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \leq Z_\sigma \quad \text{и} \quad \mathbf{E}(Z_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq Y_\sigma$$

для любых моментов остановки $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$, таких, что $\sigma \leq \tau$, тогда и только тогда, когда найдется мартингал M такой, что $Y_t \leq M_t \leq Z_t$ (п.н.) для любого $t \in [0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Справедливость обратной импликации непосредственно вытекает из теоремы Дуба об остановке. Перейдем к доказательству прямой импликации. Рассмотрим огибающие Снелла

$$\tilde{Y}_t = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}(Y_\tau | \mathcal{F}_t), \quad \tilde{Z}_t = \text{ess inf}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}(Z_\tau | \mathcal{F}_t), \quad t \in [0, T],$$

где через $\mathcal{T}_t$ обозначено множество всех моментов остановки $\tau \in \mathbb{T}$ таких, что $\tau \geq t$, а $\text{ess sup}_\alpha \xi_\alpha$ — это такая случайная величина ξ , для которой $\xi_\alpha \leq \xi$ (п.н.) для любого α , и для любой другой величины ξ' с тем же свойством выполнено $\xi' \geq \xi$ (п.н.). Заметим, что $\mathcal{T}_s \supseteq \mathcal{T}_t$ для $s \leq t$. Можно показать, что $\tilde{Y}$ — супермартингал, а $\tilde{Z}$ — субмартингал на $[0, T]$ (см. [2, теорема 2.12.1]).

Докажем, что для любого $t \in [0, T]$ $\tilde{Y}_t \leq \tilde{Z}_t$ (п.н.). Допустим, что найдется $t \leq T$ такое, что $\mathbf{P}\{\tilde{Y}_t > \tilde{Z}_t\} > 0$. Следовательно, найдутся $\tau, \sigma \in \mathcal{T}_t$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\mathbf{E}(Y_\tau | \mathcal{F}_t) > \mathbf{E}(Z_\sigma | \mathcal{F}_t)\} > 0.$$

Следовательно, $\mathbf{P}\{\xi > \eta\}$, где $\xi = \mathbf{E}(Y_\tau | \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma})$ и $\eta = \mathbf{E}(Z_\sigma | \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma})$. Предположим сначала, что $\mathbf{P}(\{\xi > \eta\} \cap \{\tau \leq \sigma\}) > 0$. Тогда на множестве $\{\tau \leq \sigma\}$ мы имеем

$$\xi = Y_\tau = Y_{\tau \wedge \sigma}, \quad \eta = \mathbf{E}(Z_\sigma | \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}) = \mathbf{E}(Z_{\tau \vee \sigma} | \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}),$$

что противоречит предположению леммы. Аналогичное противоречие возникает в случае $\mathbf{P}(\{\xi > \eta\} \cap \{\tau \geq \sigma\}) > 0$. Тем самым, мы показали, что $\tilde{Y} \leq \tilde{Z}$. Существование искомого процесса M теперь следует из [1, лемма 3] (приведенное авторами доказательство справедливо только для непрерывных справа с пределами слева процессов, однако с небольшими изменениями его можно распространить на общий случай).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jovini E., Kallal H. Martingales and arbitrage in securities markets with transaction costs. — J. Econom. Theory, 1995, v. 66, № 1, p. 178–197.
2. El Karoui N. Les aspects probabilistes du controle stochastique. — Lecture Notes in Math., 1981, v. 876, p. 73–238.
3. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 602 p.

Поступила в редакцию
31.III.2005

© 2005 г.

КРУГЛОВ В. М.*

УСИЛЕНИЕ АРКСИНУС-НЕРАВЕНСТВА ПРОХОРОВА¹⁾

Доказано усиление известного неравенства Прохорова для сумм независимых равномерно ограниченных случайных величин. Аналогичное неравенство доказано для хвостов безгранично делимых функций распределения, спектральные функции которых сосредоточены на некотором сегменте.

Ключевые слова и фразы: случайная величина, мартингал-разность, фильтрация, безгранично делимая функция распределения, спектральная функция.

Неравенство Прохорова, приведенное ниже под первым номером, доказано в статье [1]. Оно обладает высокой точностью и определенной красотой. Возможно, эти качества послужили поводом для авторов монографии [2] сказать (с. 372), что «в случае сумм равномерно ограниченных независимых случайных величин неравенство Прохорова уточняет неравенство Бернштейна и является наилучшим из возможных неравенств». Тем не менее, неравенство Прохорова можно усилить. Например, правая часть неравенства (2) примерно совпадает с квадратом правой части неравенства (1). Более высокая точность достигается усложнением вида неравенства.

Оценка (2) совпадает с оценками (13) хвостов безгранично делимых функций распределения, спектральные меры которых сосредоточены на конечном сегменте. Такая оценка становится возможной благодаря тому, что каждая такая функция распределения является слабым пределом функций распределения сумм равномерно ограниченных независимых случайных величин.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: vkrug@dataforce.net

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 05-01-00535, 05-01-00583.