Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Мищенко, Дискретный процесс Бесселя и его свойства, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 4, 797–806

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 11:46:50

© 2005 г.

МИЩЕНКО А. С.*

ДИСКРЕТНЫЙ ПРОЦЕСС БЕССЕЛЯ И ЕГО СВОЙСТВА

В данной работе рассматривается дискретный аналог процесса Бесселя размерности три — некоторый дискретный процесс, сходящийся к непрерывному процессу Бесселя в смысле принципа инвариантности Донскера–Прохорова и имеющий столь же элементарную структуру траектории, как и у простейшего случайного блуждания.

В работе дается четыре эквивалентных определения дискретного процесса Бесселя, которые освещают его с различных точек зрения. Изучение этого процесса показывает, что взаимосвязи между ним и простейшим случайным блужданием полностью повторяют известные соотношения, связывающие процесс Бесселя и броуновское движение в непрерывном времени. Так, в работе формулируются и доказываются дискретные варианты теоремы Питмана, разложения Вильямса и других известных свойств указанных процессов.

Ключевые слова и фразы: процесс Бесселя, случайное блуждание, дискретные аналоги, теорема Питмана, теорема Леви, разложение Вильямса.

1. Введение. Пусть S_n обозначает простейшее симметричное случайное блуждание, т.е. $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$, где $\{\xi_i\}_{i=1,2,\dots}$ — независимые случайные величины, имеющие бернуллиевское симметричное распределение $P\{\xi_i = \pm 1\} = \frac{1}{2}$.

К процессу (S_n) применима хорошо известная теорема, которая носит название принципа инвариантности Донскера–Прохорова [2, гл. XIII, теорема 1.9]. Суть этого результата состоит в следующем.

Предложение 1 (принцип инвариантности Донскера–Прохорова). *Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $(\eta_n)_{n=1,2,\dots}$, $E\eta_n = 0$, $E\eta_n^2 = 1$ и случайное блуждание $S_n := \sum_{k=1}^n \eta_k$. По S_n построим случайный процесс в непрерывном времени с помощью кусочно-линейной интерполяции, который также обозначим через $(S_t)_{t \geq 0}$. Тогда $(S_{mt}/\sqrt{m})_{t \geq 0} \xrightarrow{w} (B_t)_{t \geq 0}$ при $m \rightarrow \infty$ в смысле слабой сходимости распределений в пространстве $\mathcal{C}'[0, \infty)$, где $(B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение.*

Таким образом, с одной стороны, процесс (S_n) имеет крайне простую структуру траекторий, к нему применимы алгебраические, комбинаторные методы рассуждения (биекции на множестве траекторий и тому подобное). С другой стороны, с помощью принципа инвариантности результаты, полученные для случайного блуждания, могут быть перенесены на случай непрерывного времени. Вспомним, например, насколько просто доказывается в дискретном случае принцип отражения, а затем этот результат можно легко перенести на случай броуновского движения благодаря теореме Донскера–Прохорова.

Помимо броуновского движения теория вероятностей изучает множество других связанных с ним процессов. В этой статье для нас особый интерес представляет процесс Бесселя размерности три, который мы будем обозначать $(R_t)_{t \geq 0}$. Этот процесс подробно изучается во многих работах, в книге [2] ему посвящен § 3 главы VI. Одно из эквивалентных его определений таково: процессом Бесселя размерности три называется модуль трехмерного броуновского движения.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: andrei.mischenko@mail.ru

В знаменитой работе Дж. Питмана [1] рассматривался некоторый дискретный процесс, который вправе считаться дискретным аналогом процессом Бесселя размерности три. Он имеет столь же простую структуру траекторий, как и простейшее случайное блуждание, и, согласно результатам этой работы, сходится к процессу $(R_t)_{t \geq 0}$ в смысле принципа инвариантности. Мы будем обозначать этот процесс через $(R_n)_{n=0,1,\dots}$.

Помимо определения, используемого Питманом, в п. 2 мы приводим три других определения и доказываем их эквивалентность. Используемые при этом вспомогательные утверждения представляют интерес и сами по себе, в частности, мы формулируем и доказываем дискретный аналог хорошо известной теоремы Леви.

Последний пункт демонстрирует глубину аналогии между непрерывным и дискретным процессами Бесселя на примере дискретного варианта разложения Вильямса. Также в работе приводятся дискретные аналоги и других известных свойств непрерывного процесса Бесселя.

В действительности, теория случайных процессов рассматривает целое семейство процессов Бесселя различных размерностей, задаваемое стохастическим дифференциальным уравнением, в которое размерность входит в качестве параметра. Но мы будем работать лишь с процессом размерности три, поэтому указание на нее будет, как правило, опускаться, мы будем называть процесс (R_t) просто процессом Бесселя, а процесс $(R_n)_{n=0,1,\dots}$ дискретным процессом Бесселя.

2. Построение дискретного процесса Бесселя. В этом пункте мы дадим четыре определения дискретного процесса Бесселя $(R_n)_{n=0,1,\dots}$, докажем их эквивалентность и убедимся, что для этого процесса имеет место сходимость к непрерывному процессу Бесселя $(R_t)_{t \geq 0}$ в том же смысле, что и в теореме Донскера–Прохорова.

Для простейшего случайного блуждания (S_n) будем обозначать через $M_n := \sup_{k \leq n} S_k$ процесс его максимума.

О п р е д е л е н и е 1. Зададим процесс $(R_n^{(1)})_{n=0,1,\dots}$, положив $R_n^{(1)} := 2M_n - S_n$.

Определение 1 повторяет приводимое в работе [1], где доказывается следующее соотношение между броуновским движением и процессом Бесселя размерности три (см. также [2, гл. VI, теорема 3.5, следствие 3.6]).

Предложение 2 (теорема Питмана). Пусть $(B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение, а $M_t := \sup_{s \leq t} B_s$ — процесс его максимума. Пусть $(R_t)_{t \geq 0}$ — трехмерный процесс Бесселя, а $J_t := \inf_{s \geq t} R_s$. Тогда следующие пары процессов совпадают по распределению:

$$(2M_t - B_t, M_t)_{t \geq 0} \stackrel{\text{law}}{=} (R_t, J_t)_{t \geq 0}.$$

При этом условные распределения $\text{Law}(J_t | \mathcal{F}_t)$ и $\text{Law}(R_t - J_t | \mathcal{F}_t)$ являются равномерными распределениями на отрезке $[0, R_t]$, где $\mathcal{F}_t := \sigma(R_s, s \leq t)$.

В свете этого результата кажется весьма естественным назвать процесс $R_n^{(1)}$ дискретным процессом Бесселя. К тому же из свойства возвратности случайного блуждания мгновенно следует соотношение $M_n = \inf_{k \geq n} R_k^{(1)}$. Свойство равномерности условного распределения также имеет место в дискретном случае, что будет доказано чуть позже.

А сейчас рассмотрим процесс $L_n := \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{(S_{n-1}-1/2)(S_n-1/2) < 0\}}$, который «считает» количество пересечений уровня $\frac{1}{2}$ случайным блужданием (S_n) . Можно считать, что для случайного блуждания этот процесс играет ту же роль, что и локальное время в нуле для броуновского движения, и вот почему. В теории броуновского движения хорошо известна теорема Леви [2, гл. IV, теорема 2.3].

Предложение 3 (теорема Леви). Для стандартного броуновского движения $(B_t)_{t \geq 0}$, процесса его максимума $(M_t)_{t \geq 0}$ и его локального времени в нуле $(L_t)_{t \geq 0}$ имеет место следующее равенство по распределению:

$$(M_t - B_t, M_t)_{t \geq 0} \stackrel{\text{law}}{=} (|B_t|, L_t)_{t \geq 0}.$$

Оказывается аналогичное равенство можно доказать и в дискретном случае.

Лемма 1 (дискретная теорема Леви). Для процессов $(S_n)_{n=0,1,\dots}$, $(M_n)_{n=0,1,\dots}$, $(L_n)_{n=0,1,\dots}$, указанных выше, распределения следующих двумерных процессов совпадают:

$$(M_n - S_n, M_n)_{n=0,1,\dots} \stackrel{\text{law}}{=} \left(\left| S_n - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2}, L_n \right)_{n=0,1,\dots}. \quad (1)$$

Доказательство. Заметим, что в обеих частях равенства (1) фигурируют двумерные марковские процессы, выходящие из нуля. Поэтому для доказательства леммы достаточно проверить равенство переходных функций.

Итак, пусть $\Delta_n^1 := (M_{n+1} - S_{n+1}) - (M_n - S_n)$, а $\Delta_n^2 := M_{n+1} - M_n$. Исходя непосредственно из определения процессов (S_n) и (M_n) , легко описать условное распределение этих «будущих» приращений, когда значение самого двумерного процесса $(M_n - S_n, M_n)$ в «настоящий» момент времени n считается известным.

Если $M_n - S_n = 0$, то случайное блуждание находится в точке своего максимума и на следующем шаге либо с вероятностью $\frac{1}{2}$ значение максимума увеличится на единицу, и тогда $(\Delta_n^1, \Delta_n^2) = (0, 1)$, либо же случайное блуждание сделает шаг вниз, при этом $(\Delta_n^1, \Delta_n^2) = (1, 0)$.

Напротив, если $M_n - S_n > 0$, то в такой ситуации максимум не может увеличиться на следующем шаге, и, значит, $\Delta_n^2 = 0$ с вероятностью 1. При этом Δ_n^1 принимает значения ± 1 с вероятностями $\frac{1}{2}$.

Аналогично, пусть $\Delta_n^3 := |S_{n+1} - \frac{1}{2}| - |S_n - \frac{1}{2}|$ и $\Delta_n^4 := L_{n+1} - L_n$.

Рассмотрим случай, когда $|S_n - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Из этого равенства можно сделать вывод, что либо $S_n = 0$, либо $S_n = 1$. Какое именно из этих двух значений имеет место, можно определить по четности n . Но в любом случае случайное блуждание пересечет на следующем шаге уровень $\frac{1}{2}$ с вероятностью $\frac{1}{2}$. Если это произойдет, то L_n увеличится на 1, а значение величины $|S_n - \frac{1}{2}|$ не изменится, т.е. $(\Delta_n^3, \Delta_n^4) = (0, 1)$. В противном случае имеем $(\Delta_n^1, \Delta_n^2) = (1, 0)$.

Пусть теперь $|S_n - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$. Такое неравенство означает, что процесс (S_n) находится слишком далеко от значения $\frac{1}{2}$ и, таким образом, $\Delta_n^4 = 0$ почти наверное, а $\Delta_n^3 = \pm 1$ с равными вероятностями.

Совпадение переходных функций установлено, и, следовательно, равенство (1) действительно имеет место.

О п р е д е л е н и е 2. Процесс $(R_n^{(2)})_{n=0,1,\dots}$ определим по следующей формуле: $R_n^{(2)} := |S_n - \frac{1}{2}| - \frac{1}{2} + L_n$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения. При фиксированном натуральном N мы будем обозначать через Ω_N (конечное) множество, состоящее из всевозможных траекторий простейшего случайного блуждания $(S_n)_{n \leq N}$ до момента времени N . Иначе говоря, $\Omega_N = \{\omega = (\omega_0, \dots, \omega_N)\}$, где $\omega_0 = 0$, а для всякого $n < N$ выполнено $\omega_{n+1} - \omega_n = \pm 1$. Обозначим также через Ω_∞ множество траекторий случайного блуждания на неограниченном интервале времени. Через $\Omega_N^+ \subset \Omega_N$ будем обозначать подмножество тех траекторий, которые не принимают отрицательных значений, т.е. для $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_N) \in \Omega_N^+$ при каждом $n \leq N$ имеет место неравенство $\omega_n \geq 0$.

Для случайного блуждания (S_n) рассмотрим следующие моменты времени:

$$\begin{aligned} \tau_0^- &= 0, & \sigma_0^- &= \min\{k > \tau_0^- \mid S_k = 1\} - 1, \\ \tau_1^+ &= \sigma_0^-, & \sigma_1^+ &= \min\{k > \tau_1^+ \mid S_k = 0\} - 1, \\ \tau_1^- &= \sigma_1^+, & \sigma_1^- &= \min\{k > \tau_1^- \mid S_k = 1\} - 1, \\ \tau_2^+ &= \sigma_1^-, & \sigma_2^+ &= \min\{k > \tau_2^+ \mid S_k = 0\} - 1, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Точки, задаваемые формулами (2), разбивают временную ось на отрезки, которые мы будем называть *положительными* и *отрицательными экскурсиями* случайного блуждания. Это построение можно применять как для бесконечного временного интервала, так и при ограничении $(S_n)_{n \leq N}$. Во втором случае для последней экскурсии следует положить $\sigma_k^\pm = N$. Приращением экскурсии мы будем называть разность значений на ее концах.

О п р е д е л е н и е 3. Через $(R_n^{(3)})_{n=0,1,\dots}$ мы обозначим марковский процесс, выходящий из нуля и имеющий следующую переходную функцию:

$$\mathbf{P}(R_{n+1}^{(3)} - R_n^{(3)} = \Delta \mid R_n^{(3)}) = \frac{1}{2} \frac{R_n^{(3)} + 1 + \Delta}{R_n^{(3)} + 1}, \quad \Delta = \pm 1. \quad (4)$$

Для того чтобы дать последнее, четвертое определение дискретного процесса Бесселя, нам придется ограничиться конечным временным интервалом. Рассмотрим на множестве Ω_N^+ вероятностную меру Q_N , заданную формулой $Q_N(\{\omega\}) = c_N(\omega_N + 1)$. Другими словами, траектория, имеющая в последний момент времени значение x , наделяется весом, пропорциональным величине $(x + 1)$. На основании леммы 2 можно проверить, что $c_N = 1/2^N$.

О п р е д е л е н и е 4. Введем $(R_n^{(4)})_{n \leq N}$ как канонический процесс на пространстве Ω_N^+ , рассматриваемый относительно меры Q_N . Под каноническим понимается процесс, заданный равенством $R_n^{(4)}(\omega) = \omega_n$.

Теорема 1. *Определения 1–4 эквивалентны, т.е. все четыре процесса $\{(R_n^{(i)})_{n=0,1,\dots}\}_{i=1,\dots,4}$ имеют одно и то же распределение вероятностей, в дальнейшем все эти процессы мы будем называть дискретным процессом Бесселя и обозначать просто $(R_n)_{n=0,1,\dots}$. При этом распределение процесса (R_n) сходится к распределению непрерывного процесса Бесселя $(R_t)_{t \geq 0}$ в смысле принципа инвариантности Донскера–Прохорова. А именно, если обозначить через $(\tilde{R}_t)_{t \geq 0}$ кусочно-линейную интерполяцию процесса $(R_n)_{n=0,1,\dots}$, то $(\tilde{R}_{mt}/\sqrt{m})_{t \geq 0} \xrightarrow{w} (R_t)_{t \geq 0}$ при $m \rightarrow \infty$ в смысле слабой сходимости распределений в пространстве $\mathcal{C}[0, \infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Практически все утверждения теоремы были уже доказаны выше, так что нам потребуется лишь подвести итоги. Эквивалентность определений 1 и 2 мгновенно следует из леммы 1.

Переходная функция (4) из определения 3 приводилась в работе [1], где ее вычисление базировалось на определении 1. Мы приведем другое доказательство, отталкиваясь от определения 2. Итак проверим, что процесс $(R_n^{(2)})_{n=0,1,\dots}$ марковский и его переходная функция задается формулой (4). Зафиксируем «настоящий» момент времени n . Из леммы 2 видно, что при известном значении $R_n^{(2)} = x$ величина L_n распределена дискретно-равномерно на отрезке $[0, x]$, причем независимо от вида траектории $(R_k^{(2)})_{k \leq n}$. При этом, если $L_n = x$, то $|S_n - \frac{1}{2}| - \frac{1}{2} = 0$ и значение на «следующем» шаге определено однозначно, $R_{n+1}^{(2)} = x + 1$, поскольку L_n не убывает, а $|S_n - \frac{1}{2}| - \frac{1}{2}$ неотрицательно. Вероятность такой ситуации равна $1/(x + 1)$. Если же $L_n < x$, что имеет место с вероятностью $x/(x + 1)$, то $|S_n - \frac{1}{2}| - \frac{1}{2} > 0$, т.е. $S_n \notin \{0, 1\}$, следовательно, L_n не может увеличиться на следующем шаге, поэтому «будущее» значение имеет два равновероятных варианта $R_{n+1}^{(2)} = x \pm 1$. Во-первых, из этих рассуждений следует марковость процесса $(R_n^{(2)})$, а во-вторых, по формуле полной вероятности мы получаем переходную функцию

$$\mathbf{P}(R_{n+1}^{(2)} = x + 1 \mid R_n^{(2)} = x) = \frac{1}{2} \frac{x}{x + 1} + \frac{1}{x + 1}.$$

Таким образом, эквивалентность определений 2 и 3 доказана.

Эквивалентность определений 2 и 4 напрямую следует из леммы 2. Зафиксируем «последний» момент времени N . При $R_N^{(2)} = x$ имеется ровно $(x + 1)$ возможных значений для $y = L_N$. Все траектории пространства Ω_N равновероятны относительно меры $\text{Law}((S_n)_{n \leq N})$, где (S_n) — случайное блуждание, фигурирующее в определении 2. Следовательно, распределение $\text{Law}((R_n^{(2)})_{n \leq N})$, которое индуцировано отображением ψ_N , совпадает с мерой Q_N , введенной в определении 4. Заметим, что это заодно доказывает согласованность семейства мер $(Q_N)_{N=0,1,\dots}$.

Последнее утверждение теоремы, в котором говорится о сходимости к непрерывному процессу Бесселя, доказано в работе [1]. Также оно сразу следует из определения 1, принципа инвариантности Донскера–Прохорова для броуновского движения

(предложение 1) и теоремы Питмана (предложение 2). При этом следует воспользоваться тем, что взятие максимума является непрерывной операцией в пространстве $\mathcal{C}[0, \infty)$.

Прямым следствием полученных результатов являются следующие утверждения.

Следствие (дискретная теорема Питмана). *Рассмотрим процессы $(S_n)_{n=0,1,\dots}$, $(M_n)_{n=0,1,\dots}$ и $(R_n)_{n=0,1,\dots}$, определенные выше. Положим $J_n := \inf_{k \geq n} R_k$. Тогда следующие двумерные процессы совпадают по распределению:*

$$(2M_n - S_n, M_n)_{n=0,1,\dots} \stackrel{\text{law}}{=} (R_n, J_n)_{n=0,1,\dots},$$

причем условное распределение $\text{Law}(J_n | F_n)$ является дискретным равномерным распределением, т.е. J_n принимает значения $0, 1, \dots, R_n$ с равными вероятностями. Здесь $F_n := \sigma(R_k, k = 0, 1, \dots, n)$.

Доказательство. Равенство распределений первых компонент указанных двумерных процессов следует из определения 1, а соотношение $M_n = \inf_{k \geq n} (2M_k - S_k)$, как уже упоминалось ранее, следует из возвратности случайного блуждания. Равномерность рассматриваемого условного распределения следует из леммы 2.

Следствие (ср. [2, гл. VI, предложение 3.3]). *Пусть $(R_n)_{n=0,1,\dots}$ — дискретный процесс Бесселя. Тогда для любых моментов остановки $n_1 \leq n_2$, между которыми R_n не обращается в нуль, процесс $((R_n + 1)^{-1})_{n=n_1, \dots, n_2}$ является мартингалом.*

Доказательство состоит в непосредственной проверке мартингального свойства на основании формулы (4) определения 3.

3. Свойства дискретного процесса Бесселя. Основная цель этого пункта — сформулировать и доказать дискретный аналог теоремы Вильямса и разложения Вильямса, двух известных соотношений между броуновским движением и процессом Бесселя размерности три, точные формулировки которых можно найти, например, в [2, гл. VI, теорема 3.11 и гл. VII, теорема 4.9]. Эти результаты восходят к работе [3].

Вначале докажем несколько вспомогательных утверждений. Все они являются дискретными вариантами известных взаимосвязей между процессом Бесселя и броуновским движением. Введем необходимые обозначения. Для дискретного случайного процесса $(X_n)_{n=0,1,\dots}$, принимающего значения в пространстве Ω_∞ , и целого числа a определим следующие случайные моменты времени:

$$\begin{aligned} l_a(X) &:= \inf\{n \mid X_n = a\}, & l_{a+}(X) &:= \inf\{n \mid X_n = a + 1\} - 1, \\ r_{a-}(X) &:= \sup\{n \mid X_n = a - 1\} + 1, & r_a(X) &:= \sup\{n \mid X_n = a\}. \end{aligned}$$

О п р е д е л е н и е 5. Пусть (R_n) — дискретный процесс Бесселя. Процесс, задаваемый равенством $R_n^+ := R_{n+r_0(R)}$, мы будем называть *положительным дискретным процессом Бесселя*.

Лемма 3 (ср. [2, гл. VII, предложение 4.8]). *Пусть $(R_n)_{n=0,1,\dots}$ — дискретный процесс Бесселя. Выберем произвольное целое $a > 0$ и рассмотрим момент $l_{a+}(R)$. Процесс (R_n) , остановленный в этот момент, обладает симметричностью распределения в следующем смысле:*

$$(R_n)_{n \leq l_{a+}(R)} \stackrel{\text{law}}{=} (a - R_{l_{a+}(R) - n})_{n \leq l_{a+}(R)}.$$

Доказательство. Легко видеть, что у рассматриваемых процессов совпадают множества траекторий. Это все траектории $(\omega_n)_{0 \leq n \leq N} \in \Omega_N^+$, $N > 0$, такие, что $\omega_0 = 0$, $\omega_N = a$ и для каждого $n \leq N$ выполнены неравенства $0 \leq \omega_n \leq a$. Докажем, что при фиксированном значении $l_{a+}(R) = N$ все эти траектории равновероятны. Это не следует сразу из определения 4, поскольку момент $l_{a+}(R)$ не является моментом остановки. Но равенство $l_{a+}(R) = N$ эквивалентно тому, что $l_{a+1}(R) = N + 1$, а величина $l_{a+1}(R)$ уже является марковским моментом. Поэтому из определения 4 следует, что каждая из этих траекторий имеет вероятность $c_{N+1}(a + 2)$, где $c_{N+1} = 1/2^{N+1}$. На этом доказательство леммы завершается.

Лемма 3'. *Утверждение леммы 3 также справедливо для положительного процесса Бесселя $(R_n^+)_{n=0,1,\dots}$, остановленного в момент $l_a(R_n^+)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся определением 5 и применим лемму 3. Остается заметить, что при симметрии, рассматриваемой в лемме 3, моменты r_0 и l_a переходят друг в друга.

И еще одна вариация леммы 3.

Лемма 3'. *Справедливо следующее равенство распределений:*

$$(R_n)_{n \leq l_a(R)} \stackrel{\text{law}}{=} (a - R_{l_{a+}(R^+) - n})_{n \leq l_{a+}(R^+)},$$

где $(R_n)_{n=0,1,\dots}$ и $(R_n^+)_{n=0,1,\dots}$ — это соответственно обычный и положительный процессы Бесселя.

Это утверждение также является прямым следствием определения 5 и леммы 3.

Лемма 4 (ср. [2, гл. VI, предложение 3.9]). Пусть $(R_n)_{n=0,1,\dots}$ — дискретный процесс Бесселя, а целое число $a > 0$. Обозначим $J_n = \inf_{k \geq n} R_k$. Пусть некоторый случайный момент времени ν обладает свойством $R_\nu = J_\nu$ и к тому же является моментом остановки относительно двумерного процесса (R_n, J_n) . Тогда процесс $(\tilde{R}_n)_{n=0,1,\dots}$, задаваемый формулой $\tilde{R}_n := R_{n+\nu} - R_\nu$, независим от $(R_n)_{n \leq \nu}$ и также является дискретным процессом Бесселя. В частности, в качестве ν можно взять момент $r_{a-}(R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим процесс $(R_n)_{n=0,1,\dots}$ в виде, указанном в определении 1, т.е. пусть $R_n = 2M_n - S_n$, где $(S_n)_{n=0,1,\dots}$ — некоторое простейшее симметричное случайное блуждание, а $(M_n)_{n=0,1,\dots}$ — процесс его максимума. Как уже упоминалось, из возвратности случайного блуждания можно заключить, что $J_n = M_n$. Таким образом, мы получаем, что $S_\nu = M_\nu$. Из марковского свойства процесса $(S_n, M_n)_{n=0,1,\dots}$ следует, что процесс $\tilde{S}_n := S_{n+\nu} - S_\nu$ также является простейшим симметричным случайным блужданием, причем независимым от $(S_n)_{n \leq \nu}$. Непосредственными вычислениями легко проверить соотношение $\tilde{R}_n = 2\tilde{M}_n - \tilde{S}_n$, где $\tilde{M}_n = \sup_{k \leq n} \tilde{S}_k = M_{n-\nu} - M_\nu$. Это и доказывает лемму.

Лемма 5 (ср. [2, гл. VII, следствие 4.6]). Пусть $(R_n)_{n=0,1,\dots}$ вновь обозначает дискретный процесс Бесселя, а $(S_n)_{n=0,1,\dots}$ — некоторое симметричное случайное блуждание. Зафиксируем произвольное целое $a > 0$ и рассмотрим моменты $r_a(R)$ и $l_{a+}(S)$. Тогда следующие два процесса равны по распределению:

$$(S_n)_{n \leq l_{a+}(S)} \stackrel{\text{law}}{=} (a - R_{r_a(R) - n})_{n \leq r_a(R)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в лемме 3, сразу можно заметить, что у этих двух процессов совпадают носители. Их общий носитель состоит в точности из тех траекторий $(\omega_n)_{0 \leq n \leq N} \in \Omega_N$, $N > 0$, для которых выполнены соотношения $\omega_0 = 0$, $\omega_N = a$ и $\omega_n \leq a$ для каждого n . Вновь аналогично доказательству леммы 3, из того, что процессы (R_n) и (S_n) марковские, а также из определения 4 можно заключить, что при фиксированном значении $l_{a+}(S) = r_a(R) = N$ все эти траектории равновероятны.

Далее, как и при доказательстве леммы 4, мы будем считать, что процесс Бесселя (R_n) представлен в виде, указанном в определении 1, т.е. $R_n = 2\tilde{M}_n - \tilde{S}_n$ для некоторого случайного блуждания $(\tilde{S}_n)$ и его максимума $(\tilde{M}_n)$. Нетрудно проверить, что в таком случае момент $r_a(R)$ имеет вид $r_a(R) = l_{a+}(\tilde{S})$. Итак, мы убедились, что времена жизни рассматриваемых процессов также распределены одинаково, что и завершает доказательство.

Лемма 5'. *Утверждение леммы 5 останется истинным, если рассматривать в ней положительный процесс Бесселя и момент времени $l_a(S)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в лемме 3', утверждение сразу следует из определения 5 и связи между величинами r_0 и l_a .

Теорема 2 (дискретная теорема Вильямса). Выберем произвольное целое число $b > 0$. Пусть следующие четыре случайных элемента независимы: случайная величина a , имеющая дискретное равномерное распределение на отрезке $[0, b]$; симметричное случайное блуждание $(S_n)_{n=0,1,\dots}$, выходящее из точки b ; два дискретных процесса Бесселя $(R_n^1)_{n=0,1,\dots}$ и $(R_n^2)_{n=0,1,\dots}$.

Определим моменты времени n_1 и n_2 по формулам

$$n_1 = l_b(R^1) := \inf\{n \mid R_n^1 = b\}, \quad n_2 - n_1 = l_a(S) := \inf\{n \mid S_n = a\}.$$

Тогда процесс $(R_n)_{n=0,1,\dots}$, определенный по формуле

$$R_n := \begin{cases} R_n^1, & 0 \leq n \leq n_1, \\ S_{n-n_1}, & n_1 \leq n \leq n_2, \\ a + R_{n-n_2}^2, & n_2 \leq n, \end{cases}$$

имеет распределение дискретного процесса Бесселя.

Доказательство. Рассмотрим другой дискретный процесс Бесселя $(\tilde{R}_n)_{n=0,1,\dots}$ и представим его в виде, указанном в определении 1, т.е. пусть $\tilde{R}_n = 2\tilde{M}_n - \tilde{S}_n$ для некоторого случайного блуждания $(\tilde{S}_n)_{n=0,1,\dots}$ и его максимума $(\tilde{M}_n)_{n=0,1,\dots}$.

Рассмотрим момент $\tilde{n}_1 = l_b(\tilde{R}) := \inf\{n \mid \tilde{R}_n = b\}$ и обозначим значение $\tilde{M}_{\tilde{n}_1}$ через $\tilde{a}$. Как следует из леммы 2, для каждого фиксированного вида траектории $(\tilde{R}_n)_{n \leq \tilde{n}_1}$ величина $\tilde{a}$ распределена дискретно равномерно на отрезке $[0, b]$. Следовательно, ее безусловное распределение также равномерно и она не зависит от $(\tilde{R}_n)_{n \leq \tilde{n}_1}$. К тому же из марковского свойства процесса $(\tilde{R}_n)_{n=0,1,\dots}$ следует, что процессы $(\tilde{R}_n)_{n \leq \tilde{n}_1}$ и $(\tilde{R}_n)_{n \geq \tilde{n}_1}$ независимы.

Далее, положим $\tilde{n}_2 = \inf\{n \mid n \geq \tilde{n}_1, \tilde{R}_n = \tilde{a}\}$. Нетрудно видеть, что $\tilde{M}_n \equiv \tilde{a}$ для всех $n \in [\tilde{n}_1, \tilde{n}_2]$, а следовательно, процесс $(\tilde{R}_n)_{\tilde{n}_1 \leq n \leq \tilde{n}_2}$ имеет распределение симметричного случайного блуждания, выпущенного из точки b в момент времени $\tilde{n}_1$. Независимость этого случайного блуждания от величины $\tilde{a}$ следует из марковости двумерного процесса $(\tilde{S}_n, \tilde{M}_n)$.

Момент $\tilde{n}_2$ удовлетворяет условиям леммы 4, поэтому процесс $(\tilde{R}_{n+\tilde{n}_2} - a)_{n=0,1,\dots}$ является дискретным процессом Бесселя, независимым от $(\tilde{R}_n)_{n \leq \tilde{n}_2}$. На этом доказательство теоремы заканчивается.

Теперь остановим построенный процесс $(R_n)_{n=0,1,\dots}$ в момент $n_3 = r_b(R) := \sup\{n \mid R_n = b\}$ и применим к нему преобразование, состоящее в одновременной инверсии времени и применении отображения $x \mapsto b - x$ к фазовой переменной. На рис. 5, 6 показано, как это происходит.

Рис. 5

Рис. 6

На рис. 5 изображена одна из возможных траекторий процесса $(R_n)_{n=0,1,\dots}$ и отмечены точки n_1, n_2, n_3 . На рис. 6 показан процесс $(X_n := b - R_{n_3-n})_{n \leq n_3}$. Здесь

$c = b - a, m_1 = n_3 - n_2, m_2 = n_3 - n_1, m_3 = n_3$. С помощью доказанных выше лемм легко понять, что происходит с самим процессом $(R_n)_{n \leq n_3}$ и его частями при такой инверсии.

Так, из леммы 5 следует, что сам процесс $(X_n)_{n \leq m_3}$ является простейшим симметричным случайным блужданием, остановленным в момент l_{b+} , а его отрезок $(X_n)_{n \leq m_1}$ есть случайное блуждание до момента l_{c+} . Согласно лемме 5', процесс $(c - X_{n+m_1})_{n \leq m_2 - m_1}$ является положительным процессом Бесселя, рассматриваемым до момента r_c . А процесс $(X_{n+m_2})_{n \leq m_3 - m_2}$ есть положительный процесс Бесселя, остановленный в момент l_{b+} , что следует из леммы 3''. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3 (дискретное разложение Вильямса). *Зафиксируем некоторое целое число $b > 0$ и зададим следующие четыре независимых случайных элемента: случайная величина s с дискретным равномерным распределением на отрезке $[0, b]$; простейшее симметричное случайное блуждание $(S_n)_{n=0,1,\dots}$; два положительных дискретных процесса Бесселя $(R_n^{+,1})_{n=0,1,\dots}$ и $(R_n^{+,2})_{n=0,1,\dots}$.*

Определим моменты времени m_1, m_2 и m_3 по формулам

$$m_1 = l_{c+}(S) := \inf\{n \mid S_n = c + 1\} - 1, \quad m_2 - m_1 = r_c(R_n^{+,1}) := \sup\{n \mid R_n^{+,1} = c\},$$

$$m_3 - m_2 = r_{b+}(R_n^{+,2}) := \inf\{n \mid R_n^{+,2} = b + 1\} - 1.$$

Тогда процесс $(X_n)_{n \leq m_3}$, определенный по формуле

$$X_n := \begin{cases} S_n, & 0 \leq n \leq m_1, \\ c - R_{n-m_1}^{+,1}, & m_1 \leq n \leq m_2, \\ R_{n-m_2}^{+,2}, & m_2 \leq n \leq m_3, \end{cases}$$

имеет распределение простейшего симметричного случайного блуждания, остановленного в момент t_{b+} .

Автор выражает признательность своему научному руководителю Альберту Николаевичу Ширяеву за помощь и поддержку, а также рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pitman J. W. One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. — Adv. Appl. Probab., 1975, v. 7, № 3, p. 511–526.
2. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 602 p.
3. Williams D. Decomposing the Brownian path. — Bull. Amer. Math. Soc., 1970, v. 76, p. 871–873.

Поступила в редакцию
17.VIII.2005

© 2005 г.

JAJTE R.*

POINTWISE ERGODIC THEOREM FOR UNBOUNDED OPERATORS IN L_2

Приводится достаточное условие справедливости усиленного закона больших чисел для траекторий нормального неограниченного оператора. Это условие формулируется в терминах спектральной меры. Чтобы рассмотреть случай неограниченных операторов, мы переходим от инструментов классической арифметики (Чезаро) к методам суммирования Бореля.

* Faculty of Mathematics, University of Łódź, Banacha 22, PL-90-238 Łódź, Poland;
e-mail: rjajte@math.uni.lodz.pl