Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Кузнецова, О сходимости к равномерному распределению, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 4, 774–776

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:32:01

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прохоров Ю. В. Одна экстремальная задача теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1959, т. 4, в. 2, с. 211–214.
2. de la Peña V. H., Giné E. Decoupling. New York: Springer-Verlag, 1999, 392 p.
3. Levental S. A. A uniform CLT for uniformly bounded families of martingale differences. — J. Theoret. Probab., 1989, v. 2, № 3, p. 271–287.
4. Hitczenko P. Best constants in martingale version of Rosenthal's inequality. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 4, p. 1656–1668.
5. Bennett G. Probability inequalities for the sum of independent random variables. — J. Amer. Statist. Assoc., 1962, v. 57, p. 33–45.
6. Bennett G. On the probability of large deviations from the expectation for sums of bounded, independent random variables. — Biometrika, 1963, v. 50, p. 528–535.
7. Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables. — J. Amer. Statist. Assoc., 1963, v. 58, № 301, p. 13–30.
8. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986, 534 с.
9. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.–Л.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
10. Круглов В. М., Антонов С. Н. Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 4, с. 625–642.

Поступила в редакцию
8.XI.2005

© 2005 г.

КУЗНЕЦОВА А. Я.*

О СХОДИМОСТИ К РАВНОМЕРНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

Рассматриваются суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. Приводится пример, в котором при неограниченном росте числа слагаемых плотности вероятностей $p_n(x)$ дробных частей этих сумм сходятся к единице в смысле

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{p}_n(x) - 1| dx \rightarrow 0,$$

но не сходятся к единице в равномерной метрике

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\tilde{p}_n(x) - 1|.$$

Ключевые слова и фразы: дробные части, случайные величины, равномерные распределения, сходимость «по вариации».

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Предположим, что $EX_k = 0$, $DX_k = \sigma^2$ и что существует плотность $p(x; X_k)$. Рассмотрим распределение дробной части $\{S_n\}$. Мы приводим пример, в котором плотность $p(x; \{S_n\})$ не сходится в равномерном смысле к 1 на отрезке $[0, 1]$, но распределение $\{S_n\}$ сходится к равномерному на $[0, 1]$ распределению по вариации. Этот пример напоминает пример, указанный в § 46 книги [1], но как в русском издании, так и в английском [2] имеется неточность, которую мы здесь исправляем.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

Определим плотность вероятности $p(x) = p(x; X_k)$ формулами

$$p(x) = \frac{1}{|x|(\ln x)^2}, \quad |x| \leq \frac{1}{e^2}, \quad p(x) = 0, \quad |x| > \frac{1}{e^2}.$$

При $0 < x < 1/e^2$ функция $x(\ln x)^2$ возрастает, так как ее производная $x \cdot 2 \ln x \cdot 1/x + (\ln x)^2 = \ln x(2 + \ln x) > 0$. Соответственно, при $0 < x < 1/e^2$ функция $p(x)$ убывает.

Обозначим $p_n(x) = p(x; S_n)$.

Лемма 1. При $n \geq 2$ и $0 < x < 1/e^2$

$$p_n(x) \geq \frac{(n-1)!}{x|\ln x|^{n+1}}. \quad (1)$$

Доказательство. Неравенство (1) верно при $n = 2$, так как

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x-z)p(z)dz \geq \int_0^x p(x-z)p(z)dz \geq p(x) \int_0^x \frac{1}{z(\ln z)^2} dz \\ &= p(x) \int_{-\ln x}^{\ln x} \frac{dv}{v^2} = p(x) \frac{1}{|\ln x|} = \frac{1}{x(\ln x)^2}. \end{aligned}$$

Пусть (1) доказано для какого-либо $n = k \geq 2$, докажем его для $n = k+1$. Опять используя формулу свертки, полагая $0 < x < 1/e^2$, получаем

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x) &\geq \int_0^x p(x-z)p_k(z)dz \geq p(x) \int_0^x \frac{(k-1)!}{z|\ln z|^{k+1}} dz \\ &= p(x) \int_{-\ln x}^{\ln x} \frac{(k-1)! dv}{|v|^{k+1}} = p(x) \frac{(k-1)! k}{|\ln x|^k} = \frac{k!}{x|\ln x|^{k+2}}. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (1) доказано для всех $n \geq 2$.

Заметим теперь, что при $0 < x < 1$

$$p(x; \{S_n\}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(x+k; S_n). \quad (2)$$

Из этого соотношения и леммы 1 получаем следующий результат.

Следствие. При $0 < x < 1$

$$p(x; \{S_n\}) \geq p(x; S_n) \geq \frac{(n-1)!}{x|\ln x|^{n+1}},$$

и, таким образом, $p(x; \{S_n\})$ не может стремиться к 1 равномерно при $0 < x < 1$.

Для доказательства сходимости распределения $\{S_n\}$ к равномерному распределению на $[0, 1]$ воспользуемся теоремой 1 заметки Ю. В. Прохорова [3], в которой даны необходимые и достаточные условия сходимости распределений нормированных сумм

$$S_n^* = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}, \quad \mathbf{E}X_k = 0, \quad \mathbf{D}X_k = \sigma^2,$$

независимых одинаково распределенных случайных величин к стандартному нормальному закону «по вариации». В нашем примере эти условия выполнены и

$$\rho_n = \sup_{A \in \mathcal{B}^1} |\mathbf{P}\{S_n^* \in A\} - \Phi(A)| \rightarrow 0 \quad (3)$$

при $n \rightarrow \infty$, где $\mathcal{B}^1$ — класс борелевских множеств числовой прямой, а

$$\Phi(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-z^2/2} dz.$$

Обозначим $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $Z_n^* = (Z_1 + \dots + Z_n)/\sqrt{n}$. Тогда $\Phi(A) = \mathbf{P}\{Z_n^* \in A\}$.

Сформулируем теперь известные свойства расстояния «по вариации».

Лемма 2. Пусть U и V — какие-либо случайные величины и $h(x)$ — измеримая по Борелю функция, определенная на $\mathbf{R}^1$; тогда

$$\sup_{B \in \mathcal{B}^1} |\mathbf{P}\{h(U) \in B\} - \mathbf{P}\{h(V) \in B\}| \leq \sup_{A \in \mathcal{B}^1} |\mathbf{P}\{U \in A\} - \mathbf{P}\{V \in A\}|. \quad (4)$$

Возьмем функцию $h(x) = \{x\sigma\sqrt{n}\}$ и положим $U = S_n^*$, $V = Z_n^*$. Тогда $h(U) = \{S_n\}$, а $h(V) = \{\hat{S}_n\}$, где $\hat{S}_n = (Z_1 + \dots + Z_n)\sigma$.

Из леммы 2 и формулы (3) мы заключаем, что расстояние «по вариации» между распределениями случайных величин $\{S_n\}$ и $\{\hat{S}_n\}$ не превосходит ρ_n .

Из формулы суммирования Пуассона следует (см., например, [4]), что

$$p(x; \{\hat{S}_n\}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m x} e^{-2\pi^2 m^2 \sigma^2 n},$$

и при $0 < x < 1$

$$|p(x; \{\hat{S}_n\}) - 1| \leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\pi^2 m^2 \sigma^2 n} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} q_n^{m^2} \leq 2 \sum_{l=1}^{\infty} q_n^l \leq 2q_n \frac{1}{1 - q_n},$$

где $q_n = e^{-2\pi^2 \sigma^2 n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Мы приходим к следующему утверждению: расстояние по вариации между распределением $\{S_n\}$ и равномерным на $[0, 1]$ распределением не превосходит

$$\rho_n + \int_0^1 |p(x; \{\hat{S}_n\}) - 1| dx \leq \rho_n + 2q_n \frac{1}{1 - q_n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
2. Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N. Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1954, 264 p.
3. Прохоров Ю. В. Локальные теоремы для плотностей. — Докл. АН СССР, 1952, т. 83, № 6, с. 797–800.
4. Куликова А. А., Прохоров Ю. В. Распределение дробных долей случайных векторов: гауссовский случай. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, № 2, с. 399–402.

Поступила в редакцию
15.XI.2005

© 2005 г. КУЛИКОВА А. А.*, ПРОХОРОВ Ю. В.**; ХОХЛОВ В. И.**

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ: ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙ. II.¹⁾

В статье уточняются неравенства для отклонения плотности дробной части s -мерного гауссовского случайного вектора от 1 (плотности равномерного распределения), полученные в части I [2].

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: anna_q@mail.ru

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: tvp@tvp.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов № НШ-1758.2003.1 и ИНТАС № 03-51-50-18.