Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Тимушев, А. Н. Тихомиров, А. А. Холопов, О точности приближения спектра GOE полукруговым законом, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 1, 180–185

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 11:35:01

© 2007 г. ТИМУШЕВ Д. А.*, ТИХОМИРОВ А. Н.**; ХОЛОПОВ А. А.*

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ СПЕКТРА ГОЕ
ПОЛУКРУГОВЫМ ЗАКОНОМ¹⁾

Показано, что расстояние Колмогорова между ожидаемой спектральной функцией распределения случайной матрицы размера $n \times n$ из гауссовского ортогонального ансамбля и функцией распределения полукругового закона имеет порядок $O(n^{-1})$.

Ключевые слова и фразы: случайная матрица, полукруговой закон, функция Эрмита, гауссовский ансамбль.

Пусть $\mathbf{A}$ — эрмитова случайная матрица порядка n , $\lambda_j^{(n)}(\omega)$, $j = 1, \dots, n$, — собственные числа матрицы $\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{A}$. Пусть $F_n(x) = \frac{1}{n} \# \{j: \lambda_j^{(n)}(\omega) \leq x\}$ — спектральная функция распределения матрицы $\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{A}$.

Известно, что ожидаемая спектральная функция распределения $\mathbf{E}F_n(x)$ для широкого класса эрмитовых матриц при $n \rightarrow \infty$ стремится к функции распределения полукругового закона (см. [8]). Скорость сходимости оценивалась в работах многих авторов (см. [1], [3], [4], [5] и литературу к ним). В [5] получена оптимальная оценка $O(n^{-1})$ скорости сходимости для комплекснозначных матриц $\mathbf{A}$ из гауссовского унитарного ансамбля (GUE). По определению GUE (см. [8]), $\sqrt{2} \operatorname{Re} A_{kl}, \sqrt{2} \operatorname{Im} A_{kl}, A_{kk}, A_{ll}$ при $1 \leq k < l \leq n$ независимы в совокупности и распределены нормально со средним 0 и дисперсией σ^2 . Пусть $F_{n,2}(x)$ — нормированная спектральная функция распределения матрицы $\mathbf{A}$ из GUE с параметром $\sigma^2 = 1$. В работе [5, теорема 1.1] получена оценка

$$\Delta_{n,2} := \sup_x |\mathbf{E}F_{n,2}(x) - G(x)| \leq Cn^{-1}, \quad (1)$$

где $G(x)$ — функция распределения полукругового закона с плотностью

$$g(x) = G'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{2-x^2} & \text{при } |x| < \sqrt{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Здесь и далее C обозначает различные положительные константы, не зависящие от n, x .

Рассмотрим вещественную матрицу $\mathbf{A}$ из гауссовского ортогонального ансамбля (GOE). По определению GOE, элементы $\sqrt{2}A_{kl}, A_{kk}, A_{ll}$ при $1 \leq k < l \leq n$ являются гауссовскими независимыми величинами со средним 0 и дисперсией σ^2 . Пусть $F_{n,1}(x)$ — нормированная спектральная функция распределения матрицы $\mathbf{A}$ из GOE при $\sigma^2 = 1$. Нас будет интересовать скорость сходимости ожидаемой спектральной функции распределения $\mathbf{E}F_{n,1}(x)$ к функции распределения полукругового закона $G(x)$ в метрике Колмогорова, т.е. величина

$$\Delta_{n,1} := \sup_x |\mathbf{E}F_{n,1}(x) - G(x)|.$$

В случае гауссовских ансамблей (GUE, GOE) Форрестер, Франкель и Гарони (см. [2], а также [7]) разработали метод, позволяющий получить для плотности ожидаемой спектральной функции распределения $\mathbf{E}F_{n,1}(x)$ асимптотические разложения любых

* Сыктывкарский государственный университет, математический факультет, Октябрьский пр., 55, 167001 Сыктывкар, Россия.

** Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетская наб., 7–9, 199033 Санкт-Петербург, Россия.

¹⁾ Работа поддержана грантами РФФИ 02-01-00233, DFG-Forschergruppe FOR 399/1, совместным грантом РФФИ и ННИО 04-01-04000 и грантом НШ-4222.2006.1.

порядков. Остаточный член полученного асимптотического разложения можно выписать только при фиксированных значениях переменной x , что не дает возможности получать оценки величины $\Delta_{n,1}$ простым интегрированием.

В данной работе доказывается оценка, аналогичная (1) и для $F_{n,1}(x)$.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\Delta_{n,1} \leq Cn^{-1}. \quad (2)$$

Доказательство. Для произвольного $C > 0$ введем интервал

$$I = [-\sqrt{2} + Cn^{-2/3}, \sqrt{2} - Cn^{-2/3}].$$

Заметим, что

$$\sup_x |EF_{n,1}(x) - G(x)| \leq \sup_{x \in I} |EF_{n,1}(x) - G(x)| + G(-\sqrt{2} + Cn^{-2/3}).$$

Принимая во внимание очевидное неравенство

$$G(-\sqrt{2} + Cn^{-2/3}) \leq Cn^{-1},$$

а также оценку (1), получим

$$\sup_x |EF_{n,1}(x) - G(x)| \leq \sup_{x \in I} |EF_{n,1}(x) - EF_{n,2}(x)| + Cn^{-1}.$$

Таким образом, для доказательства (2) достаточно установить оценку

$$|EF_{n,1}(x) - EF_{n,2}(x)| \leq \frac{C}{n} \quad \text{при } x \in I. \quad (3)$$

В случае ансамблей GUE, GOE для $EF_{n,1}(x)$, $EF_{n,2}(x)$ известны точные аналитические выражения. Пусть $H_n(x) = e^{x^2}(-\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$, $n = 1, 2, \dots$, — полиномы Эрмита, $\varphi_n(x) = c_n e^{-x^2/2} H_n(x)$ — функции Эрмита,

$$c_n = (2^n n! \pi^{1/2})^{-1/2}.$$

Обозначим $\sigma_{n,1}, \sigma_{n,2}$ плотности распределений $EF_{n,1}, EF_{n,2}$, соответственно. Тогда из формул (5.2.16), (6.3.2), (6.3.5), (6.4.3) работы [8] после соответствующей нормировки следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{n,2}(x) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k^2(\sqrt{n}x), \\ \sigma_{n,1}(x) &= \sigma_{n,2}(x) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \varphi_{n-1}(\sqrt{n}x) \left[\int_{-\infty}^{\sqrt{n}x} \varphi_n(t) dt - \int_{\sqrt{n}x}^{\infty} \varphi_n(t) dt \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_n(\sqrt{n}x), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\alpha_n(s) = \begin{cases} \varphi_{2m}(s)(2I_{2m})^{-1} & \text{при } n = 2m + 1, \\ 0 & \text{при } n = 2m, \end{cases} \quad (5)$$

$$I_n = \int_0^\infty \varphi_n(t) dt. \quad (6)$$

Функции $\sigma_{n,1}, \sigma_{n,2}$ (как и плотность g полукругового закона) являются четными функциями, поэтому в (3) достаточно ограничиться случаем $x > 0$.

Оценим функцию $\delta_n(x) \equiv EF_{n,1}(x) - EF_{n,2}(x) = \int_0^x [\sigma_{n,1}(s) - \sigma_{n,2}(s)] ds$ по формулам (4)–(6) в области

$$0 < x < \sqrt{2} - Cn^{-2/3}. \quad (7)$$

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного n .

а) Случай $n = 2m$. С учетом четности φ_{2m} из (4)–(5) получаем:

$$\int_{-\infty}^{\sqrt{2m}x} \varphi_{2m}(t) dt - \int_{\sqrt{2m}x}^{\infty} \varphi_{2m}(t) dt = 2 \int_0^{\sqrt{2m}x} \varphi_{2m}(t) dt, \\ \delta_{2m}(x) = \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{2m}x} \varphi_{2m-1}(s) \left(\int_0^s \varphi_{2m}(t) dt \right) ds. \quad (8)$$

Для оценки интегралов воспользуемся асимптотикой для функций $\varphi_n(t)$ из работы [9]. В области

$$|t| \leq (2n+1)^{1/2} - (2n+1)^{-1/6} \quad (9)$$

при $n \rightarrow \infty$ справедливо равенство:

$$\varphi_n(t) = A_n(t) + R_n(t), \quad (10)$$

где

$$A_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2n+1-t^2)^{-1/4} \cos \frac{(2n+1)(2\beta - \sin 2\beta) - \pi}{4}, \quad (11)$$

$$R_n(t) = O\left[(2n+1)^{1/2}(2n+1-t^2)^{-7/4}\right], \quad (12)$$

$$\beta = \beta_n(t) = \arccos t(2n+1)^{-1/2}.$$

Условие (9) для представления в виде (10) функций $\varphi_n(t)$ и $\varphi_n(s)$ в интеграле (8) выполнено, так как $0 < t \leq s \leq \sqrt{n}x < \sqrt{n}(\sqrt{2} - Cn^{-2/3}) < (2n-1)^{1/2} - (2n-1)^{-1/6}$ при достаточно больших n и C в области (7).

Представим подынтегральные функции (8) в виде (10) и запишем $\delta_{2m}(x)$ в виде суммы четырех двойных интегралов: $\delta_{2m}(x) = \delta_{2m}^{(1)}(x) + \delta_{2m}^{(2)}(x) + \delta_{2m}^{(3)}(x) + \delta_{2m}^{(4)}(x)$. Оценим отдельно $\delta_{2m}^{(k)}$, опуская константы, не зависящие от m . Из определения (12) и (7) получаем:

$$\delta_{2m}^{(4)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{2m}x} R_{2m-1}(s) \left(\int_0^s R_{2m}(t) dt \right) ds \\ = \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{2m}x} O\left[\frac{(4m-1)^{1/2}}{(4m-1-s^2)^{7/4}}\right] \left(\int_0^s O\left[\frac{(4m+1)^{1/2}}{(4m+1-t^2)^{7/4}}\right] dt \right) ds \\ = \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{2m}x} O\left[\frac{(4m-1)^{1/2}}{(4m-1-s^2)^{7/4}(4m+1-t^2)^{3/4}}\right] ds \\ = \frac{1}{2\sqrt{m}} O\left[(4m-1-2mx^2)^{-3/2}\right] = O\left[m^{-2}(2-x^2)^{-3/2}\right].$$

Для оценки остальных интегралов $\delta_{2m}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, докажем лемму.

Лемма 1. Справедливо неравенство:

$$\int_0^{\sqrt{n}x} A_{n-1}(s) \left(\int_0^s A_n(t) dt \right) ds = O\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

Доказательство леммы 1. Введем следующие обозначения:

$$q_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2n+1-t^2)^{-1/4}, \quad p_n(t) = \frac{(2n+1)(2\beta - \sin 2\beta) - \pi}{4}, \quad (13)$$

$$I_n(s) = \int_0^s q_n(t) \cos p_n(t) dt.$$

Легко проверить, что

$$q'_n(t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}} (2n+1-t^2)^{-5/4}, \quad p'_n(t) = -\sqrt{2n+1-t^2}, \quad I'_n(s) = q_n(s) \cos p_n(s).$$

Интегрируя $I_n(s)$ по частям, получим

$$I_n(s) = \frac{q_n(t)}{p'_n(t)} \sin p_n(t) \Big|_0^s + \int_0^s \frac{q_n(t) p''_n(t)}{p'^2_n(t)} \sin p_n(t) dt - \int_0^s \frac{q'_n(t)}{p'_n(t)} \sin p_n(t) dt.$$

Отсюда имеем неравенство:

$$|I_n(s)| \leq \int_0^s \frac{q_n(t) p''_n(t)}{p'^2_n(t)} dt - \frac{q_n(s)}{p'_n(s)} - \frac{q_n(0)}{p'_n(0)} - \int_0^s \frac{q'_n(t)}{p'_n(t)} dt \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2(2n+1-s^2)^{-3/4}. \quad (14)$$

Пользуясь последним неравенством и обозначениями (13), интегрируя по частям, мы получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}x} A_{n-1}(s) \left(\int_0^s A_n(t) dt \right) ds &= \int_0^{\sqrt{n}x} I_n(s) q_{n-1}(s) \cos p_{n-1}(s) ds \\ &= I_n(s) \frac{q_{n-1}(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin p_{n-1}(s) \Big|_0^{\sqrt{n}x} + \int_0^{\sqrt{n}x} I_n(s) \frac{q_{n-1}(s) p''_{n-1}(s)}{p'^2_{n-1}(s)} \sin p_{n-1}(s) ds \\ &\quad - \int_0^{\sqrt{n}x} I_n(s) \frac{q'_{n-1}(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin p_{n-1}(s) ds - \int_0^{\sqrt{n}x} I'_n(s) \frac{q_{n-1}(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin p_{n-1}(s) ds \\ &= O \left[n^{-3/2} (2-x^2)^{-3/2} \right] - \int_0^{\sqrt{n}x} \frac{q_{n-1}(s) q_n(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin p_{n-1}(s) \cos p_n(s) ds. \end{aligned}$$

Для оценки последнего интеграла представим его в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}x} \frac{q_{n-1}(s) q_n(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin p_{n-1}(s) \cos p_n(s) ds \\ = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{n}x} \frac{q_{n-1}(s) q_n(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin(p_n(s) + p_{n-1}(s)) ds \\ - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{n}x} \frac{q_{n-1}(s) q_n(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin(p_n(s) - p_{n-1}(s)) ds. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, легко убедиться, что

$$\int_0^{\sqrt{n}x} \frac{q_{n-1}(s) q_n(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin(p_n(s) + p_{n-1}(s)) ds = O \left[n^{-3/2} (2-x^2)^{-3/2} \right].$$

Заметим, что $0 < \beta_n(s) \leq \pi/2$ при $0 < s \leq \sqrt{n}x$. Используя этот факт, а также очевидное тождество $\sin 2\beta_n - \sin 2\beta_{n-1} = \sin(2\beta_n - 2\beta_{n-1}) - 4 \sin \beta_n \sin \beta_{n-1} \sin(\beta_n - \beta_{n-1})$, мы получим:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\sqrt{n}x} \frac{q_{n-1}(s) q_n(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin(p_n(s) - p_{n-1}(s)) ds \right| \\ \leq C \int_0^{\sqrt{n}x} \frac{|p_n(s) - p_{n-1}(s)|}{2n - s^2} ds \leq C \int_0^{\sqrt{n}x} \frac{2\beta_n(s) - \sin 2\beta_n(s)}{2n - s^2} ds \\ + Cn \int_0^{\sqrt{n}x} \frac{2\beta_n(s) - 2\beta_{n-1}(s) - \sin(2\beta_n(s) - 2\beta_{n-1}(s))}{2n - s^2} ds \\ + Cn \int_0^{\sqrt{n}x} \frac{\sin \beta_n(s) \sin \beta_{n-1}(s) \sin(\beta_n(s) - \beta_{n-1}(s))}{2n - s^2} ds \\ \leq C \int_0^{\sqrt{n}x} \frac{\sin^3 \beta_n(s)}{2n - s^2} ds + Cn \int_0^{\sqrt{n}x} \frac{\sin^3(\beta_n(s) - \beta_{n-1}(s))}{2n - s^2} ds \\ + Cn \int_0^{\sqrt{n}x} \frac{\sin \beta_n(s) \sin \beta_{n-1}(s) \sin(\beta_n(s) - \beta_{n-1}(s))}{2n - s^2} ds \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Непосредственно из леммы 1 имеем:

$$\delta_{2m}^{(1)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{2m}x} A_{2m-1}(s) \left(\int_0^s A_{2m}(t) dt \right) ds = O\left[\frac{1}{m}\right].$$

Используя оценку (14) леммы 1 и определение (12), получим

$$\begin{aligned} \delta_{2m}^{(3)}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{2m}x} R_{2m-1}(s) \left(\int_0^s A_{2m}(t) dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{2m}x} O\left[\frac{(4m-1)^{1/2}}{(4m-1-s^2)^{7/4}}\right] \cdot O\left[\frac{1}{(4m+1-s^2)^{3/4}}\right] ds \\ &= O\left[\frac{1}{m^2(2-x^2)^{3/2}}\right]. \end{aligned}$$

Аналогично, после изменения порядка интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned} \delta_{2m}^{(2)}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{2m}x} A_{2m-1}(s) \left(\int_0^s R_{2m}(t) dt \right) ds \\ &= \int_0^{\sqrt{2m}x} R_{2m}(t) \left(\int_t^{\sqrt{2m}x} A_{2m-1}(s) ds \right) dt = O\left[\frac{1}{m^2(2-x^2)^{3/2}}\right]. \end{aligned}$$

Из оценок для $\delta_{2m}^{(k)}(x)$, полученных выше, в области (7) следует оценка $\delta_{2m}(x) = O[m^{-1}]$. Поэтому (3) выполнено и, тем самым, теорема для четного n доказана.

б) *Случай $n = 2m + 1$.* С учетом нечетности φ_{2m+1} из (4)–(5) получаем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m+1}(t) dt - \int_{\sqrt{2m+1}x}^{\infty} \varphi_{2m+1}(t) dt = 2 \int_0^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m+1}(t) dt - 2I_{2m+1}, \\ \delta_{2m+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{4m+2}} \int_0^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m}(s) \left(\int_0^s \varphi_{2m+1}(t) dt \right) ds \\ &\quad + k_m \int_0^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m}(t) dt, \end{aligned} \quad (15)$$

где I_n — интегралы (6),

$$k_m = \frac{1}{2(2m+1)I_{2m}} - \frac{I_{2m+1}}{\sqrt{4m+2}}. \quad (16)$$

Первое слагаемое (15) оценивается так же, как и в случае четного n . Рассмотрим второе слагаемое. Из (10)–(12) и оценки (14) леммы 1 получаем:

$$\int_0^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m}(t) dt = O\left[m^{-3/4}(2-x^2)^{-3/4}\right]. \quad (17)$$

Для оценки константы k_m докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$I_n = O(n^{-1/4}). \quad (18)$$

Доказательство леммы 2. Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного n . В случае четного $n = 2m$, пользуясь равенством [6, 7.373.2], получим

$$I_{2m} = \int_0^{\infty} \varphi_{2m}(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} c_{2m} \frac{(2m)!}{m!},$$

откуда, пользуясь формулой Стирлинга, будем иметь

$$I_{2m} = O(m^{-1/4}).$$

Рассмотрим случай нечетного $n = 2m + 1$. Принимая во внимание равенство

$$H_{2m+1}(t) = 2tH_{2m}(t) - 4mH_{2m-1}(t),$$

интегрированием по частям получаем рекуррентное соотношение

$$\int_0^\infty e^{-t^2/2} H_{2m+1}(t) dt = H_{2m}(0) + 4m \int_0^\infty e^{-t^2/2} H_{2m-1}(t) dt.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty e^{-t^2/2} H_{2m+1}(t) dt = \sum_{k=0}^m 2^{n-k+1} H_{2k}(0) \frac{(2n)!!}{(2k)!!}.$$

Замечая, что

$$H_{2k}(0) = (-1)^k 2^k (2k-1)!!,$$

получим

$$\int_0^\infty e^{-t^2/2} H_{2m+1}(t) dt = 2^{2m+1} m! \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Так как сумма в последнем равенстве не превосходит 1, а $c_{2m+1} 2^{2m+1} m! = O(m^{-1/4})$, имеем

$$I_{2m+1} = O(m^{-1/4}).$$

Лемма 2 доказана.

Закончим доказательство теоремы. Используя оценку (18), получаем из (16) равенство $k_m = O(m^{-3/4})$. Вместе с (17) это дает нужную оценку второго слагаемого в (15):

$$k_m \int_0^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m}(t) dt = O\left[m^{-3/4}\right] \cdot O\left[m^{-3/4}(2-x^2)^{-3/4}\right] = O\left[m^{-3/2}(2-x^2)^{-3/4}\right].$$

Нетрудно убедиться, что обе оценки для слагаемых (15) являются $O[m^{-1}]$ в области (7), поэтому (3) выполнено и при нечетном n . Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bai Z. D. Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices, a review. — *Statist. Sinica*, 1999, v. 9, № 3, p. 611–677.
2. Garoni T. M., Forrester P. J., Frankel N. E. Asymptotic corrections to the eigenvalue density of the GUE and LUE. — *J. Math. Phys.*, 2005, v. 46, № 10, 17 p.
3. Götze F., Tikhomirov A. Rate of convergence to the semi-circular law. — *Probab. Theory Related Fields*, 2003, v. 127, № 2, p. 228–276.
4. Götze F., Tikhomirov A. N. Rate of convergence to the semi-circular law for the Gaussian unitary ensemble. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, т. 47, в. 2, с. 381–387.
5. Götze F., Tikhomirov A. The rate of convergence for spectra of GUE and LUE matrix ensembles. — *Cent. Eur. J. Math.*, 2005, v. 3, № 4, p. 666–704 (electronic).
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 5-е изд. М.: Наука, 1971, 1108 с.
7. Kalisch F., Braak F. Exact density of states for finite Gaussian random matrix ensembles via supersymmetry. — *J. Phys. A*, 2002, v. 35, № 47, p. 9957–9969.
8. Mehta M. L. *Random Matrices*. 3rd ed. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2004, 708 p.
9. Muckenhoupt B. Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I, II. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1970, v. 147, p. 419–431, p. 433–460.

Поступила в редакцию
26.IV.2006