Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, Меры Эрдёша для случая золотого сечения и марковской цепи второго порядка, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 1, 5–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 13:24:36

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 51

Выпуск 1, 2006 год

январь, февраль, март

© 2006 г.

БЕЖАЕВА З. И.*, ОСЕЛЕДЕЦ В. И.**

МЕРЫ ЭРДЁША ДЛЯ СЛУЧАЯ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ И МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается случайная величина $\zeta = \omega_1\beta^{-1} + \omega_2\beta^{-2} + \dots$, где $\omega_1, \omega_2, \dots$ — стационарная эргодическая цепь Маркова второго порядка с состояниями 0, 1 и β — золотое сечение. Найдены все случаи абсолютной непрерывности функции распределения случайной величины ζ . Для других случаев функция распределения непрерывна и сингулярна. Доказано, что соответствующие меры Эрдёша возникают при склейке состояний в конечной марковской цепи. Изучены эргодические свойства инвариантной меры Эрдёша.

Ключевые слова и фразы: марковская цепь второго порядка, золотое сечение, меры Эрдёша, мера с максимальной энтропией, K -автоморфизм, хаусдорфова размерность меры.

1. Введение. Пусть $\omega_k, k \in \mathbf{Z}$, — стационарная эргодическая апериодическая цепь Маркова второго порядка с состояниями 0, 1. Пусть

$$\zeta(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \rho^k, \quad \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1; \quad F(x) = \mathbf{P}\{\zeta < x\}.$$

Согласно знаменитой теореме Эрдёша, для бернулиевских $\omega_k, k \in \mathbf{Z}$, и для $\beta = 1/\rho$ — чисел Пизо, функция распределения $F(x)$ — непрерывная сингулярная функция.

Далее мы будем рассматривать только случай, когда β — золотое сечение, т.е. $\rho + \rho^2 = 1$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} q &= \mathbf{P}(\omega_1 = 0 \mid \omega_0 = 0, \omega_{-1} = 0), & r &= \mathbf{P}(\omega_1 = 0 \mid \omega_0 = 0, \omega_{-1} = 1), \\ s &= \mathbf{P}(\omega_1 = 0 \mid \omega_0 = 1, \omega_{-1} = 0), & t &= \mathbf{P}(\omega_1 = 0 \mid \omega_0 = 1, \omega_{-1} = 1). \end{aligned}$$

* Московский институт электроники и математики (технический университет), Б. Трехсвятительский пер., 3/12, 109028 Москва, Россия; e-mail: bejaeva@comtv.ru

** Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: oseled@mech.math.msu.su

Значения $q = 1, t = 0$ и комбинации $(r = 0, s = 1), (q = 0, r = 1, s = 1), (r = 0, s = 0, t = 1)$ исключены из-за нашего исходного предположения об эргодичности и апериодичности марковской цепи второго порядка. Во всех остальных случаях цепь ω_k эргодична и апериодична.

В настоящей работе показано, что функция распределения $F(x)$ — непрерывная сингулярная функция, кроме следующих случаев, при которых функция $F(x)$ абсолютно непрерывна:

- 1) $q = \rho, r = \rho, s = 1, t = 1;$
- 2) $q = 0, r = \rho^2, s = \rho, t = 1;$
- 3) $0 \leq q < 1, r = 0, s = \rho^2, t = \rho^2;$
- 4) $q = \rho, r = \rho, s = 1, t = \rho^2;$
- 5) $q = \rho^2, r = \rho^2, s = \rho, t = \rho;$
- 6) $q = \rho, r = \rho, s = \rho^2, t = \rho^2.$

Для случаев 1), 5) и 6) процесс $\omega_k, k \in \mathbb{Z}$, является марковским. Эти случаи абсолютной непрерывности были найдены в [5].

Распределение случайной величины $\rho\zeta$, сосредоточенное на отрезке $[0, 1]$, называется мерой Эрдёша, а ее функция распределения равна $F(\beta x)$. Пусть

$$Vx = \beta x \pmod{1}, \quad x \in [0, 1].$$

Инвариантной мерой Эрдёша называется V -инвариантная мера, относительно которой абсолютно непрерывна мера Эрдёша.

Обозначим через σ меру на отрезке $[0, 1]$ такую, что

$$d\sigma(x) = \begin{cases} (1 + \rho^2)^{-1} \beta dx, & x \in [0, \rho), \\ (1 + \rho^2)^{-1} dx, & x \in [\rho, 1]. \end{cases}$$

Мера σ является V -инвариантной эргодической мерой с максимальной энтропией.

Две эргодические V -инвариантные меры либо совпадают, либо сингулярны. Поэтому мера Эрдёша абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда инвариантная мера Эрдёша совпадает с мерой σ (см. раздел 4).

Воспользуемся тем, что любое число из отрезка $[0, 1]$ (за исключением счетного множества) однозначно записывается в виде $x_1\rho + x_2\rho^2 + \dots$, где $x_k \in \{0, 1\}$ и $x_k x_{k+1} = 0$ (разложение Фибоначчи). Имеем: $\rho\zeta = \eta_1\rho + \eta_2\rho^2 + \dots$, где случайные величины $\eta_k \in \{0, 1\}$ и $\eta_k \eta_{k+1} = 0$.

Компактом Фибоначчи мы называем множество всех бесконечных двоичных слов, в которых две единицы не встречаются рядом. Это множество компактно относительно метрики $d(x, y) = \rho^{n(x, y)}$, где $n(x, y)$ — длина наибольшего общего начала слов x и y .

Бесконечное случайное слово $\eta = \eta_1\eta_2\dots\eta_n\dots$ принимает значения в компакте Фибоначчи и задает на нем меру $\mu(A) = \mathbf{P}\{\eta \in A\}$. Эту меру мы будем называть мерой Эрдёша на компакте Фибоначчи. Сдвиг T

задается формулой $T(x_1x_2x_3\dots) = x_2x_3\dots$ и соответствует преобразованию V при кодировании Фибоначчи.

Заметим еще, что мера σ при кодировании Фибоначчи переходит в T -инвариантную марковскую меру (которую мы будем обозначать той же буквой σ) с переходной матрицей $\begin{pmatrix} \rho & \rho^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и одномерным распределением $(1/(1+\rho^2), \rho^2/(1+\rho^2))$.

T -инвариантная мера ν на компакте Фибоначчи такая, что мера Эрдёша μ абсолютно непрерывна относительно этой меры, называется инвариантной мерой Эрдёша на компакте Фибоначчи. Кодирование Фибоначчи переводит меры Эрдёша на отрезке $[0, 1]$ в меры Эрдёша на компакте Фибоначчи.

Свойства этих мер интересны сами по себе. Для равномерного бернуллиевского случая эргодические свойства мер Эрдёша изучались в [1], для бернуллиевского и марковского — в [5].

В разделе 6 мы докажем, что мера Эрдёша эквивалентна инвариантной мере Эрдёша. Мы докажем, что инвариантная мера Эрдёша — софическая (согласно терминологии [3]), т.е. она возникает при склейке состояний в конечной марковской цепи.

Относительно инвариантной меры Эрдёша сдвиг на компакте Фибоначчи является точным в смысле Рохлина, а соответствующий двусторонний сдвиг является K -автоморфизмом. Отметим также, что при $s = 1$ и $(r = 0, t = 1)$ инвариантная мера Эрдёша является марковской мерой второго порядка, причем хаусдорфова размерность меры Эрдёша равна соответственно

$$\frac{-r^2 \ln r - (1-r)r \ln(1-r) - q(1-q) \ln q - 2(1-q) \ln(1-q)}{(2(1-q) + r) \ln \beta},$$

$$\frac{-s \ln s - (1-s) \ln(1-s)}{(3-2s) \ln \beta}.$$

Все вычисления в этой работе проведены с помощью пакета «Математика».

2. Вывод основных уравнений. Начнем с формул

$$F(x) = \mathbf{E}F(x; \omega_0, \omega_{-1}), \quad F(x; \omega_0, \omega_{-1}) = \mathbf{P}(\zeta < x \mid \omega_0, \omega_{-1}).$$

Теперь мы используем вариант матричного метода Добеши–Лагариаса (см. главу 7 в [2]). Наш вариант основан на соответствующем уравнении для $F(x; \omega_0, \omega_{-1})$. Выведем это уравнение.

Имеем:

$$\zeta(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \rho^k = \rho \omega_1 + \rho \zeta'.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 F(x; \omega_0, \omega_{-1}) &= \mathbf{P}(\zeta < x \mid \omega_0, \omega_{-1}) = \mathbf{P}(\rho\omega_1 + \rho\zeta' < x \mid \omega_0, \omega_{-1}) \\
 &= \mathbf{P}(\zeta' < \beta x - \omega_1 \mid \omega_0, \omega_{-1}) \\
 &= \mathbf{P}(\omega_1 = 0 \mid \omega_0, \omega_{-1}) \mathbf{P}(\zeta' < \beta x \mid 0, \omega_0) \\
 &\quad + \mathbf{P}(\omega_1 = 1 \mid \omega_0, \omega_{-1}) \mathbf{P}(\zeta' < \beta x - 1 \mid 1, \omega_0) \\
 &= \mathbf{P}(\omega_1 = 0 \mid \omega_0, \omega_{-1}) F(\beta x; 0, \omega_0) + \mathbf{P}(\omega_1 = 1 \mid \omega_0, \omega_{-1}) \\
 &\quad \times F(\beta x - 1; 1, \omega_0).
 \end{aligned}$$

Введем вектор-столбец

$$\tilde{F}(x) = (F(x; 0, 0), F(x; 0, 1), F(x; 1, 0), F(x; 1, 1))^T$$

и матрицы

$$P_0 = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & 1-r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}.$$

Тогда выведенное выше уравнение для $F(x; \omega_0, \omega_{-1})$ можно записать в матричной форме $\tilde{F}(x) = P_0 \tilde{F}(\beta x) + P_1 \tilde{F}(\beta x - 1)$. Будет удобнее рассматривать элемент меры $d\tilde{F}(x)$ вместо $\tilde{F}(x)$.

Напомним, что

$$Vx = \{\beta x\} := \begin{cases} \beta x, & x \in [0, \rho), \\ \beta x - 1, & x \in [\rho, 1]. \end{cases}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $x \in [0, \rho)$. Тогда

$$d\tilde{F}(x) = P_0 d\tilde{F}(Vx) + P_1 d\tilde{F}(Vx - 1) = P_0 d\tilde{F}(Vx),$$

$$d\tilde{F}(x + \rho) = P_0 d\tilde{F}(Vx + 1) + P_1 d\tilde{F}(Vx),$$

$$d\tilde{F}(x + 1) = P_0 d\tilde{F}(Vx + 1 + \rho) + P_1 d\tilde{F}(Vx + \rho) = P_1 d\tilde{F}(Vx + \rho).$$

Для случая $x \in [\rho, 1)$

$$d\tilde{F}(x) = P_0 d\tilde{F}(Vx + 1) + P_1 d\tilde{F}(Vx),$$

$$d\tilde{F}(x + \rho) = P_0 d\tilde{F}(Vx + 2) + P_1 d\tilde{F}(Vx + 1) = P_1 d\tilde{F}(Vx + 1),$$

$$d\tilde{F}(x + 1) = 0.$$

Введем блочный вектор-столбец $d\bar{F}(x) = (d\tilde{F}(x), d\tilde{F}(x + \rho), d\tilde{F}(x + 1))^T$.

Кроме этого, рассмотрим блочные матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & P_0 \\ 0 & P_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & P_0 \\ 0 & 0 & P_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(символом 0 обозначена матрица размера 4×4 с нулевыми элементами).

Теперь легко понять, что

$$d\bar{F}(x) = M_0 d\bar{F}(Vx), \quad x \in [0, \rho), \quad d\bar{F}(x) = M_1 d\bar{F}(Vx), \quad x \in [\rho, 1).$$

Преобразование $Vx = \{\beta x\}$ тесно связано с системой исчисления Фибоначчи, в которой за основание берется золотое сечение и о которой уже, фактически, шла речь выше.

Обозначим через $x_1 = x_1(x)$ индикатор отрезка $[\rho, 1]$. Тогда знаки Фибоначчи числа x равны $x_n = x_1(V^{n-1}x)$, $x = x_1\rho + x_2\rho^2 + \dots$. После перехода от числа x к его коду Фибоначчи $x_1x_2\dots x_n\dots$ преобразование V переходит в преобразование сдвига T бесконечных двоичных слов Фибоначчи, которое сводится к затиранию первой буквы слова.

Два предыдущих соотношения для $d\bar{F}(x)$ можно записать аналогично формуле Добеши–Лагариаса (см. [2, § 7.2]) в виде

$$d\bar{F}(x) = M_{x_1} d\bar{F}(Vx), \quad x \in [0, 1).$$

Это уравнение допускает явное решение в следующем смысле: конечное слово Фибоначчи $a = x_1x_2\dots x_n$ (двоичное слово, где нет подслов вида 11) определяет отрезок $\delta(a)$ как совокупность всех чисел, разложение Фибоначчи которых начинается с этого слова. Тогда из предыдущей формулы следует, что векторная мера $\bar{\mu}(x_1x_2\dots x_n) = \bar{\mu}(a) := \int_{\delta(a)} d\bar{F}(x)$ при всех $n \geq 2$ удовлетворяет соотношению

$$\bar{\mu}(x_1x_2\dots x_n) = M_{x_1}\bar{\mu}(x_2\dots x_n) = M_{x_1}M_{x_2}\dots M_{x_{n-1}}\bar{\mu}(x_n).$$

При $n = 1$ имеем $\bar{\mu}(x_1) = \int_{\delta(x_1)} d\bar{F}(x) = M_{x_1} \int_{\delta(x_1)} d\bar{F}(Vx)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(0) &= \bar{F}(\rho) - \bar{F}(0) = M_0 \int_{[0, \rho]} d\bar{F}(\beta x) = M_0(\bar{F}(1) - \bar{F}(0)), \\ \bar{\mu}(1) &= \bar{F}(1) - \bar{F}(\rho) = M_1 \int_{[\rho, 1]} d\bar{F}(\beta x - 1) = M_1(\bar{F}(\rho) - \bar{F}(0)). \end{aligned}$$

Введем векторы $r(0) = \bar{F}(1) - \bar{F}(0) = \bar{\mu}(0) + \bar{\mu}(1)$, $r(1) = \bar{F}(\rho) - \bar{F}(0) = \bar{\mu}(0)$. Тогда $\bar{\mu}(0) = M_0r(0)$, $\bar{\mu}(1) = M_1r(1)$, т.е. для любого слова из одной буквы $\bar{\mu}(x_1) = M_{x_1}r(x_1)$. Отсюда при любом $n \geq 1$

$$\bar{\mu}(x_1x_2\dots x_n) = M_{x_1}M_{x_2}\dots M_{x_n}r(x_n).$$

Для вектора $r = (r(0), r(1))$ справедливы соотношения

$$r(0) = M_0r(0) + M_1r(1), \quad r(1) = M_0r(0).$$

Определим матрицы $M(i, j)$, $i, j \in \{0, 1\}$: $M(0, 0) = M(1, 0) = M_0$, $M(0, 1) = M_1$, $M(1, 1) = 0$ и запишем предыдущие соотношения в виде $r = Mr$, где

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(0, 0) & M(0, 1) \\ M(1, 0) & M(1, 1) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, r — собственный вектор матрицы M с собственным значением 1.

Напомним формулу для векторной меры $\bar{\mu}$: $\bar{\mu}(x_1 x_2 \dots x_n) = M_{x_1} M_{x_2} \dots M_{x_n} r(x_n)$. Из этой формулы мы получим формулу для меры Эрдёша μ . Вспомним, что функция распределения для меры Эрдёша на отрезке $[0, 1]$ равна $F(\beta x)$. Из этого следует, что мера Эрдёша отрезка $\delta(x_1 \dots x_n)$ равна $\mu(x_1 \dots x_n) = \int_{\delta(x_1 \dots x_n)} dF(\beta x) = \sum_{i,j} \pi_{ij} \int_{\delta(x_1 \dots x_n)} dF(\beta x; i, j)$, где $\pi_{ij} = P\{\omega_0 = i, \omega_{-1} = j\}$, $i, j \in \{0, 1\}$.

Вспомним теперь, что при $x \in [0, \rho]$ функции $F(\beta x; i, j)$ — элементы $\tilde{F}(Vx)$ (первого блока вектора $\bar{F}(Vx)$), а при $x \in [\rho, 1]$ функции $F(\beta x; i, j)$ — элементы $\tilde{F}(Vx + 1)$ (последнего, третьего, блока вектора $\bar{F}(Vx)$). Поэтому

$$\mu(x_1 x_2 \dots x_n) = l(x_1) M(x_1, x_2) \dots M(x_{n-1}, x_n) r(x_n), \quad n \geq 2,$$

а строка $l(x_1) = ((1 - x_1)(\pi_{00}, \pi_{01}, \pi_{10}, \pi_{11}), (0, 0, 0, 0), x_1(\pi_{00}, \pi_{01}, \pi_{10}, \pi_{11}))$.

Одномерное распределение имеет вид $\mu(x_1) = l(x_1) r(x_1)$. Так как $\sum_{x_1} \mu(x_1) = 1$, то $lr = 1$, где $l = (l(0), l(1))$, $r = (r(0), r(1))$.

Пусть неотрицательный вектор R пропорционален вектору r . Соответствующие блочные компоненты вектора R обозначим через $R(0)$ и $R(1)$. Запишем формулу для меры Эрдёша в таком виде:

$$\mu(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{l(x_1) M(x_1, x_2) \dots M(x_{n-1}, x_n) R(x_n)}{lR}.$$

Зададим теперь меру ν формулой

$$\nu(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{L(x_1) M(x_1, x_2) \dots M(x_{n-1}, x_n) R(x_n)}{LR}, \quad n \geq 2,$$

$\nu(x_1) = L(x_1) R(x_1) / (LR)$ строка $L = (L(0), L(1))$ — левый собственный вектор матрицы M с собственным значением 1.

В качестве такого вектора L можно взять

$$\begin{aligned} L &= (L(0), L(1)) \\ &= (r(2-t)t, (2-t)t(1-q), 0, (1-q)(1-s), \\ &\quad 0, 0, (2-t)t(1-q), (1-t)(1-q)(1-s), 0, t(1+s-t)(1-q), \\ &\quad 0, 0, 0, 0, (2-t)t(1-q), (1-t)(1-q)(1-s), 0, 0, 0, 0, \\ &\quad r(2-t)t, t, 0, (1-q)(1-s)). \end{aligned}$$

Можно убедиться, что при таком выборе L имеем $LR > 0$.

В разделе 6 мы докажем, что мера Эрдёша абсолютно непрерывна относительно меры ν , т.е. что мера ν является инвариантной мерой Эрдёша на компакте Фибоначчи. Более того, мы докажем, что меры μ и ν эквивалентны.

Если в матрице M выбросить строки и столбцы с номерами 3, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 23, соответствующие номерам нулевых элементов строки L , то получится новая матрица одиннадцатого порядка, для которой мы сохраним старое обозначение M . В этой новой матрице подматрица $M(0, 0)$ будет матрицей размера 6×6 , $M(0, 1)$ будет матрицей размера 6×5 , $M(1, 0)$ будет матрицей размера 5×6 , $M(1, 1)$ будет матрицей размера 5×5 :

$$M = \begin{pmatrix} M(0, 0) & M(0, 1) \\ M(1, 0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Если в строке L и столбце R выбросить элементы с номерами 3, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 23, то получатся новые строка и столбец, для которых мы сохраним старые обозначения. При этом формулы для инвариантной меры Эрдёша на компакте Фибоначчи останутся неизменными.

Рассмотрим следующее кодирование на множестве X' слов Фибоначчи, начинающихся с 0: такое слово x однозначно разбивается на перекрывающиеся блоки 00 и 010 (конечная буква блока есть начальная буква следующего блока), пишем вместо блока 00 цифру 0 и вместо блока 010 цифру 1, получаем бесконечное двоичное слово $y = y_1 y_2 \dots$.

Производное отображение T' на множестве слов x , начинающихся с 0, имеет вид $T'x = Tx$, $x = 00\dots$, $T'x = T^2x$, $x = 010\dots$. При указанном выше кодировании это отображение переходит в сдвиг S на пространстве Y всех бесконечных двоичных слов: $Sy = y_2 y_3 \dots$, $y = y_1 y_2 \dots$.

Пусть $\sigma'(A) = \sigma(A)/\sigma(X')$, $A \subseteq X'$, где σ — T -инвариантная марковская мера с максимальной энтропией на компакте Фибоначчи. При указанном выше кодировании мера σ' на X' переходит в S -инвариантную бернуллиевскую меру с одномерным распределением (ρ, ρ^2) .

Рассмотрим меру $\nu'(A) = \nu(A)/\nu(X')$, $A \subseteq X'$, где ν — T -инвариантная мера Эрдёша на компакте Фибоначчи. При указанном выше кодировании мера ν' на X' переходит в S -инвариантную меру на компакте Y . Мы будем обозначать эту меру той же буквой ν' .

Выведем явную формулу для этой меры. Векторная мера $\bar{\nu}$ на компакте Фибоначчи, определенная формулой

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(\{x: x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n\}) &= M(a_1, a_2) \cdots M(a_{n-1}, a_n) R(a_n), \quad n \geq 2, \\ \bar{\nu}(\{x: x_1 = a_1\}) &= R(a_1), \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению

$$d\bar{\nu}(x) = M(x_1, x_2) d\bar{\nu}(Tx), \quad x \in X.$$

Напомним, что инвариантная мера Эрдёша ν на компакте Фибо-

наччи связана с мерой $\bar{\nu}$ соотношением

$$\nu(\{x: x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n\}) = \frac{L(a_1) \bar{\nu}(\{x: x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n\})}{LR}.$$

Для слов, начинающихся с двух нулей, имеем

$$d\bar{\nu}(x: x_1 = 0, x_2 = 0) = M(0, 0) d\bar{\nu}(T'x).$$

Для слов, начинающихся с 010, имеем $d\bar{\nu}(x) = M(0, 1) d\bar{\nu}(Tx) = M(0, 1) M(1, 0) d\bar{\nu}(T^2x) = M(0, 1) M(1, 0) d\bar{\nu}(T'x)$.

Обозначим $m_0 = M(0, 0)$, $m_1 = M(0, 1) M(1, 0)$.

После кодирования ограничение меры $\bar{\nu}$ на X' переходит в векторную меру на компакте Y . Мы будем обозначать эту меру той же буквой $\bar{\nu}$.

Из предыдущего следует, что эта мера удовлетворяет уравнению

$$d\bar{\nu}(y) = m_{y_1} d\bar{\nu}(Sy), \quad y \in Y.$$

Введем блочную матрицу $m = \begin{pmatrix} m(0, 0) & m(0, 1) \\ m(1, 0) & m(1, 1) \end{pmatrix}$, где $m(0, 0) = m_0$, $m(0, 1) = m_1$, $m(1, 0) = m_0$, $m(1, 1) = m_1$.

Мера ν' на компакте Y (которую мы будем называть инвариантной мерой Эрдеша на компакте Y) задается формулой

$$\nu'(\{y: y_1 = a_1, \dots, y_n = a_n\}) = \frac{L'(a_1) m(a_1, a_2) \cdots m(a_{n-1}, a_n) R'(a_n)}{L'R'}$$

при $n \geq 2$. Если $n = 1$, то $\nu'(\{y: y_1 = a_1\}) = L'(a_1) R'(a_1) / (L'R')$, где $L' = (L'(0), L'(1))$ — левый собственный вектор матрицы m с собственным значением 1, а $R'^T = (R'^T(0), R'^T(1))$ — правый собственный вектор матрицы m с собственным значением 1.

У левого собственного вектора матрицы m с собственным значением 1 координаты с номерами 5, 7, 9, 12 равны 0. Если в матрице m выбросить строки и столбцы с номерами 5, 7, 9, 12, то получится новая матрица, для которой мы сохраним старое обозначение $m = \begin{pmatrix} m(0, 0) & m(0, 1) \\ m(1, 0) & m(1, 1) \end{pmatrix}$, но теперь m будет матрицей размера 8×8 , $m(0, 0)$ будет матрицей размера 5×5 , $m(0, 1)$ будет матрицей размера 5×3 , $m(1, 0)$ будет матрицей размера 3×5 , $m(1, 1)$ будет матрицей размера 3×3 . Теперь матрица m равна

$$m = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-q)s & q(1-q) & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-r)s & (1-q)r & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & (1-t)t & (1-r)t & 0 \\ 0 & 0 & 1-s & 0 & s & 0 & 0 & (1-s)(1-t) \\ 0 & 0 & 0 & 1-r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-r)s & (1-q)r & 0 \\ 0 & 0 & 1-s & 0 & s & 0 & 0 & (1-s)(1-t) \\ 0 & t & 1-t & 0 & t & 0 & 0 & (1-t)^2 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned}
 L' &= (L'(0), L'(1)), & R' &= (R'(0), R'(1)), \\
 L'(0) &= (r(2-t)t, (1-q)(1-s)t, (1-q)(1-s), \\
 &\quad (1-q)(1-r)(1+s-t)t, (1-q)(1+s-t)t), \\
 L'(1) &= ((1-q)(1+s-t)t, (1-q)(1-s+r(1+s-t))t, \\
 &\quad (1-q)(1-s)(1-t)), \\
 R'(0) &= (q-q s+r s, r, (1-s+r(1+s-t))t, 1-s, (1-r)(1-s)), \\
 R'(1) &= (r, 1-s, 1-s+r s-r t).
 \end{aligned}$$

3. Когда инвариантная мера Эрдёша на компакте Фибоначчи совпадает с мерой σ ? Легко видеть, что инвариантная мера Эрдёша на компакте Фибоначчи совпадает с марковской мерой σ тогда и только тогда, когда инвариантная мера Эрдёша ν' на компакте Y совпадает с S -инвариантной бернуллиевской мерой σ' с одномерным распределением (ρ, ρ^2) .

Предположим теперь, что $\nu' = \sigma'$. Тогда спектральный радиус матрицы $m(0, 0)$ равен ρ , а спектральный радиус матрицы $m(1, 1)$ равен ρ^2 . Это легко доказать, выписывая асимптотику при $n \rightarrow \infty$ мер цилиндров, определяемых словами $0^n, 1^n$ соответственно. Собственные значения матрицы $m(0, 0)$ равны $0, q, -\sqrt{s(1-r)}, \sqrt{s(1-r)}$, а собственные значения матрицы $m(1, 1)$ равны $0, (1-t)^2, s(1-r)$. Если $s(1-r) < \rho^2$, то $q = \rho, t = \rho^2$.

3.1. Случай $s(1-r) < \rho^2, q = \rho, t = \rho^2$. Пусть матрица b третьего порядка задана формулой $b = m(1, 0)m(0, 1)$. Спектральный радиус матрицы b равен ρ^3 . Это легко доказать, выписывая асимптотику при $n \rightarrow \infty$ меры цилиндра, определяемого словом $(01)^n$.

Спектральный радиус матрицы b есть корень характеристического многочлена матрицы b . Отсюда получается соотношение $\text{pol}_1 = 0$, где

$$\begin{aligned}
 \text{pol}_1 &= 123 - 55\sqrt{5} - 123r + 21\sqrt{5}s + 199rs - 89\sqrt{5}rs - 29r^2s \\
 &\quad + 13\sqrt{5}r^2s - 29rs^2 + 13\sqrt{5}rs^2 + 29r^2s^2 - 13\sqrt{5}r^2s^2.
 \end{aligned}$$

Из предположения $\nu' = \sigma'$ следует, что $\nu'(\{y: y_1 = 0\})\rho - \nu'(\{y: y_1 = 1\}) = 0$. Отсюда получается соотношение $\text{pol}_2 = 0$, где

$$\begin{aligned}
 \text{pol}_2 &= -11 - 5\sqrt{5} + 11r - 5\sqrt{5}r + 15s - 7\sqrt{5}s - 17rs + 8\sqrt{5}rs \\
 &\quad - \frac{3r^2s}{2} + \frac{\sqrt{5}r^2s}{2} - 4s^2 + 2\sqrt{5}s^2 + 4rs^2 - 2\sqrt{5}rs^2.
 \end{aligned}$$

Базис Грёбнера для идеала с образующими $\text{pol}_1, \text{pol}_2$ содержит многочлен

$$60s - 18\sqrt{5}s - 249s^2 + 67\sqrt{5}s^2 + 341s^3 - 77\sqrt{5}s^3 - 196s^4 + 28\sqrt{5}s^4 + 44s^5.$$

Этот многочлен обращается в нуль на интервале $(0, 1)$ только в точке $s = \rho^2$. Отсюда следует, что $r = \rho$. Прямая проверка (см. раздел 5) показывает, что при $q = \rho, r = \rho, s = \rho^2, t = \rho^2$ есть совпадение мер ν' и σ' .

3.2. Случай $s(1 - r) = \rho^2$. Обозначим через a матрицу третьего порядка $m(1, 1)$. Напомним, что $b = m(1, 0)m(0, 1)$. Эти две матрицы имеют общий образ, т.е. $\text{Im } a = \text{Im } b$. Базисом для него является пара векторов $(1, 0, 0)^T, (0, 1 - s, 1 - t)^T$, если $st \neq 1$. Если же $s = 1, t = 1$, то $r = \rho$ и из соотношения $\nu'(\{y: y_1 = 0\})\rho - \nu'(\{y: y_1 = 1\}) = 0$ следует, что $q = \rho$. Прямая проверка (см. раздел 5) показывает, что при таких значениях параметров есть совпадение мер.

Матрицы a, b задают линейные преобразования в инвариантном общем образе. Матрицы этих линейных преобразований относительно указанного базиса обозначим теми же буквами a, b . Теперь это матрицы второго порядка

$$a = \begin{pmatrix} s(1 - r) & (1 - q)r(1 - s) \\ 0 & (1 - t)^2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} (1 - q)rs & (1 - q)qr(1 - s) \\ (1 - t)t & (1 - r)(1 - s)t \end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус матрицы a равен ρ^2 . Спектральный радиус матрицы b равен ρ^3 . Из условия совпадения мер ν' и σ' следует, что полугруппа, порожденная матрицами a, b , удовлетворяет условию мультипликативности спектрального радиуса. Возможны два случая:

1) либо эта полугруппа неприводима, т.е. наименьшее инвариантное пространство двумерно;

2) либо у матриц a, b есть общий собственный вектор.

Рассмотрим вначале случай 1). Так как полугруппа, порожденная матрицами a, b , удовлетворяет условию мультипликативности спектрального радиуса, то из [4] следует, что спектр матрицы

$$a = \begin{pmatrix} s(1 - r) & (1 - q)r(1 - s) \\ 0 & (1 - t)^2 \end{pmatrix}$$

состоит либо из двух чисел $s(1 - r) = \rho^2$ и 0, либо из одного числа $s(1 - r) = \rho^2$. В первом случае тогда $t = 1$ и матрица b — верхняя треугольная матрица, что противоречит неприводимости полугруппы. Если спектр состоит из одного числа $s(1 - r) = \rho^2$, то $t = \rho^2$.

Далее, спектр матрицы b состоит либо из двух чисел ρ^3 и 0, либо из одного числа ρ^3 . Если спектр состоит из двух чисел, то при $r = 0$ получаем, что $s = \rho^2, t = \rho^2$. Прямая проверка (см. раздел 5) показывает, что в этом случае инвариантная мера Эрдёша совпадает с мерой σ . Если $r > 0$, то при $s < 1$ из равенств $\det(b) = 0, t = \rho^2$ следует, что $q = \rho$. Из

соотношения $\nu'(\{y: y_1 = 0\})\rho - \nu'(\{y: y_1 = 1\}) = 0$ мы получаем $s = \rho^2$, что противоречит равенству $s(1-r) = \rho^2$.

Если $s = 1$, из равенств $\text{trace}(b) = \rho^3$, $s(1-r) = \rho^2$, $t = \rho^2$ получаем, что $q = \rho$, $r = \rho$, $s = 1$, $t = \rho^2$. Прямая проверка (см. раздел 5) показывает, что в этом случае инвариантная мера Эрдёша совпадает с мерой σ , хотя для такого набора параметров полугруппа не является неприводимой.

Остался случай одноточечного спектра матрицы b . Здесь мы имеем равенства $\det(b) = \rho^6$, $\text{trace}(b) = 2\rho^3$, $s(1-r) = \rho^2$. Исключая переменные r, q из этих соотношений, мы получаем соотношение $\text{pol} = 0$, где

$$\text{pol} = -1042 + 466\sqrt{5} + (2236 - 1000\sqrt{5})s - (1896 - 848\sqrt{5})s^2 - (94 - 42\sqrt{5})s^4.$$

Из равенства $s(1-r) = \rho^2$ следует, что $s \geq \rho^2$. Многочлен pol не обращается в нуль на полуоткрытом интервале $(\rho^2, 1]$. Следовательно, если $s \in (\rho^2, 1]$, то совпадения мер ν' и σ' нет.

Если же $s = \rho^2$, то $r = 0$, $t = \rho^2$, $0 \leq q < 1$. Этот случай дает совпадение мер ν' и σ' (см. раздел 5).

Рассмотрим теперь случай 2). Если общий собственный вектор матриц a, b равен $(1, 0)^T$, то $(1-t)t = 0$. Равенство $t = 0$ невозможно. Если $t = 1$, то либо $(1-q)rs = \rho^3$, либо $(1-r)(1-s) = \rho^3$.

В первом случае $r = \rho^2/(1-\rho q)$, $s = (\rho - \rho^2 q)/(1-q)$. Из предположения $\nu' = \sigma'$ следует, что $\nu'(\{y: y_1 = 0\})\rho - \nu'(\{y: y_1 = 1\}) = 0$. Отсюда получается соотношение $\text{pl} = 0$, где $\text{pl} = -9 + 4\sqrt{5} + (-20 + 9\sqrt{5})q + (-9 + 4\sqrt{5})q^2$. Отсюда $q = \rho$. Следовательно, $q = r = \rho$, $s = 1$, $t = \rho^2$. В этом случае есть совпадение мер (см. раздел 5).

Во втором случае $r = \rho^2$, $s = \rho$ и из соотношения $\nu'(\{y: y_1 = 0\})\rho - \nu'(\{y: y_1 = 1\}) = 0$ следует, что $q = 0$. Прямая проверка (см. раздел 5) показывает, что в этом случае инвариантная мера Эрдёша совпадает с мерой σ .

Пусть общим собственным вектором матриц a и b будет вектор, отвечающий собственному значению $(1-t)^2$ матрицы a . В этом случае $t > \rho^2$, поскольку иначе собственный вектор матрицы a только один. Тогда за собственный вектор можно взять вектор $v = ((1-q)r(1-s), (1-t)^2 - \rho^2)^T$. Соответствующее собственное значение матрицы b равно $\text{trace}(b) - \rho^3$.

Из равенств $\nu'(\{y: y_1 = 0\})\rho - \nu'(\{y: y_1 = 1\}) = 0$, $s(1-r) = \rho^2$ получаем полиномиальное соотношение для q, s, t , линейное по q . Поэтому q однозначно определяется по s, t за исключением таких значений s, t , когда наша линейная функция от q тождественно равна нулю. Это дает соотношения $\text{pol}_3(s, t) = 0$, $\text{pol}_4(s, t) = 0$, где $\text{pol}_3, \text{pol}_4$ — полиномы. Базис Грёбнера для идеала с образующими $\text{pol}_3, \text{pol}_4$ содержит многочлен $4t - 20t^2 + 2\sqrt{5}t^2 + 17t^3 - \sqrt{5}t^3 - 4t^4$. Единственный корень этого многочлена, лежащий на отрезке $[\rho^2, 1]$, это $t = \rho^2$. Отсюда легко получается,

что $s = \rho^2$, $r = 0$. Прямая проверка (см. раздел 5) показывает, что в этом случае инвариантная мера Эрдёша совпадает с мерой σ .

Если же q однозначно определяется по s и t , то мы можем исключить q из полиномиальных соотношений. Например, из равенства вторых координат векторов bv и $(\text{trace}(b) - \rho^3)v$ следует, что

$$\begin{aligned} \frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{rs}{2} - \frac{\sqrt{5}rs}{2} - \frac{qrs}{2} + \frac{\sqrt{5}qrs}{2} + 4t - 2\sqrt{5}t \\ + 3rst - 3qrst - 2t^2 + \sqrt{5}t^2 - 2rst^2 + 2qrst^2 = 0. \end{aligned}$$

Исключая q и r из этого соотношения, мы получаем новое полиномиальное соотношение $\text{pol}_5 = 0$, где

$$\begin{aligned} \text{pol}_5 = & -11s + 5\sqrt{5}s + 11s^2 - 5\sqrt{5}s^2 + 98t - 44\sqrt{5}t - 87st + 39\sqrt{5}st \\ & - 11s^2t + 5\sqrt{5}s^2t + 89t^2 - 39\sqrt{5}t^2 - 40st^2 + 16\sqrt{5}st^2 - 35s^2t^2 \\ & + 17\sqrt{5}s^2t^2 - 201t^3 + 89\sqrt{5}t^3 + 180st^3 - 78\sqrt{5}st^3 - 2\sqrt{5}s^2t^3 \\ & + 61t^4 - 27\sqrt{5}t^4 - 60st^4 + 26\sqrt{5}st^4 + 6s^2t^4 - 2\sqrt{5}s^2t^4. \end{aligned}$$

Аналогично из равенства первых координат выводится полиномиальное соотношение $\text{pol}_6 = 0$.

В итоге мы имеем два соотношения $\text{pol}_5 = 0$, $\text{pol}_6 = 0$, где pol_5 , pol_6 — полиномы от переменных s , t . Решением этой системы является $t = \rho$, $s = \rho$.

Численный счет показывает, что указанная система уравнений не имеет других решений в области $\rho^2 < s < 1$, $\rho^2 < t < 1$. Если $t = \rho$, $s = \rho$, то $q = \rho^2$, $r = \rho^2$. Прямая проверка (см. раздел 5) показывает, что в этом случае инвариантная мера Эрдёша совпадает с мерой σ .

4. Эргодические свойства инвариантной меры Эрдёша на компакте Фибоначчи. Рассмотрим вопрос об эргодичности инвариантной меры Эрдёша. Инвариантная мера Эрдёша на компакте Y эргодична тогда и только тогда, когда эргодична инвариантная мера Эрдёша на компакте Фибоначчи. Оказывается, что тут важно изучить эргодические свойства стационарной марковской цепи, которая просто строится по матрице M одиннадцатого порядка (такой подход к задаче Эрдёша был предложен авторами в [5]). Инвариантная мера Эрдёша возникает при склейке состояний в этой ассоциированной цепи.

Рассмотрим блочную матрицу из предыдущего раздела

$$M = \begin{pmatrix} M(0,0) & M(0,1) \\ M(1,0) & M(1,1) \end{pmatrix},$$

M — матрица размера 11×11 , $M(0,0)$ — матрица размера 6×6 , $M(0,1)$ — матрица размера 6×5 , $M(1,0)$ — матрица размера 5×6 , $M(1,1)$ — нулевая матрица размера 5×5 .

Матрица M задает стационарную марковскую цепь на пространстве из первых одиннадцати натуральных чисел по следующему правилу: вероятность того, что начало реализации будет $i_1 i_2 \dots i_n$, равна $L_{i_1} M_{i_1 i_2} \dots M_{i_{n-1} i_n} R_{i_n} / (LR)$, где M_{ij} , L_i , R_j — элементы матрицы M и векторов L, R соответственно. Напомним, что неотрицательные векторы L, R — соответственно левый и правый собственный вектор матрицы M с собственным значением 1.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ — ассоциированная с матрицей M стационарная марковская цепь. Правило склейки f состояний этой цепи определим формулой $f(i) = 0$ при $i \leq 6$ и $f(i) = 1$ при $i > 6$. Тогда распределение бесконечного двоичного слова $f(\alpha_1) f(\alpha_2) \dots f(\alpha_n) \dots$ совпадает с инвариантной мерой Эрдёша (см. [5]).

Для каждого допустимого набора значений параметров определим множество несущественных состояний как множество состояний нулевой вероятности. Ясно, что их можно выкинуть и рассмотреть марковскую цепь на оставшемся множестве.

Эргодичность и апериодичность стационарной марковской цепи полностью определяется множеством положительных элементов «сокращенной» матрицы M , т.е. соответствующим «сокращенным» графом. Из эргодичности марковской цепи следует эргодичность меры Эрдёша, причем эта мера не имеет атомов, так как функция f непостоянна.

В таблице 1 приведен список наборов значений параметров с указаниями числа состояний «сокращенной» марковской цепи и номеров несущественных состояний. Этот список получается из явных формул для одномерного распределения ассоциированной марковской цепи на пространстве из одиннадцати состояний и вида соответствующих «сокращенных» графов.

Все эти графы сильно связны и апериодичны. Поэтому соответствующие марковские цепи эргодичны и апериодичны. Отсюда следует, что сдвиги в пространстве реализаций этих цепей являются точными в смысле Рохлина, и поскольку сдвиг на компакте Фибоначчи с инвариантной мерой Эрдёша есть фактор марковского сдвига, то относительно инвариантной меры Эрдёша сдвиг является точным в смысле Рохлина, а соответствующий двусторонний сдвиг является K -автоморфизмом.

Обратим внимание на случаи 14, 23 и 6, 11, 16, 19, 21. Для компакта Y и матрицы m в случаях 14, 23 есть периодичность. Для этих случаев инвариантная мера Эрдёша отвечает марковской цепи второго порядка на компакте Фибоначчи и хаусдорфова размерность меры Эрдёша равна

$$\frac{-s \ln s - (1-s) \ln(1-s)}{(3-2s) \ln \beta}.$$

В случаях 6, 11, 16, 19, 21 инвариантная мера Эрдёша отвечает марковской цепи второго порядка на компакте Фибоначчи и хаусдорфова

размерность меры Эрдёша равна

$$\frac{-r^2 \ln r - (1-r)r \ln(1-r) - q(1-q) \ln q - (1-q)2 \ln(1-q)}{(2(1-q) + r) \ln \beta}.$$

Таблица 1.

	Условия на параметры цепи	Число состояний сокращенной цепи	Несущественные состояния
1	$qrst(1-q)(1-r)(1-s)(1-t) > 0$	11	нет
2	$r = 0, qst(1-q)(1-s)(1-t) > 0$	6	1, 2, 7, 8, 9
3	$s = 0, rqt(1-r)(1-q)(1-t) > 0$	10	7
4	$q = 0, rst(1-r)(1-s)(1-t) > 0$	11	нет
5	$r = 1, qst(1-q)(1-s)(1-t) > 0$	9	6, 10
6	$s = 1, rqt(1-r)(1-q)(1-t) > 0$	3	3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11
7	$t = 1, rqs(1-r)(1-q)(1-s) > 0$	8	5, 8, 11
8	$q = 0, r = 0, st(1-s)(1-t) > 0$	6	1, 2, 7, 8, 9
9	$q = 0, r = 1, rt(1-r)(1-t) > 0$	9	6, 10
10	$q = 0, s = 0, rt(1-r)(1-t) > 0$	9	1, 7
11	$q = 0, s = 1, rt(1-r)(1-t) > 0$	3	3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11
12	$q = 0, t = 1, rs(1-r)(1-s) > 0$	8	5, 8, 11
13	$r = 0, s = 0, qt(1-q)(1-t) > 0$	6	1, 2, 7, 8, 9
14	$r = 0, t = 1, qs(1-q)(1-s) > 0$	4	1, 2, 5, 7, 8, 9, 11
15	$r = 1, s = 0, qt(1-q)(1-t) > 0$	8	6, 7, 10
16	$r = 1, s = 1, qt(1-q)(1-t) > 0$	3	3, 4, 5, 6, 8, 10, 11
17	$r = 1, t = 1, qs(1-q)(1-s) > 0$	6	5, 6, 8, 10, 11
18	$s = 0, t = 1, qr(1-q)(1-r) > 0$	6	5, 6, 7, 8, 11
19	$s = 1, t = 1, qr(1-q)(1-r) > 0$	3	3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11
20	$r = 1, s = 0, t = 1, q(1-q) > 0$	5	5, 6, 7, 8, 10, 11
21	$r = 1, s = 1, t = 1, q(1-q) > 0$	3	3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11
22	$q = 0, s = 0, t = 1, r(1-r) > 0$	5	1, 5, 6, 7, 8, 11
23	$q = 0, r = 0, t = 1, s(1-s) > 0$	4	1, 2, 5, 7, 8, 9, 11
24	$q = 0, r = 1, t = 1, s(1-s) > 0$	6	5, 6, 8, 10, 11
25	$q = 0, r = 0, s = 0, t(1-t) > 0$	6	1, 2, 7, 8, 9
26	$q = 0, r = 1, s = 0, t(1-t) > 0$	7	1, 6, 7, 10

5. Когда мера Эрдёша абсолютно непрерывна? Мера Эрдёша абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда инвариантная мера Эрдёша на компакте Фибоначчи совпадает с мерой σ . Ранее мы доказали, что это возможно лишь для значений параметров, указанных в (1).

Докажем, что при таких значениях параметров есть совпадение мер ν и σ . Для случаев 1) и 4) ассоциированная «сокращенная» марковская цепь согласно пунктам 6, 19 таблицы имеет три состояния, причем переходная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 & \rho^2 \\ \rho & 0 & \rho^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Правило склейки имеет вид $f(1) = f(2) = 0, f(3) = 1$. Теперь без труда проверяется, что $\nu = \sigma$.

Для случая 2) инвариантная мера Эрдёша на компакте Y определяется матрицей m восьмого порядка. Но если выбросить столбец и строку с номером 8 (для случая 2 состояние с этим номером несущественное), то получим матрицу седьмого порядка, причем инвариантная мера Эрдёша определяется этой матрицей по тем же формулам. Будем обозначать ее той же буквой m : $m = \begin{pmatrix} m(0,0) & m(0,1) \\ m(1,0) & m(1,1) \end{pmatrix}$. Теперь m будет матрицей размера 7×7 , $m(0,0)$ будет матрицей размера 5×5 , $m(0,1)$ будет матрицей размера 5×2 , $m(1,0)$ будет матрицей размера 2×5 , $m(1,1)$ будет матрицей размера 2×2 .

Мы вычислим вероятность цилиндра, определяемого словом $10^{k_1} 10^{k_2} \dots 10^{k_n} 1$, относительно инвариантной меры Эрдёша (слово 0^0 — пустое слово). Она равна вероятности этого цилиндра относительно меры Бернулли с одномерным распределением (ρ, ρ^2) . Отсюда будет следовать, что $\nu = \sigma$.

Введем матрицы $b(k) = m(1,0)(m(0,0))^{k-1}m(0,1)$, $k \geq 1$, $b(0) = m(1,1)$. Напомним, что инвариантная мера Эрдёша ν' на компакте Y задается формулами

$$\nu'(\{y: y_1 = a_1, \dots, y_n = a_n\}) = \frac{L'(a_1) m(a_1, a_2) \dots m(a_{n-1}, a_n) R'(a_n)}{L' R'}$$

при $n \geq 2$ и

$$\nu'(\{y: y_1 = a_1\}) = \frac{L'(a_1) R'(a_1)}{L' R'},$$

где $L' = (L'(0), L'(1))$ — левый собственный вектор матрицы m с собственным значением 1, а $R'^T = (R'^T(0), R'^T(1))$ — правый собственный вектор матрицы m с собственным значением 1. Мы возьмем $R'^T(1) = (1, 1)$, $L'(1) = (1, 1)$. Имеем:

$$\nu'(10^{k_1} 10^{k_2} \dots 10^{k_n} 1) = \frac{L'(1) b(k_1) b(k_2) \dots b(k_n) R'(y_n)}{L' R'}.$$

Далее, матрица $b(k)$, $k \geq 2$, равна $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho^{k+2} & \rho^{k+2} \end{pmatrix}$, $b(1) = \rho^3 \text{Id}$. Несложное вычисление на основе полученных формул дает искомый результат.

Для случая 3) инвариантная мера Эрдёша на компакте Y определяется матрицей m восьмого порядка, но если выбросить столбцы и строки с номерами 1, 2, 6 несущественных состояний, то получим матрицу пятого порядка, причем инвариантная мера Эрдёша определяется этой матрицей по тем же формулам. Будем обозначать новую матрицу той же буквой m , но теперь m будет матрицей размера 5×5 , $m(0,0)$ — матрицей размера 3×3 , $m(0,1)$ — матрицей размера 3×2 , $m(1,0)$ — матрицей размера 2×3 , $m(1,1)$ — матрицей размера 2×2 . Здесь

$R'^T(1) = (1, 1)$, $L'(1) = (\rho, 1)$, матрица $b(2k)$, $k \geq 0$, равна $\begin{pmatrix} 0 & \rho^{2k+2} \\ 0 & \rho^{2k+2} \end{pmatrix}$, а матрица $b(2k+1)$, $k \geq 0$, равна $\begin{pmatrix} \rho^{2k+3} & 0 \\ \rho^{2k+3} & 0 \end{pmatrix}$. $R'^T(1)$ является собственным вектором для матриц $b(2k)$ и $b(2k+1)$ с собственными значениями ρ^{2k+2} и ρ^{2k+3} соответственно. Отсюда сразу следует искомый результат.

Для случая 6) инвариантная мера Эрдёша на компакте Y определяется матрицей m восьмого порядка, $m(0, 0)$ будет матрицей размера 5×5 , $m(0, 1)$ будет матрицей размера 5×3 , $m(1, 0)$ будет матрицей размера 3×5 , $m(1, 1)$ будет матрицей размера 3×3 . Здесь $R'^T(1) = (\rho, \rho, \rho)$, $L'(1) = (\rho^4, 2\rho^5, \rho^4)$, матрица $b(2k+2)$, $k \geq 0$, равна

$$\begin{pmatrix} \rho^{2k+6} & \rho^{2k+5} & 0 \\ \rho^{2k+6} - \rho^{4k+8} & \rho^{2k+5} - \rho^{4k+7} & \rho^{4k+6} \\ \rho^{2k+6} - \rho^{4k+8} & \rho^{2k+5} - \rho^{4k+7} & \rho^{4k+6} \end{pmatrix},$$

а матрица $b(2k+1)$, $k \geq 0$, равна

$$\begin{pmatrix} \rho^{2k+5} & \rho^{2k+4} & 0 \\ \rho^{2k+5} + \rho^{4k+6} & \rho^{2k+4} - \rho^{4k+6} & 0 \\ \rho^{2k+5} + \rho^{4k+6} & \rho^{2k+4} - \rho^{4k+6} & 0 \end{pmatrix},$$

$R'^T(1)$ является собственным вектором для матриц $b(2k+2)$ и $b(2k+1)$ с собственными значениями ρ^{2k+4} и ρ^{2k+3} соответственно. Отсюда сразу следует искомый результат.

Случай 6) переходит в случай 5), если заменить исходную последовательность случайных величин ω_k , $k \in \mathbf{Z}$, на $1 - \omega_k$, $k \in \mathbf{Z}$, и заметить, что абсолютная непрерывность меры Эрдёша при этой замене сохраняется.

6. Замечание о мере Эрдёша и инвариантной мере Эрдёша на компакте Фибоначчи. Здесь мы докажем, что мера ν на компакте Фибоначчи действительно инвариантная мера Эрдёша, т.е. мы докажем, что мера Эрдёша μ абсолютно непрерывна относительно меры ν . На самом деле, будет доказано более сильное утверждение: меры μ и ν эквивалентны. Пусть $\tilde{Z}$ — пространство бесконечных слов с алфавитом из первых двадцати четырех натуральных чисел и Z — пространство слов вида iz , $i = 0, 1$, $z \in \tilde{Z}$.

Рассмотрим блочную матрицу M и строки l, L из второго раздела:

$$M = \begin{pmatrix} M(0, 0) & M(0, 1) \\ M(1, 0) & M(1, 1) \end{pmatrix},$$

M — матрица размера 24×24 , $M(0, 0) = M_0$ — матрица размера 12×12 , $M(0, 1) = M_1$ — матрица размера 12×12 , $M(1, 0) = M_0$, $M(1, 1)$ — нулевая матрица размера 12×12 .

Матрица M задает стационарную марковскую цепь на пространстве из первых двадцати четырех натуральных чисел по правилу: вероятность того, что начало реализации будет $i_1 i_2 \dots i_n$, равна $L_{i_1} M_{i_1 i_2} \dots M_{i_{n-1} i_n} R_{i_n} / (LR)$, где M_{ij} , L_i , R_j — элементы матрицы M и векторов L, R соответственно. Напомним, что неотрицательные векторы L, R — соответственно левый и правый собственный вектор матрицы M с собственным значением 1. Аналогично определяется вторая марковская цепь с заменой вектора L на вектор l . Эти цепи порождают две меры ν_L, μ_l на пространстве $\tilde{Z}$. Пусть функция f равна 0 для первых двенадцати натуральных чисел и равна 1 для следующих двенадцати чисел. Определим отображение f_1 пространства $\tilde{Z}$ в пространство Z формулой $f_1(z_1 z_2 \dots) = f(z_1) z_2 \dots$.

Пусть $\nu_L f_1^{-1}, \mu_l f_1^{-1}$ — меры на пространстве Z , индуцированные отображением f_1 . Если h — строка длины 24 с элементами h_j , то обозначим через $h^i, i = 0, 1$, строку с элементами $h_j^i = ((1-i)(1-f(j)) + if(j)) h_j$. Очевидно, что если $iz = iz_1 z_2 \dots$, то

$$\frac{d\mu_l f_1(iz)}{d\nu_L f_1(iz)} = \frac{(l^i M)_{z_1}}{(L^i M)_{z_1}}.$$

Из этой формулы следует, что меры $\nu_L f_1^{-1}$ и $\mu_l f_1^{-1}$ эквивалентны.

Определим отображение f_2 пространства Z в пространство X формулой $f_2(iz_1 z_2 \dots z_n \dots) = if(z_1) f(z_2) \dots f(z_n) \dots$. Ясно, что индуцированные этим отображением меры $\nu_L f_1^{-1} f_2^{-1}, \mu_l f_1^{-1} f_2^{-1}$ на пространстве X тоже эквивалентны. Если $\hat{f} = f_2 f_1$, то $\mu_l \hat{f}^{-1} = \mu_l f_1^{-1} f_2^{-1}, \nu_L \hat{f}^{-1} = \nu_L f_1^{-1} f_2^{-1}$. Но мера $\mu_l \hat{f}^{-1}$ совпадает с мерой Эрдёша, а мера $\nu_L \hat{f}^{-1}$ совпадает с инвариантной мерой Эрдёша (см. [5]). Следовательно, мера Эрдёша эквивалентна инвариантной мере Эрдёша.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sidorov N., Vershik A. Ergodic properties of the Erdős measures, the entropy of the golden shift, and related problems. — *Monatsh. Math.*, 1998, v. 126, № 3, p. 215–261.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004, 464 с.
3. Markus B., Petersen K., Williams S. Transmission rates and factors of Markov chains. — *Contemp. Math.*, 1984, v. 26, p. 279–293.
4. Omladič M., Radjavi H. Irreducible semigroups with multiplicative spectral radius. — *Linear Algebra Appl.*, 1997, v. 251, p. 59–72.
5. Бежаева З. И., Оселедец В. И. Меры Эрдёша, софические меры и марковские цепи. — *Зап. научн. семин. ПОМИ*, 2005, т. 327, с. 28–47.

Поступила в редакцию
12.X.2005