Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Липчюс, Замечание о равенстве в задачах Монжа и Канторовича, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 4, 779–782

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:55:18

© 2005 г.

ЛИПЧЮС А. А.*

ЗАМЕЧАНИЕ О РАВЕНСТВЕ
В ЗАДАЧАХ МОНЖА И КАНТОРОВИЧА¹⁾

Целью данной статьи является обобщение классического результата о равенстве инфимума Монжа и минимума Канторовича в задаче оптимального переноса масс.

Ключевые слова и фразы: инфимум Монжа, минимум Канторовича, задача переноса масс, суслинские пространства.

Целью данной статьи является обобщение классического результата о равенстве инфимума Монжа и минимума Канторовича в задаче оптимального переноса масс (см. [1], постановки задач напоминаются ниже). Это равенство было давно известно для польских пространств и непрерывных ограниченных ценовых функций. В работе [2] удалось доказать равенство для неограниченных непрерывных функций и польских пространств. Ниже получен аналогичный результат в более общем случае, когда рассматриваются радоновские меры на вполне регулярных пространствах, в которых все компакты метризуемы. Используется план доказательства, предложенный в [2], однако при этом в рассуждения внесены ряд упрощений, а дополнительные соображения позволили заметно расширить класс рассматриваемых пространств.

Введем обозначения. Пусть μ и ν — ограниченные неотрицательные радоновские меры на топологических пространствах X и Y , причем $\mu(X) = \nu(Y)$. Положим

$$\mu \boxtimes \nu := \frac{\mu \otimes \nu}{\mu(X)}.$$

Пусть $T: X \rightarrow Y$ — борелевское отображение, γ — радоновская мера на $X \times Y$, c — непрерывная неотрицательная функция на $X \times Y$. Положим

$$M(T) := \int_X c(x, T(x)) d\mu, \quad K(\gamma) := \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma.$$

Через $\pi_X \gamma$ и $\pi_Y \gamma$ будем обозначать проекцию γ на X и Y соответственно. Задача Монжа состоит в нахождении борелевских отображений T , переводящих μ в ν и минимизирующих $M(T)$. Проблема Канторовича — найти меру γ на $X \times Y$ с $\pi_X \gamma = \mu$ и $\pi_Y \gamma = \nu$, минимизирующую величину $K(\gamma)$. Ясно, что минимум (или инфимум) Канторовича не превосходит инфимума Монжа, ибо для всякого отображения T , переводящего μ в ν , мера γ , являющаяся образом μ при отображении $x \mapsto (x, T(x))$, имеет в качестве проекций μ и ν . Как показано ниже, на самом деле инфимум Монжа равен минимуму Канторовича. Точная формулировка приведена далее.

Замыкание множества A в топологическом пространстве будем обозначать через $\bar{A}$. Пусть I — конечная или бесконечная двоичная (т.е. состоящая из нулей и единиц) последовательность. Тогда через I_k будем обозначать первые k символов в I , если I имеет не менее k символов. Через $l(I)$ будем обозначать число символов в конечной числовой последовательности. Через $\|\sigma\|$ обозначаем полную вариацию меры σ . Следующая лемма распространяет доказанное в [2] в случае польских пространств на вполне регулярные пространства с метризуемыми компактами.

Лемма 1. Пусть μ — вероятностная радоновская мера на вполне регулярном пространстве X с метризуемыми компактами. Тогда для каждой двоичной последовательности I существуют борелевские множества $X_I \subseteq X$ и меры μ_I со следующими свойствами:

- 1) $\|\mu\| = 2^{-k}$ для любой последовательности длины k ,

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ 04-01-00748 и гранта DFG 436 RUS 113/343/0(R).

- 2) $\mu_I = \mu_{(I,0)} + \mu_{(I,1)}$, причем $\mu = \sum_{l(I)=k} \mu_I$,
- 3) X_I имеет полную μ_I -меру,
- 4) если $I \leq J$, то $X_J \subseteq X_I$,
- 5) множество счетных двочных последовательностей, для которых $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bar{X}_{I_k}$ состоит более чем из одной точки, не более чем счетно,
- 6) если у μ нет атомов, то для любого натурального k множества X_I с $l(I) = k$ открыты и дизъюнкты; при этом $\mu_I = \mu|_{X_I}$,
- 7) все μ_I — радоновские.

Доказательство. Ясно, что радоновская мера на вполне регулярном топологическом пространстве с метризуемыми компактами сосредоточена на суслинском множестве. Поэтому без потери общности можно считать что X является вполне регулярным суслинским. Воспользуемся тем фактом, что на вполне регулярном суслинском пространстве существует счетное семейство непрерывных функций, разделяющих точки. Это означает, что всякое вполне регулярное суслинское пространство можно считать подмножеством $\mathbb{R}^\infty$ с более сильной топологией, т.е. можно считать, что на X задана метрика ϱ , причем ϱ -открытые множества являются открытыми в X . При этом граница любого множества в X -топологии лежит в границе относительно ϱ -топологии. Так как $\mathbb{R}^\infty$ сепарабельно, то в X существует счетное семейство таких точек x_n , что шарами сколь угодно малого радиуса по метрике ϱ с центрами в этих точках можно покрыть X . Построим по индукции множества B_I , где I — конечная последовательность натуральных чисел. На первом шаге построим множества B_n , $n \in \mathbb{N}$. Для каждого x_n выберем $r_n \in [1, \frac{1}{2}]$ так, чтобы шар с центром в x_n радиуса r_n имел ϱ - (а значит, и X -) границу μ -меры нуль. Положим $B_1 = B(z_1, r_1)$, $B_n = B(z_n, r_n) \setminus (\bar{B}_1 \cup \dots \cup \bar{B}_{n-1})$, $n \geq 2$. Тогда $\mu(B_n \setminus B_n) = 0$, $\mu(\cup B_n) = 1$. Далее действуем по индукции: если определены B_I , $l(I) \leq n-1$, то продолжим построение, заменив в первом шаге X на B_I , μ на $\mu|_{B_I}$, $\{x_n\}$ на аналогичную последовательность в B_I , $\frac{1}{2}$ и 1 на 2^{-n} и 2^{1-n} соответственно. Теперь построим по индукции X_I и μ_I . Положим $B_J^I := B_I \cap X_J$; считаем, что $X_\emptyset = X$, $\mu_\emptyset = \mu$. Пусть $l(J) = n$. Найдём j_1 такое, что

$$\mu_J(B_1^J \cup \dots \cup B_{j_1-1}^J) \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \mu_J(B_1^J \cup \dots \cup B_{j_1}^J).$$

Положим $X_0^1 := B_1^J \cup \dots \cup B_{j_1-1}^J$, $X_1^1 := B_{j_1+1}^J \cup B_{j_1+2}^J \cup \dots$. Тогда X_0^1 и X_1^1 — открытые непересекающиеся множества с мерами, меньшими $1/2^{n+1}$. Теперь найдём такое j_2 , что

$$\mu_J(X_0^1 \cup B_{j_1,1}^J \cup \dots \cup B_{j_1,j_2-1}^J) \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \mu_J(X_0^1 \cup B_{j_1,1}^J \cup \dots \cup B_{j_1,j_2}^J).$$

Положим $X_0^2 := X_0^1 \cup B_{j_1,1}^J \cup \dots \cup B_{j_1,j_2-1}^J$, $X_1^2 := X_1^1 \cup B_{j_1,j_2+1}^J \cup B_{j_1,j_2+2}^J \cup \dots$. Тогда X_0^2 и X_1^2 — открытые непересекающиеся множества с мерами менее $1/2^{n+1}$. Продолжая построение, получим множества X_0^i , X_1^i с теми же свойствами. Положим $\hat{X}_0 = \bigcup_i X_0^i$, $\hat{X}_1 = \bigcup_i X_1^i$. Заметим, что $X_J \setminus (\hat{X}_0 \cup \hat{X}_1) = \bigcap_k B_{j_1, \dots, j_k}^J$ состоит не более чем из одной точки. Если μ не имеет атомов или пересечение пусто, положим $X_{(J,0)} := \hat{X}_0$, $X_{(J,1)} := \hat{X}_1$ и получим открытые непересекающиеся множества меры $1/2^{n+1}$, $\mu_{(J,0)} := \mu|_{X_{(J,0)}}$, $\mu_{(J,1)} := \mu|_{X_{(J,1)}}$. В противном случае положим $X_{(J,i)} := \hat{X}_i \cup \{z\}$ и $\mu_{(J,i)} := \mu|_{\hat{X}_i} + (1/2^{n+1} - \mu_J(\hat{X}_i))\delta_z$, $i = 0, 1$. В обоих случаях $\mu_J = \mu_{(J,0)} + \mu_{(J,1)}$. Из самого построения видно, что построенные множества и меры обладают нужными свойствами. Дополнительного доказательства требует лишь свойство 5).

По построению для двух конечных бинарных последовательностей J и L одинаковой длины существует не более одной счетной бинарной последовательности I с тем свойством, что $X_{I_k} \cap B_J \neq \emptyset$, $X_{I_k} \cap B_L \neq \emptyset$ для всех натуральных k . Будем обозначать эту последовательность через $I(J, L)$. Пусть $A = \{I(J, L)\}$, J и L — конечные последовательности одинаковой длины. Тогда A не более чем счетно. Покажем, что для всех остальных $I \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$ множество $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bar{X}_{I_k}$ состоит не более чем из одной точки. Для этого достаточно показать, что $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_{I_k}$ состоит не более чем из одной точки, так как $\bar{X}_{I_k} \subset X_{I_{k-1}}$. Для этого в свою очередь достаточно показать, что

$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_{I_k} \subset B_{J^n}$, где J^n — последовательность длины n , $n \rightarrow \infty$. Докажем это по индукции. Последовательность множеств $T_k := \{m \in \mathbb{N}: X_{I_k} \cap B_m \neq \emptyset\}$ убывает. При этом пересечение не может содержать более одной точки, так как иначе $I = I(j, l) \in A$, где j и l — элементы пересечения. Так как $\bigcap_k T_k = \{m \in \mathbb{N}: (\bigcap_k X_{I_k}) \cap B_m \neq \emptyset\} = j$, то мы получили наше утверждение для $n = 1$. Переходя к B_j и заменяя в определении T_k множества B_m на $B_{j,m}$, делаем шаг индукции. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. Пусть X и Y — вполне регулярные топологические пространства, в которых все компакты метризуемы, c — непрерывная функция на $X \times Y$, а μ и ν — вероятностные радоновские меры на X и Y соответственно. Пусть μ не имеет атомов. Тогда существует борелевское отображение T , переводящее μ в ν и обладающее следующим свойством: $M(T) \leq K(\mu \otimes \nu)$.

Доказательство. Как отмечено выше при доказательстве леммы, без потери общности можно считать, что X и Y являются вполне регулярными суслинскими пространствами. Как и в [2], с помощью леммы найдем соответствующие X_I, Y_I, μ_I и ν_I . Построим последовательность

$$\gamma_k = \sum_{I \in \{0,1\}^k} \mu_I \boxtimes \nu_{\varphi_k(I)},$$

где $\varphi_k: \{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}^k$ — биекция со следующими свойствами:

- 1) последовательность $K(\gamma_k)$ убывает,
- 2) φ_{k+1} продолжает φ_k ; более точно: при $0 \leq r \leq s$ и $I \in \{0,1\}^s$ выполнено равенство $\varphi_r(I_r) = (\varphi_s(I_s))_r$. Последовательность φ_k построим по индукции. На первом шаге определим φ_1 так, чтобы $K(\gamma_1) \leq K(\mu \otimes \nu)$. Это можно сделать, ибо $2 \cdot \mu \boxtimes \nu = (\mu_0 \boxtimes \nu_0 + \mu_1 \boxtimes \nu_1) + (\mu_0 \boxtimes \nu_1 + \mu_1 \boxtimes \nu_0)$. Следовательно,

$$K(\mu \boxtimes \nu) = \frac{1}{2} (K(\mu_0 \boxtimes \nu_0 + \mu_1 \boxtimes \nu_1) + K(\mu_0 \boxtimes \nu_1 + \mu_1 \boxtimes \nu_0)).$$

В последней формуле хотя бы одно слагаемое не превосходит $K(\mu \boxtimes \nu)$. Если это первое слагаемое, то положим $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(1) = 1$. Если это второе слагаемое, то положим $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_1(1) = 0$. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$ определены. Пусть $l(I) = k$. Тогда $\varphi_k(I) = (\varphi_{k-1}(I_{k-1}), x)$, где x выбирается так, чтобы выполнялось свойство 1). Это всегда можно сделать. Для доказательства достаточно на первом шаге заменить μ и ν на $\mu_{I_{k-1}}$ и $\nu_{\varphi_{k-1}(I_{k-1})}$ и воспользоваться разложением

$$\mu_{I_{k-1}} = \mu_{(I_{k-1}, 0)} + \mu_{(I_{k-1}, 1)}, \quad \nu_{\varphi_{k-1}(I_{k-1})} = \nu_{(\varphi_{k-1}(I_{k-1}), 0)} + \nu_{(\varphi_{k-1}(I_{k-1}), 1)}.$$

Таким образом, определив φ_k , мы получили последовательность радоновских мер γ_k , проекции которых на X и Y суть μ и ν . Следовательно, эти меры равномерно плотны. По усиленной теореме Прохорова семейство $\{\gamma_k\}$ секвенциально слабо компактно (см. теорему 8.6.7 в [3]). Значит, можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Ее предел обозначим через γ . Проекция γ на X и Y суть μ и ν , причем $K(\gamma) \leq K(\mu \otimes \nu)$. Теперь докажем, что мера γ сосредоточена на графике некоторого борелевского отображения. Рассмотрим множество $Z := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{l(I)=k} X_I$ и функцию $\psi: Z \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, которая сопоставляет каждому x из Z последовательность I со свойством $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_{I_k}$. Заметим, что Z является борелевским множеством полной μ -меры. Обозначим через A множество таких счетных последовательностей I , что $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bar{Y}_{I_k}$ содержит более одной точки. Тогда по свойству 5) из леммы получаем, что A не более чем счетно. Пусть $\varphi: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — продолжение всех φ_k . Из определения φ_k получаем, что φ — биекция. Так как μ не имеет атомов, то множество $\tilde{X} = \{x \in Z: \varphi(\psi(x)) \notin A\}$ имеет не более чем счетное дополнение в Z , поэтому является борелевским и обладает полной μ -мерой. Множество $S_k = \bigcup \{X_I \times \bar{Y}_{\varphi_k(I)}: I \in \{0,1\}^k\}$ имеет полную γ_k -меру в силу того, что $\mu(X_I) = \mu(\bar{X}_I)$. При этом S_k имеет полные γ_n -меры для всех $n \geq k$. Покажем, что $\gamma(S_k) = 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \gamma(X_I \times \bar{Y}_{\varphi_k(I)}) &= \gamma(\bar{X}_I \times \bar{Y}_{\varphi_k(I)}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(\bar{X}_I \times \bar{Y}_{\varphi_k(I)}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(\bar{X}_I \times Y) \\ &= \mu(\bar{X}_I) = \mu(X_I) = \gamma(X_I \times Y) \geq \gamma(X_I \times \bar{Y}_{\varphi_k(I)}). \end{aligned}$$

Положим $S = \bigcap_k S_k$. Тогда S является борелевским множеством в $\tilde{X} \times Y$ и $\gamma(S) = 1$. Для всякого элемента $x \in \tilde{X}$ множество $\{y: (x, y) \in S\} = \overline{Y}_{\varphi(\psi(x))}$ содержит не более одной точки. Множество $(\tilde{X} \times Y) \cap S$ — борелевское. Его проекция Π на $\tilde{X}$ является суслинским множеством, причем $\mu(X \setminus \Pi) = \gamma((X \setminus \Pi) \times Y) = 0$, так как $\gamma(S) = 1$. Для всякого $x \in \Pi$ существует единственный элемент $y \in Y$ с $(x, y) \in S$, т.е. суслинское множество $S \cap (\Pi \times Y)$ представляет собой график некоторого отображения $T: \Pi \rightarrow Y$. Как известно (см., например, лемму 6.7.1 во втором издании книги [3]), T является борелевским отображением из Π в Y . Доопределим его постоянным значением на дополнении к Π и получим борелевское отображение из X в Y с требуемыми свойствами. Теорема 1 доказана.

Если в задаче Канторовича нет таких вероятностных радоновских мер γ с проекциями μ и ν , что $c \in L^1(\gamma)$, то будем считать, что минимум величин $K(\gamma)$ бесконечен. Если такая мера γ_0 существует, то множество M всех вероятностных радоновских мер γ с проекциями μ и ν таких, что $\int c d\gamma \leq \int c d\gamma_0$, оказывается непустым компактом в слабой топологии. Функционал $\gamma \mapsto K(\gamma)$ на M полунепрерывен снизу и имеет конечный минимум в некоторой точке $\gamma_{\min}$.

Теорема 2. Пусть X и Y — вполне регулярные пространства, в которых все компакты метризуемы, c — непрерывная функция на $X \times Y$, а μ и ν — вероятностные радоновские меры на X и Y соответственно. Предположим, что μ не имеет атомов. Тогда $\min_{\gamma} K(\gamma) = \inf_T M(T)$, где минимум берется по всем вероятностным радоновским мерам γ с проекциями μ и ν , а инфимум — по всем измеримым отображениям T , переводящим μ в ν .

Доказательство. Как и выше, считаем X и Y вполне регулярными суслинскими. Обозначим через γ меру на $X \times Y$, на которой достигается минимум (считаем, что этот минимум конечен, ибо иначе утверждение тривиально ввиду сказанного выше). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покроем γ -почти все $X \times Y$ счетным числом прямоугольников $A_n \times B_k$ с попарно непересекающимися основаниями A_n так, чтобы на каждом из них разброс значений c был меньше ε . Это легко сделать, так как меры μ и ν радоновы, компакты метризуемы, а проекции γ суть μ и ν . По теореме об изоморфизме (см., например, теорему 9.2.2 в [3]) можно найти такие попарно непересекающиеся множества $X_{n,k} \in A_n$, что $\mu(X_{n,k}) = \gamma(A_n \times B_k) =: m_{n,k}$. Введем меры

$$\gamma_{n,k} := \gamma|_{A_n \times B_k}, \quad \tilde{\gamma}_{n,k} := \mu|_{X_{n,k}} \boxtimes \pi_Y \gamma_{n,k}.$$

Проекции $\tilde{\gamma}_{n,k}$ суть $\mu|_{X_{n,k}}$ и $\pi_Y \gamma_{n,k}$. Применим к ним теорему 1. Получим отображение $t_{n,k}: X_{n,k} \rightarrow B_k$ со свойством $M(t_{n,k}) \leq K(\tilde{\gamma}_{n,k})$. Пусть $T = \sum_{n,k} t_{n,k}$. Поскольку $\bigcup_{n,k} X_{n,k}$ имеет полную μ -меру, то T переводит μ в $\sum_{n,k} \pi_Y \gamma_{n,k} = \pi_Y \sum_{n,k} \gamma_{n,k} = \pi_Y \gamma = \nu$. Так как $|K(\tilde{\gamma}_{n,k}) - K(\gamma_{n,k})| \leq m_{n,k}\varepsilon$, то окончательно получаем

$$M(t) \leq \sum_{n,k} M(t_{n,k}) \leq \sum_{n,k} K(\tilde{\gamma}_{n,k}) \leq \sum_{n,k} (K(\gamma_{n,k}) + m_{n,k}\varepsilon) \leq K(\gamma) + \varepsilon \|\gamma\|.$$

Теорема доказана.

Неясно, можно ли в доказанных теоремах отказаться от метризуемости компактов в пространствах X и Y .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rachev S. T., Rüschendorf L. Mass Transportation Problems. V. I. New York: Springer-Verlag, 1998, 508 с.
2. Pratelli A. On the equality between Monges's infimum and Kantorovich's minimum in optimal mass transportation. — Preprint. Pisa: Scuola Normale Superiore di Pisa, 2004; Ann. Inst. H. Poincaré (to appear).
3. Богачев В. И. Основы теории меры. Т. 1, 2. М.—Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика», 2003; 2-е изд., 2005.

Поступила в редакцию
31.X.2005