Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Мищенко, О распределении вероятностей некоторых функционалов от случайного блуждания, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 4, 789–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:54:32

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borodin A. N., Salminen P. Handbook of Brownian Motion. Facts and Formulae. Basel: Birkhäuser, 2002, 672 p.
2. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 560 p.
3. Graversen S. E., Shiryaev A. N. An extension of P. Lévy's distributional properties to the case of a Brownian motion with drift. — Bernoulli, 2000, v. 6, № 4, p. 615–620.
4. Hess G. D., Iwata S. Measuring and comparing business-cycle features. — J. Bus. Econom. Statist., 1997, v. 15, № 4, p. 432–444.
5. Taylor H. M. A stopped Brownian motion formula. — Ann. Probab., 1975, v. 3, p. 234–246.
6. Пастухов С. В. О некоторых вероятностно-статистических методах в техническом анализе. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 2, с. 297–316.

Поступила в редакцию
16.X.2005

© 2005 г.

МИЩЕНКО А. С.*

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ

В теории броуновского движения давно рассматриваются и уже хорошо изучены такие производные от него процессы, как локальное время, время пребывания выше заданного уровня, значение максимума на отрезке, точка достижения этого максимума. Известны одномерные и некоторые совместные распределения этих процессов в фиксированный момент времени, обнаружено множество взаимосвязей между ними.

В работе рассматривается простейшее симметричное случайное блуждание, т.е. блуждание с бернуллиевским шагом, и определяются дискретные аналоги перечисленных выше функционалов. В качестве основного результата доказывается некоторое равенство двух условных трехмерных распределений, связывающее все построенные дискретные случайные величины. Доказательство основывается на довольно интересном преобразовании траекторий случайного блуждания, переставляющем определенным образом положительные и отрицательные экскурсии.

Делается предельный переход к непрерывному времени, с помощью которого устанавливается аналогичное равенство между распределениями функционалов от броуновского движения. Как в случае дискретного, так и в случае непрерывного времени это соотношение ранее нигде не упоминалось.

Ключевые слова и фразы: броуновское движение, случайное блуждание, локальное время, время пребывания, положение максимума, распределение, экскурсии.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: andrei.mischenko@mail.ru

1. Введение. Пусть $(B_t)_{t \geq 0}$ — броуновское движение. Определим следующие случайные процессы:

$$\begin{aligned} M_t &:= \sup_{s \leq t} B_s, & \theta_t &:= \arg \sup_{s \leq t} B_s, \quad \text{т.е. } B_{\theta_t} = M_t, \\ K_t^a &:= M_t \wedge (M_t - B_t - a), & \gamma_t^a &:= \int_0^t I_{\{B_s \geq a\}} ds, \end{aligned}$$

и обозначим через $(L_t^a)_{t \geq 0}$ локальное время броуновского движения в точке a . Построим дискретные аналоги введенных выше процессов. Мы обозначим их теми же буквами, но будем ставить над ними волну. Это поможет избежать путаницы при предельном переходе от дискретного времени к непрерывному.

Пусть ξ_i — независимые одинаково распределенные симметричные бернуллиевские случайные величины, т.е. $\mathbf{P}\{\xi_i = \pm 1\} = \frac{1}{2}$. Рассмотрим случайное блуждание $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$, для единообразия обозначим его через $\tilde{B}_n := S_n$ и положим $\tilde{M}_n := \max_{k \leq n} \tilde{B}_k$, $\tilde{\theta}_n := \min\{k \leq n \mid \tilde{B}_k = \tilde{M}_n\}$, $\tilde{K}_n^a := \tilde{M}_n \wedge (\tilde{M}_n - \tilde{B}_n - a)$, $\tilde{\gamma}_n^a := \sum_{k=0}^n I_{\{\tilde{B}_k > a\}}$, т.е. $\tilde{\theta}_n$ обозначает самую левую точку достижения случайным блужданием своего максимума, а $\tilde{\gamma}_n^a$ есть количество значений, больших a . Введем также процесс $\tilde{N}_n^a := \sum_{k=1}^n I_{\{\tilde{B}_{k-1} = a+1, \tilde{B}_k = a\}}$, который «считает» количество пересечений случайным блужданием уровня $a + \frac{1}{2}$ сверху вниз. Как мы увидим в дальнейшем, этот процесс может рассматриваться как дискретный аналог величины $L_t^a/2$.

Основным результатом данной работы является следующее соотношение между распределениями указанных функционалов от случайного блуждания.

Теорема 1. При каждом натуральном n и любом целом $a \geq 0$ имеет место равенство совместных условных распределений

$$\text{Law}(\tilde{\gamma}_n^a, \tilde{N}_n^a, \tilde{B}_n \mid \tilde{M}_n \geq a) = \text{Law}(\tilde{\theta}_n, \tilde{K}_n^a, \tilde{B}_n + 2a \mid \tilde{M}_n - \tilde{B}_n \geq a). \quad (1)$$

Это равенство в частном случае $a = 0$ играло ключевую роль в статье [5], хотя приводилось там без доказательства.

В конце работы делается предельный переход в формуле (1) к непрерывному времени.

2. Доказательство теоремы 1. Вначале рассмотрим подробно более простой случай $a = 0$.

Пусть Ω_n обозначает множество траекторий случайного блуждания на отрезке $[0, n]$. Достаточно доказать, что существует биекция $\varphi: \Omega_n \leftrightarrow \Omega_n$ такая, что для всех $\omega \in \Omega_n$ выполняются равенства

$$\tilde{\theta}_n(\varphi(\omega)) = \tilde{\gamma}_n^0(\omega), \quad \tilde{K}_n^0(\varphi(\omega)) = \tilde{N}_n^0(\omega), \quad \tilde{B}_n(\varphi(\omega)) = \tilde{B}_n(\omega). \quad (2)$$

Рассмотрим произвольное $\omega = (\tilde{B}_0(\omega), \dots, \tilde{B}_n(\omega)) \in \Omega_n$ и разобьем отрезок $[0, n]$ на положительные и отрицательные экскурсии траектории ω , а именно, положим

$$\begin{aligned} \tau_0^- &= 0, & \sigma_0^- &= \min\{k > \tau_0^- \mid \tilde{B}_k(\omega) = 1\} - 1, \\ \tau_1^+ &= \sigma_0^-, & \sigma_1^+ &= \min\{k > \tau_1^+ \mid \tilde{B}_k(\omega) = 0\} - 1, \\ \tau_1^- &= \sigma_1^+, & \sigma_1^- &= \min\{k > \tau_1^- \mid \tilde{B}_k(\omega) = 1\} - 1, \\ \tau_2^+ &= \sigma_1^-, & \sigma_2^+ &= \min\{k > \tau_2^+ \mid \tilde{B}_k(\omega) = 0\} - 1, \quad \dots \end{aligned} \quad (3)$$

причем если $\tilde{B}_n(\omega) > 0$, то закончим эту последовательность, положив $\sigma_{\tilde{N}_n^0+1}^+ = n$, а если $\tilde{B}_n(\omega) \leq 0$, то положим $\sigma_{\tilde{N}_n^0}^- = n$.

Будем называть часть $\{(s, \omega_s), s \in [\tau_k^+, \sigma_k^+]\}$ траектории ω k -й *положительной экскурсией*, а часть $\{(s, \omega_s), s \in [\tau_k^-, \sigma_k^-]\}$ k -й *отрицательной экскурсией*. Последнюю экскурсию в случае $\tilde{B}_n \neq 0$ будем называть *незаконченной*. Таким образом, $\tilde{N}_n^0$ равняется количеству законченных положительных экскурсий. Заметим, что величины $\tau_k^\pm$ не являются моментами остановки, поскольку «заглядывают» в будущее на один шаг.

Такое разбиение на экскурсии не совсем традиционно, поэтому поясним его примером. На рис. 1, 2 изображены некоторые траектории и отмечены точки $\tau_k^\pm$. При этом, согласно определению, конец каждой экскурсии совпадают с началом следующей, т.е. $\sigma_k^- = \tau_{k+1}^+$, $\sigma_k^+ = \tau_k^-$.

Рис. 1

Рис. 2

Сформулируем свойства экскурсий, которые будут выполнены для любой траектории ω . Как следует из определения (3), в начале траектории всегда располагается нулевая отрицательная экскурсия, хотя она может иметь нулевую длину, как на рис. 2. Будем называть разность значений на концах экскурсии ее *приращением*. Тогда нулевая экскурсия — единственная, которая имеет приращение, равное 0. Все остальные отрицательные экскурсии имеют приращение -1 (кроме незаконченной, если она есть), а все положительные экскурсии имеют приращение $+1$ (снова, возможно, кроме незаконченной). Отрицательные и положительные экскурсии чередуются. Отметим также, что суммарная длина всех положительных экскурсий есть не что иное, как $\tilde{\gamma}_n^0(\omega)$.

После того, как величины $\tau_k^\pm, \sigma_k^\pm$ определены, «разрежем» траекторию ω на экскурсии и, как из конструктора, будем «собирать» траекторию $\varphi(\omega)$. Для начала повернем каждую положительную экскурсию на 180° . Заметим, что приращения экскурсий при этом сохраняются. Далее, отметим где-то на плоскости точку M . «Приставим» к точке M справа по очереди все отрицательные экскурсии, начиная с нулевой, а слева — все повернутые положительные экскурсии, начиная с первой. Получившуюся траекторию назовем $\varphi(\omega)$, задав координаты точки M так, чтобы начало траектории попало в начало координат.

Вновь прокомментируем это построение примером с чертежом. На рис. 3 еще раз нарисована траектория с рис. 1, с отмеченными на ней началами и концами экскурсий $A, B, \dots, J$, причем конец экскурсии и начало следующей отмечаются разными буквами, хотя это одна и та же точка плоскости. На рис. 4 изображена траектория $\varphi(\omega)$, где для наглядности снова поставлены точки $A, B, \dots, J$. Также на рис. 4 отмечена точка M .

Рис. 3

Рис. 4

Покажем, что всякий раз точка M будет самой левой точкой максимума построенной траектории. Действительно, все отрицательные экскурсии имеют неотрицательное приращение и остаются все время не выше своего левого конца, так что справа от точки M значений, больших, чем в ней самой, быть не может. Аналогично, перевернутые положительные экскурсии имеют положительные приращения, оставаясь строго ниже своего правого конца, поэтому слева от точки M тоже нет значений больших и даже равных значению в самой точке M .

По построению, абсцисса точки M есть $\tilde{\gamma}_n^0(\omega)$, тем самым, формула $\tilde{\theta}_n(\varphi(\omega)) = \tilde{\gamma}_n^0(\omega)$ доказана.

Убедимся теперь, что у траекторий ω и $\varphi(\omega)$ совпадают значения в конечный момент времени. Действительно, как уже отмечалось, после поворота на 180° приращения положительных экскурсий не меняются, а суммарное приращение всех экскурсий и есть $\tilde{B}_n$. Итак, формула $\tilde{B}_n(\varphi(\omega)) = \tilde{B}_n(\omega)$ также доказана.

Осталось проверить, что $\tilde{K}_n^0(\varphi(\omega)) = \tilde{N}_n^0(\omega)$ и что отображение φ взаимно однозначно. Оба этих утверждения следуют из следующего построения. Рассмотрим произвольное $\omega \in \Omega_n$ и построим траекторию $\varphi^{-1}(\omega) \in \Omega_n$ такую, что $\varphi(\varphi^{-1}(\omega)) = \omega$.

Определим величины

$$\begin{aligned} u_s &= \min\{k \leq n \mid \tilde{B}_k(\omega) = \tilde{M}_n(\omega) - s\}, & s = 0, 1, \dots, K \\ v_s &= \max\{k \leq n \mid \tilde{B}_k(\omega) = \tilde{M}_n(\omega) - s\}, & s = 0, 1, \dots, K, \end{aligned} \tag{4}$$

где K обозначает $\tilde{K}_n^0$. Другими словами, на уровнях $\tilde{M}_n, \tilde{M}_n - 1, \dots, \tilde{M}_n - K$ проводится $K + 1$ горизонтальная прямая и через u_s, v_s обозначаются самая первая и самая последняя точки пересечения траектории с этими прямыми.

Еще раз проиллюстрируем построение примером. На рис. 5 изображена некоторая траектория ω и отмечены точки u_s, v_s .

Рис. 5

Опишем теперь процесс построения траектории $\varphi^{-1}(\omega)$. Разберем сначала случай $\tilde{B}_n(\omega) > 0$.

Как нетрудно понять, при любом ω все $u_k \leq \tilde{\theta}_n(\omega)$, а все $v_k \geq \tilde{\theta}_n(\omega)$, причем всегда $u_0 = \tilde{\theta}_n$, а $v_K = n$. Далее, по построению, на каждом отрезке $[v_k, v_{k+1}]$, $0 \leq k < K$, траектория ω имеет приращение -1 , все время оставаясь ниже своего левого конца, значит, эти участки траектории могут быть приняты за отрицательные экскурсии при построении прообраза $\varphi^{-1}(\omega)$. При этом часть $[\tilde{\theta}_n(\omega), v_0]$ траектории подходит

для того, чтобы быть нулевой отрицательной экскурсией. Аналогичные утверждения выполнены для отрезков $[u_{k+1}, u_k]$, $0 < k < K$, так что после поворота на 180° эти участки траектории ω можно взять в качестве положительных экскурсий траектории $\varphi^{-1}(\omega)$. Наконец, участок $[0, u_K]$ после поворота на 180° становится последней, незаконченной положительной экскурсией, на чем построение завершается. Траектория ω на рис. 5 подобрана так, чтобы $\varphi^{-1}(\omega)$ совпала с траекторией, изображенной на рис. 2.

В случае $\tilde{B}_n \leq 0$ построения аналогичны. В этом случае $u_K = 0$, а отрезок $[v_K, n]$ становится последней, незаконченной отрицательной экскурсией. Нетрудно заметить, что в обоих случаях $\tilde{K}_n^0(\omega) = \tilde{N}_n^0(\varphi^{-1}(\omega))$.

Итак, биективность функции φ и равенство $\tilde{K}_n^0(\varphi(\omega)) = \tilde{N}_n^0(\omega)$ установлены. Тем самым доказаны все свойства (2), а с ними и теорема 1 в случае $a = 0$.

Обобщим описанные рассуждения на случай $a > 0$.

Пусть Ω_n вновь обозначает множество всех траекторий простейшего симметричного случайного блуждания до момента времени n . Покажем, что существует отображение $\varphi_a: \{\tilde{M}_n \geq a\} \leftrightarrow \{\tilde{M}_n - \tilde{B}_n \geq a\}$, осуществляющее взаимно однозначное соответствие между указанными подмножествами Ω_n и обладающее свойствами, аналогичными (2), а именно

$$\tilde{\gamma}_n^a(\omega) = \tilde{\theta}_n(\varphi_a(\omega)), \quad \tilde{N}_n^a(\omega) = \tilde{K}_n^a(\varphi_a(\omega)), \quad \tilde{B}_n(\omega) = \tilde{B}_n(\varphi_a(\omega)) + 2a. \quad (5)$$

Рассмотрим произвольную траекторию ω и, по аналогии с (3), построим моменты времени

$$\begin{aligned} \tau_0^{a-} &= \min\{k > 0 \mid \tilde{B}_k = a\}, & \sigma_0^{a-} &= \min\{k > \tau_0^{a-} \mid \tilde{B}_k(\omega) = a + 1\} - 1, \\ \tau_1^{a+} &= \sigma_0^{a-}, & \sigma_1^{a+} &= \min\{k > \tau_1^{a+} \mid \tilde{B}_k(\omega) = a\} - 1, \\ \tau_1^{a-} &= \sigma_1^{a+}, & \sigma_1^{a-} &= \min\{k > \tau_1^{a-} \mid \tilde{B}_k(\omega) = a + 1\} - 1, \\ \tau_2^{a+} &= \sigma_1^{a-}, & \sigma_2^{a+} &= \min\{k > \tau_2^{a+} \mid \tilde{B}_k(\omega) = a\} - 1, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

закончим эту последовательность, положив $\sigma_{\tilde{N}_n^a}^{a-} = n$, если $\tilde{B}_n \leq a$, и $\sigma_{\tilde{N}_n^a+1}^{a+} = n$ иначе.

Условие $\tilde{M}_n \geq a$ гарантирует, что неравенство $\tau_0^{a-} \leq n$ выполнено для всех ω , принадлежащих области определения отображения φ_a .

Точки $\tau_k^{a\pm}, \sigma_k^{a\pm}$ разбивают траекторию на отрезки, которые мы будем называть a -положительными и a -отрицательными экскурсиями. Отличие от случая $a = 0$ состоит в наличии отрезка $[0, \tau_0^{a-}]$, назовем его *особой* экскурсией. Свойства a -положительных и a -отрицательных экскурсий аналогичны тем, которые перечислены при рассмотрении случая $a = 0$.

При построении траектории $\varphi_a(\omega)$ поступим с обычными экскурсиями точно так же, как и выше. На плоскости отмечается точка M , a -положительные экскурсии поворачиваются на 180° и выстраиваются слева от нее, а a -отрицательные экскурсии без изменения располагаются справа. С особой экскурсией поступим особо. Зеркально отразим ее относительно вертикали и поставим справа в самом конце. Получившуюся таким образом траекторию и назовем $\varphi_a(\omega)$.

Рассмотрим пример. На рис. 6 изображена некоторая траектория ω , которая разбита на a -экскурсии при $a = 2$. На рис. 7 показана траектория $\varphi_a(\omega)$.

Рис. 6

Рис. 7

Проверим свойства (5). Равенство $\tilde{\gamma}_n^a(\omega) = \tilde{\theta}_n(\varphi_a(\omega))$ проверяется как и раньше. Слагаемое $+2a$ в формуле $\tilde{B}_n(\omega) = \tilde{B}_n(\varphi_a(\omega)) + 2a$ объясняется тем, что при вертикальной симметрии особая экскурсия поменяла свое приращение с a на $-a$.

Равномощность области определения и области значений отображения φ_a легко усмотреть с помощью инверсии времени в случайном блуждании. Поэтому биективность построенного отображения можно установить с помощью рассуждений, аналогичных случаю $a = 0$. При этом будет также проверено соотношение $\tilde{N}_n^a(\omega) = \tilde{K}_n^a(\varphi_a(\omega))$. Рассмотрим произвольную траекторию ω из множества $\{\tilde{M}_n - \tilde{B}_n \geq a\}$ и построим ее прообраз.

Формулы (4) переносятся без изменения, при этом следует положить $K := \tilde{K}_n^a$. В случае $\tilde{B}_n(\omega) \geq -a$ этого достаточно. Получившиеся части $[v_k, v_{k+1}]$ траектории ω становятся a -отрицательными экскурсиями прообраза, а отрезок $[\theta_n, v_0]$ берется в качестве нулевой a -отрицательной экскурсии. Участки $[u_k, u_{k+1}]$ поворачиваются на 180° и становятся a -положительными экскурсиями, а в самом начале траектории ω имеется отрезок $[0, u_K]$, который, также после поворота на 180° , становится незаконченной a -положительной экскурсией. В самом конце справа располагается участок $[v_k, n]$, который следует зеркально отразить относительно вертикали и объявить особой экскурсией прообраза.

При $\tilde{B}_n(\omega) < -a$, в дополнение к формулам (4), нужно провести еще одну горизонтальную прямую на уровне $\tilde{B}_n(\omega) + a$ и найти точку последнего достижения этого уровня

$$v_{K+1} := \max\{k \leq n \mid \tilde{B}_k = \tilde{B}_n(\omega) + a\}.$$

Эта точка разделит конец траектории ω на две части, $[v_k, v_{K+1}]$ и $[v_{K+1}, n]$. Первая из них станет незаконченной a -отрицательной экскурсией прообраза, а вторая, после вертикальной симметрии, станет особой экскурсией.

Легко заметить, что, как и при $a = 0$, равенство $\tilde{K}_n^a(\omega) = \tilde{N}_n^a(\varphi_a^{-1}(\omega))$ справедливо в обоих случаях.

Итак, теорема 1 полностью доказана.

3. Предельный переход к непрерывному времени. Популярным и хорошо известным способом перехода от случайного блуждания к броуновскому движению является применение принципа инвариантности Донскера–Прохорова [2, гл. XIII, теорема (1.9)]. Суть этого результата состоит в следующем.

Пусть $(\eta_n)_{n=1,2,\dots}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $E\eta_n = 0$, $E\eta_n^2 = 1$. Рассмотрим случайное блуждание $S_n := \sum_{k=1}^n \eta_k$ и построим по нему случайный процесс в непрерывном времени с помощью кусочно линейной интерполяции, который обозначим также $(S_t)_{t \geq 0}$. Принцип инвариантности Донскера–Прохорова утверждает, что $(S_{mt}/\sqrt{m})_{t \geq 0} \xrightarrow{d} (B_t)_{t \geq 0}$ при $m \rightarrow \infty$ в смысле слабой сходимости распределений в пространстве $\mathcal{C}[0, \infty)$, где $(B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение.

К сожалению, для работы с локальным временем принцип Донскера–Прохорова в классической формулировке не подходит. Дело в том, что функционал локального времени

$$\mathcal{C}[0, t] \ni f \mapsto L^a(f) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t I_{\{a < f(s) < a + \varepsilon\}} ds$$

всюду разрывен в $\mathcal{C}[0, t]$. Чтобы преодолеть эту трудность, воспользуемся результатами работы [2], среди которых имеется следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $S_n := \sum_{k=1}^n \eta_k$ — такое же случайное блуждание, как и в классическом принципе инвариантности, а $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция. Рассмотрим стохастический интеграл $I_t := \int_0^t f(B_s) dB_s$ и построим его дискретный аналог. А именно, выберем некоторое $m > 0$, положим $\tilde{I}_n^m := \sum_{k=1}^n f(S_{k-1}/\sqrt{m}) \eta_k$, а затем доопределим этот процесс с помощью кусочно-линейной интерполяции. Тогда $(S_{mt}/\sqrt{m}, \tilde{I}_{mt}^m/\sqrt{m})_{t \geq 0} \xrightarrow{d} (B_t, I_t)_{t \geq 0}$ при $m \rightarrow \infty$ в смысле сходимости распределений в пространстве $\mathcal{C}[0, \infty)^2$.

В дальнейшем мы будем считать, что все рассмотренные выше дискретные процессы доопределены с помощью кусочно-линейной интерполяции до процессов с непрерывным временем.

Следствие 1. Для произвольного $a \geq 0$ при $m \rightarrow \infty$ имеет место сходимость следующих пар процессов $(\tilde{B}_{mt}/\sqrt{m}, \tilde{N}_{mt}^{\sqrt{ma}}/\sqrt{m})_{t \geq 0} \xrightarrow{d} (B_t, L_t^a/2)_{t \geq 0}$. Имеется в виду, что m принимает только такие значения, при которых $\sqrt{ta}$ является целым числом.

Доказательство. Согласно одной из формул Танака (см., например, [2, гл. VI, теорема (1.2)]), $L_t^a/2 = (B_t - a)^+ - \int_0^t I_{\{B_s > a\}} dB_s$. Обозначим кусочно-линейную функцию $I_{\{x > a\}} =: f(x)$ и докажем, что

$$\left| \frac{\tilde{N}_{mt}^{\sqrt{ma}}}{\sqrt{m}} - \left[\left(\frac{\tilde{B}_{mt}}{\sqrt{m}} - a \right)^+ - \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{[mt]} f\left(\frac{\tilde{B}_{k-1}}{\sqrt{m}}\right) \eta_k \right] \right| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Действительно, как уже упоминалось выше, число $\tilde{N}_n^a$ равно количеству пересечений уровня $a + \frac{1}{2}$ сверху вниз. Но можно заметить, что разность $(\tilde{B}_n - a)^+ - \sum_{k=1}^n f(\tilde{B}_{k-1}) \eta_k$ совпадает с количеством пересечений этого же уровня снизу вверх, поэтому эти величины не могут различаться больше чем на единицу.

К тому же, функционал $\mathcal{C}[0, t] \ni g \mapsto (g(t) - a)^+$ непрерывен в пространстве $\mathcal{C}[0, \infty)$. Таким образом, применяя предложение 1, получаем утверждение следствия.

Итак, проведем теперь строгое доказательство перехода к непрерывному времени в формуле (1).

Следствие 2. При фиксированном t и $a \geq 0$ имеет место равенство

$$\text{Law} \left(\gamma_t^a, \frac{L_t^a}{2}, B_t \mid M_t > a \right) = \text{Law}(\theta_t, K_t^a, B_t + 2a \mid M_t - B_t > a). \quad (7)$$

Доказательство. В доказываемой формуле фигурируют условные распределения, но условия являются событиями, имеющими одну и ту же положительную вероятность, поэтому достаточно убедиться, что имеют место сходимости

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\tilde{\gamma}_{mt}^{\sqrt{ma}}}{m}, \frac{\tilde{N}_{mt}^{\sqrt{ma}}}{\sqrt{m}}, \frac{\tilde{B}_{mt}}{\sqrt{m}}, I_{\{\tilde{M}_{mt} \geq \sqrt{ma}\}} \right)_{t \geq 0} \xrightarrow{d} \left(\gamma_t^a, \frac{L_t^a}{2}, B_t, I_{\{M_t \geq a\}} \right)_{t \geq 0}, \\ & \left(\frac{\tilde{\theta}_{mt}}{m}, \frac{\tilde{K}_{mt}^{\sqrt{ma}}}{\sqrt{m}}, \frac{\tilde{B}_{mt}}{\sqrt{m}} + 2a, I_{\{\tilde{M}_{mt} - \tilde{B}_{mt} \geq \sqrt{ma}\}} \right)_{t \geq 0} \xrightarrow{d} (\theta_t, K_t^a, B_t + 2a, I_{\{M_t - B_t \geq a\}})_{t \geq 0}, \end{aligned}$$

и тогда доказываемое равенство будет следовать из единственности слабого предела.

Несмотря на то что отображения

$$\begin{aligned} f & \mapsto \hat{\gamma}^a(f) := \int_{s=0}^t I_{\{f(s) \geq a\}} ds, & f & \mapsto \hat{\theta}(f) := \arg \sup_{s \leq t} f(s), \\ f & \mapsto I_{\{\sup_{s \leq t} f(s) \geq a\}}, & f & \mapsto I_{\{\sup_{s \leq t} f(s) - f(t) \geq a\}}, \end{aligned}$$

где $f \in \mathcal{C}[0, t]$, не являются непрерывными функционалами, можно проверить, что множества их точек разрыва имеют винеровскую меру нуль.

Помимо этого имеется еще одна трудность. Величина $\tilde{\gamma}_n^a := \sum_{k=0}^n I_{\{\tilde{B}_k > a\}}$ не совпадает со значением указанного выше функционала $\hat{\gamma}^a$ на кусочно-линейной интерполяции случайного блуждания. Например, на рис. 1 значение $\hat{\gamma}^0 = 4$ (случайное блуждание имеет 4 положительных значения), в то время как $\tilde{\gamma}^0 = 6$ (6 единичных отрезков кусочно-линейной интерполяции проходят выше нуля). Но можно заметить, что разность между этими величинами всегда совпадает с $\tilde{N}_n^a$, и поэтому при нормировке $1/m$ она будет стремиться к нулю по вероятности (поскольку $\tilde{N}_n^a$ имеет слабый предел при нормировке $1/\sqrt{m}$).

Остается присоединить к этим соображениям утверждение следствия 1. Следствие 2 доказано.

Если далее воспользоваться известной формулой (см. [3, ч. II, § 1, 1.13.8, с. 180])

$$\mathbf{P}\{\theta(B)_t \in dx, S(B)_t \in dy, B_t \in dz\} = \frac{y(y-z)}{\pi(x(t-x))^{3/2}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2x} - \frac{(y-z)^2}{2(t-x)}\right\} dx dy dz,$$

то непосредственными вычислениями доказывается следующее утверждение.

Следствие 3. *Справедливы формулы (для $0 < x < t$)*

$$\mathbf{P}\{\gamma_t^a \in dx, L_t^a \in dy, B_t \in dz \mid M_t > a, B_t < a\} = \rho_t^-(x, y, z) dx dy dz, \quad z < a, \quad (8)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_t^a \in dx, L_t^a \in dy, B_t \in dz \mid B_t > a\} = \rho_t^+(x, y, z) dx dy dz, \quad z > a, \quad (9)$$

$$\rho_t^-(x, y, z) = C^- \frac{y(y-2z+4a)}{8\pi(x(t-x))^{3/2}} \exp\left\{-\frac{y^2}{8x} - \frac{(y-2z+4a)^2}{8(t-x)}\right\},$$

$$\rho_t^+(x, y, z) = C^+ \frac{(y+2z-2a)(y+2a)}{8\pi(x(t-x))^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(y+2z-2a)^2}{8x} - \frac{(y+2a)^2}{8(t-x)}\right\},$$

$$C^- = \frac{1}{\mathbf{P}\{B_t < -a\}}, \quad C^+ = \frac{1}{\mathbf{P}\{B_t > -a, M_t - B_t > a\}}.$$

4. Замечания и комментарии. Случай $a < 0$ также может быть изучен с помощью похожих построений.

Формулы (8) и (9) задают совместный закон $\text{Law}(\gamma_t^a, L_t^a, B_t)$ практически полностью, за исключением распределения $\mathbf{P}\{B_t \in dz \mid \gamma_t^a = L_t^a = 0\}$, которое легко вычислить из других соображений.

Эти формулы не являются новыми, например, в справочнике [3, ч. II, § 1, 1.27.8, с. 198] даже приводится их обобщение. Соотношение (7) в частном случае $a = 0$ также упоминалось в некотором виде в книге [4, 6.3.9, с. 425] и других работах. В то же время, эти равенства в случае $a > 0$, а также соотношение (1) для случайного блуждания являются новыми результатами.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора А.Н. Ширяева за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 602 p.
2. Cherny A. S., Shiryaev A. N., Yor M. Limit behaviour of the «horizontal-vertical» random walk and some extensions of the Donsker–Prokhorov invariance principle. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, № 3, с. 498–517.
3. Бородин А. Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. СПб.: Лань, 2000, 640 с.
4. Karatzas I., Shreve S. E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Berlin: Springer-Verlag, 1988, 470 p.
5. Мищенко А. С. О трех законах арксинуса. — Успехи матем. наук, 2003, т. 58, № 6, с. 159–160.

Поступила в редакцию
24.XI.2004