Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Куликова, Ю. В. Прохоров, В. И. Хохлов, Распределение дробных долей случайных векторов: гауссовский случай. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 4, 776–778

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:10:20

Лемма 2. Пусть U и V — какие-либо случайные величины и $h(x)$ — измеримая по Борелю функция, определенная на $\mathbf{R}^1$; тогда

$$\sup_{B \in \mathcal{B}^1} |\mathbf{P}\{h(U) \in B\} - \mathbf{P}\{h(V) \in B\}| \leq \sup_{A \in \mathcal{B}^1} |\mathbf{P}\{U \in A\} - \mathbf{P}\{V \in A\}|. \quad (4)$$

Возьмем функцию $h(x) = \{x\sigma\sqrt{n}\}$ и положим $U = S_n^*$, $V = Z_n^*$. Тогда $h(U) = \{S_n\}$, а $h(V) = \{\hat{S}_n\}$, где $\hat{S}_n = (Z_1 + \dots + Z_n)\sigma$.

Из леммы 2 и формулы (3) мы заключаем, что расстояние «по вариации» между распределениями случайных величин $\{S_n\}$ и $\{\hat{S}_n\}$ не превосходит ρ_n .

Из формулы суммирования Пуассона следует (см., например, [4]), что

$$p(x; \{\hat{S}_n\}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m x} e^{-2\pi^2 m^2 \sigma^2 n},$$

и при $0 < x < 1$

$$|p(x; \{\hat{S}_n\}) - 1| \leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\pi^2 m^2 \sigma^2 n} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} q_n^{m^2} \leq 2 \sum_{l=1}^{\infty} q_n^l \leq 2q_n \frac{1}{1 - q_n},$$

где $q_n = e^{-2\pi^2 \sigma^2 n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Мы приходим к следующему утверждению: расстояние по вариации между распределением $\{S_n\}$ и равномерным на $[0, 1]$ распределением не превосходит

$$\rho_n + \int_0^1 |p(x; \{\hat{S}_n\}) - 1| dx \leq \rho_n + 2q_n \frac{1}{1 - q_n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
2. Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N. Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1954, 264 p.
3. Прохоров Ю. В. Локальные теоремы для плотностей. — Докл. АН СССР, 1952, т. 83, № 6, с. 797–800.
4. Куликова А. А., Прохоров Ю. В. Распределение дробных долей случайных векторов: гауссовский случай. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, № 2, с. 399–402.

Поступила в редакцию
15.XI.2005

© 2005 г. КУЛИКОВА А. А.*, ПРОХОРОВ Ю. В.**; ХОХЛОВ В. И.**

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ: ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙ. II.¹⁾

В статье уточняются неравенства для отклонения плотности дробной части s -мерного гауссовского случайного вектора от 1 (плотности равномерного распределения), полученные в части I [2].

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: anna-q@mail.ru

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: tvp@tvp.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов № НШ-1758.2003.1 и ИНТАС № 03-51-50-18.

Ключевые слова и фразы: равномерное распределение, формула суммирования Пуассона, дробные доли гауссовских векторов

В статье используются обозначения части I.

Оценки близости плотности дробной части s -мерного гауссовского случайного вектора к 1 (плотности равномерного распределения), полученные в части I, использовали свойства $r_s(N)$ (числа целых точек на сфере радиуса $\sqrt{N}$ в $\mathbf{R}^s$) и их сумм (числа целых точек в замкнутом шаре). В этой статье уточняются неравенства для случаев $s = 4$ и $s = 8$.

Уточнение для $s = 8$ основано на следующем утверждении, описывающем свойства $r_8(N)$.

Утверждение. При $N > 1$ выполняются неравенства

$$14N^3 \leq r_8(N) \leq 16\zeta(3)N^3,$$

причем константы, входящие в них, неулучшаемы (т.е. 14 нельзя заменить на $14+\varepsilon$ и $16\zeta(3)$ нельзя заменить на $16\zeta(3)-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$).

Доказательство. Подставляя в формулу из [1] (формула в начале 20.13, с. 314) $d' = N/d$, имеем:

$$r_8(N) = 16N^3 \left(1 + \sum_{d'|N, d' \geq 2} (-1)^N (-1)^{N/d'} \frac{1}{d'^3} \right).$$

Заменяя слагаемые их абсолютными значениями, получаем оценку сверху

$$r_8(N) \leq 16N^3 \left(1 + \sum_{d'|N, d' \geq 2} \frac{1}{d'^3} \right) \leq 16N^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} = 16N^3 \zeta(3).$$

Рассмотрим $N = K!$ ($K \geq 4$). Выделим первые K делителей (отличных от 1): $d' = 2, 3, 4, \dots, K$. Для всех таких d' число N/d' — четное, и

$$r_8(N) \geq 16N^3 \left(1 + \sum_{m=2}^K \frac{1}{m^3} - \sum_{m=K+1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \right) = 16N^3 \left(\zeta(3) - 2 \sum_{m=K+1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \right).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое K , что

$$2 \sum_{m=K+1}^{\infty} \frac{1}{m^3} < \varepsilon,$$

и таким образом доказана неулучшаемость оценки сверху.

Рассмотрим $N = 2p$, где $p > 2$ есть простое число. Так как N имеет три делителя (отличных от 1): $d' = 2, p$ и $2p$, а число N/d' четно при $d' = p$ и нечетно при $d' = 2, 2p$, то

$$r_8(N) = 16N^3 \left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{8p^3} \right) = 14N^3 \left(1 + \frac{1}{p^3} \right).$$

Таким образом, выбирая N равным удвоенному простому числу, можно сколько угодно близко подойти к значению 14.

Докажем, что $r_8(N)$ не может быть меньше $14N^3$. Представим N в виде $N = 2^\alpha N'$, где N' нечетно и $\alpha \geq 0$.

При $\alpha = 0$ число N и все его делители — нечетные числа, и

$$r_8(N) = 16N^3 \left(1 + \sum_{d'|N, d' \geq 2} \frac{1}{d'^3} \right) > 16N^3.$$

При $\alpha > 0$ делителями N являются числа $d' = 2, \dots, 2^\alpha; d'', 2d'', \dots, 2^\alpha d''$, где d'' — делители N' (нечетные числа). Число N — четное, N/d' — четное при $d' = 2, \dots, 2^{\alpha-1}$, и N/d' — нечетное для $d' = 2^\alpha$. Аналогично, для каждого d'' число N/d' четно при $d' = d'', 2d'', \dots, 2^{\alpha-1}d''$ и нечетно при $d' = 2^\alpha d''$. Таким образом,

$$r_8(N) = 16N^3 \left(1 + \sum_{m=1}^{\alpha-1} \frac{1}{(2^m)^3} - \frac{1}{(2^\alpha)^3} + \sum_{d''|N', d'' \geq 2} \left(\sum_{m=0}^{\alpha-1} \frac{1}{(2^m)^3} - \frac{1}{(2^\alpha)^3} \right) \frac{1}{d''^3} \right) > 14N^3,$$

и оценка снизу доказана.

Следствие. При любом N_0

$$\frac{7}{2} N_0^2 (1 + N_0)^2 \leq 1 + r_8(1) + \dots + r_8(N_0) \leq 4\zeta(3) N_0^2 (1 + N_0)^2.$$

Пусть $\mathbf{X}$ — гауссовский случайный вектор в пространстве $\mathbf{R}^s$ с нулевым средним и матрицей ковариации Σ , $\lambda > 0$ — минимальное положительное собственное значение Σ .

Отклонение случайной величины $\{\sigma\mathbf{X}\}$ ($\sigma > 0$) от равномерного распределения в кубе $[0, 1]^s$ оценивается следующим образом (см. [2]):

$$\Delta = \sup_{\mathbf{x} \in [0, 1]^s} |p(\mathbf{x}; \{\sigma\mathbf{X}\}) - 1| \leq \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{m}: |\mathbf{m}|^2 = N} e^{-2\pi^2 \sigma^2 \lambda N} = \sum_{N=1}^{\infty} r_s(N) q^N,$$

где $q = e^{-2\pi^2 \sigma^2 \lambda}$.

Пользуясь утверждением, получаем: при $s = 8$

$$\Delta \leq 16\zeta(3) \sum_{N=1}^{\infty} N^3 q^N = \frac{16\zeta(3)(1 + 4q + q^2)}{(1 - q)^4} q.$$

Анализ случая $s = 8$ помогает изучить случай размерности, кратной 8, что будет сделано в последующих публикациях.

В случае $s = 4$ улучшение неравенства может быть получено за счет более точной оценки ряда

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{Nq^N}{1 - q^N}.$$

Запишем его следующим образом:

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{Nq^N}{1 - q^N} = \frac{q}{1 - q} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{Nq^{N-1}}{1 + q + \dots + q^{N-1}}.$$

Для любого четного $N = 2m$, $m \geq 1$ имеем:

$$\frac{Nq^{N-1}}{1 + q + \dots + q^{N-1}} \leq \frac{2mq^{2m-1}}{1 + q + \dots + q^{m-1}} \leq \frac{2mq^{2m-1}}{mq^{m-1}} = 2q^m.$$

Для любого нечетного $N = 2m + 1$, $m \geq 1$ имеем:

$$\frac{Nq^{N-1}}{1 + q + \dots + q^{N-1}} \leq \frac{(2m + 1)q^{2m}}{1 + q + \dots + q^m} \leq \frac{(2m + 1)q^{2m}}{(m + 1)q^m} = \frac{(2m + 1)q^m}{m + 1} \leq 2q^m.$$

Таким образом,

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{Nq^N}{1 - q^N} \leq \frac{q}{1 - q} (1 + 4q + 4q^2 + \dots) = \frac{q}{1 - q} \left(1 + \frac{4q}{1 - q}\right)$$

и (см. [2])

$$\Delta \leq 8 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{Nq^N}{1 - q^N} \leq \frac{8(1 + 3q)}{(1 - q)^2} q.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers. 4th ed. Oxford: Clarendon Press, 1960, 421 p.
2. Куликова А. А., Прохоров Ю. В. Распределение дробных долей случайных векторов: гауссовский случай. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 399–402.

Поступила в редакцию
16.XI.2005