Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова, Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 1, 22–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:03:12

© 2006 г.

ВАТУТИН В. А.*, ДЬЯКОНОВА Е. Е.*

ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ И БУТЫЛОЧНЫЕ ГОРЛЫШКИ В ЭВОЛЮЦИИ ПОПУЛЯЦИЙ¹⁾

Рассматривается ветвящийся процесс $Z(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных производящих функций $f_0(s), f_1(s), f_2(s), \dots$. Пусть $S_0 = 0$, $S_k = \ln f'_0(1) + \dots + \ln f'_{k-1}(1)$, $k \geq 1$, — сопровождающее случайное блуждание, а $\tau(n)$ — самая левая точка, в которой достигается минимум блуждания $\{S_k\}_{k \geq 0}$ на интервале $[0, n]$. В предположении, что выполнено условие Спичера

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{S_k > 0\} \rightarrow \rho \in (0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

показано, что для типичной случайной среды, любого $t \in (0, 1]$ и $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ условное распределение величины $Z(\tau(nt) + m)$ при условии $Z(n) > 0$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к (случайному) дискретному распределению. Таким образом, в отличие от неслучайных моментов вида nt , в которые (при тех же условиях) размер популяции $Z(nt)$ велик (и даже экспоненциально велик, см. [10]), размер популяции в (случайные) моменты последовательных минимумов сопровождающего случайного блуждания резко уменьшается, и, следовательно, ветвящийся процесс проходит через серию бутылочных горлышек в моменты, соответствующие этим точкам минимумов.

В качестве следствия указанных результатов найдено распределение локального времени первой экскурсии простого случайного блуждания в типичной случайной среде при условии достижения этой экскурсией высокого уровня.

Ключевые слова и фразы: ветвящиеся процессы в случайной среде, условие Спичера, условные предельные теоремы, преобразования мер, случайное блуждание в случайной среде, локальное время.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru, elena@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00035), гранта НШ 1758.2003.1 Программы поддержки ведущих научных школ России, INTAS 03-51-5018 и NWO 047.016.013.

1. Введение. Классической моделью ветвящихся процессов является ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона $Z(n)$, $n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, который описывает эволюцию популяции частиц. В этом процессе $Z(0) = 1$, а

$$Z(n+1) = \xi_1^{(n)} + \dots + \xi_{Z(n)}^{(n)}, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

где $\xi_j^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $j = 1, \dots, Z(n)$, — независимые одинаково распределенные неотрицательные целочисленные случайные величины. Естественным обобщением процессов Гальтона–Ватсона служат ветвящиеся процессы в случайной среде. В настоящей работе мы рассматриваем наиболее известную модель ветвящихся процессов в случайной среде, а именно модель, в которой вероятностные законы размножения частиц различных поколений независимы и одинаково распределены. Впервые эта модель была введена В. Смитом и В. Вилкинсоном [20], а затем в более общей постановке рассматривалась в статьях [2] и [3] и подробно изучалась рядом других авторов (см. соответствующую библиографию в [7], дающую представление о результатах, опубликованных до 1985 г., и более современные работы [1], [5], [6], [8]–[11], [13], [14] и [18]). Неформальное описание модели ветвящегося процесса в случайной среде выглядит следующим образом. Пусть $\mathbf{F} = \{f(s)\}$ — метрическое пространство всех производящих функций, соответствующих вероятностным (возможно, несобственным) распределениям с носителями, сосредоточенными на множестве неотрицательных целых чисел, снабженное равномерной метрикой. Предположим, что на борелевских подмножествах пространства $\mathbf{F}$ задана вероятностная мера $\mathbb{P}$. Выбирая в соответствии с указанной мерой бесконечную последовательность элементов $f_0(s), f_1(s), f_2(s), \dots$ из $\mathbf{F}$ и фиксируя ее, мы получаем бесконечную последовательность $f_0(s), f_1(s), f_2(s), \dots$ производящих функций, называемую (случайной) средой, которая порождает неоднородный ветвящийся процесс $\{Z(n), n \geq 0\}$, определяемый выражениями $Z(0) = 1$,

$$\mathbf{E} \left[s^{Z(n+1)} \mid f_0, f_1, \dots, f_n; Z(0), Z(1), \dots, Z(n) \right] = (f_n(s))^{Z(n)}, \quad (2)$$

где

$$f_n(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \pi_n(k) s^k. \quad (3)$$

Таким образом, при фиксированной среде остается верным соотношение (1), в котором теперь $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \dots$, независимы и для каждого фиксированного n распределены согласно вероятностному закону (3).

Мы ограничимся лишь этим описанием интересующей нас модели ветвящихся процессов в случайной среде. Более строгое определение и построение таких процессов можно найти в [2]–[4].

Иногда нам будет удобнее идентифицировать вероятностную производящую функцию $f_n(s)$ в (3) с бесконечномерным вектором π_n :

$$\pi_n = \{\pi_n(0), \pi_n(1), \pi_n(2), \dots\}, \quad \pi_n(k) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \pi_n(k) = 1. \quad (4)$$

Всюду далее символы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ используются для обозначения математического ожидания и вероятности, порождаемых исходной мерой ветвящегося процесса на наборах $(f_0, f_1, \dots, f_n, \dots; Z_0, Z_1, \dots, Z_n, \dots)$ (за исключением нескольких случаев, которые, как мы надеемся, не приведут к недоразумениям), символы $\mathbb{E}$ и $\mathbb{P}$ используются для обозначения математического ожидания и вероятности относительно маргинальной меры на множестве сред, а символы $\mathbf{E}_\pi$, $\mathbf{P}_\pi$ — для обозначения условного математического ожидания и условной вероятности при фиксированной среде $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \dots)$.

Пусть $X_k := \ln f'_{k-1}(1)$, $\eta_k := f''_{k-1}(1)(f'_{k-1}(1))^{-2}$, $k \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$; $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$, $f \stackrel{d}{=} f_0$, $X \stackrel{d}{=} X_1$. Последовательность $\{S_n\}_{n \geq 0}$ называется *сопровождающим случайным блужданием* ветвящегося процесса в случайной среде. Несложно видеть, что

$$\mathbf{E}_\pi[Z(n)] = \mathbf{E}_\pi[Z(n) \mid f_0, f_1, \dots, f_{n-1}] = f'_0(1)f'_1(1) \cdots f'_{n-1}(1) = e^{S_n}, \quad (5)$$

и, следовательно, свойства условного математического ожидания (5) полностью определяются свойствами случайного блуждания S_n . Хорошо известно (см., например, [24, гл. XII, § 2]), что *любое* случайное блуждание можно отнести к одному из следующих классов:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ с вероятностью 1;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ с вероятностью 1;
- 3) $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ с вероятностью 1;
- 4) случайное блуждание является вырожденным: $S_n = 0$ для всех n .

Это делает естественным следующую классификацию ветвящихся процессов в случайной среде. Мы называем ветвящийся процесс в случайной среде надкритическим, докритическим, невырожденным критическим и вырожденным критическим, если сопровождающее его случайное блуждание принадлежит классам 1), 2), 3) и 4) соответственно. Для процессов, у которых $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\ln f'(1)]$ существует, наша классификация совпадает со стандартной классификацией (см., например, [4]), согласно которой ветвящийся процесс в случайной среде называется надкритическим, критическим или докритическим, если $\mathbb{E}[X] > 0$, $= 0$ или < 0 соответственно. Однако наша расширенная классификация, неявно введенная в [5], выглядит более естественной и ее появление оправдывается рядом результатов, опубликованных в [5], [6], [8]–[11], [13]. В частности, из оценки

$$\mathbf{P}_\pi\{Z(n) > 0\} = \min_{0 \leq k \leq n} \mathbf{P}_\pi\{Z(k) > 0\} \leq \min_{0 \leq k \leq n} \mathbf{E}_\pi[Z(k)] = e^{\min_{0 \leq k \leq n} S_k}$$

следует, что докритические и невырожденные критические процессы в случайной среде вырождаются с вероятностью 1 $\mathbf{P}$ -п.н. Более того, как было показано в [5], [8]–[11] и [13], асимптотические свойства невырожденных критических ветвящихся процессов в случайной среде с $\mathbb{E}[X] = 0$ сходны с процессами, у которых $\mathbb{E}[X]$ не существует.

Отметим, что не существует обычного процесса Гальтона–Ватсона с сопровождающим случайным блужданием, принадлежащим классу 3).

В дальнейшем мы рассматриваем исключительно невырожденные критические ветвящиеся процессы в случайной среде и для краткости называем их просто критическими ветвящимися процессами в случайной среде, **опуская** слово «невырожденные».

Пусть $\tau(n) := \min\{k \in [0, n]: S_j \geq S_k, j = 0, 1, \dots, n\}$ — самая левая точка интервала $[0, n]$, в которой достигается минимальное значение случайного блуждания S_j , $j = 0, 1, \dots, n$. В работах [9] и [10] (в рамках так называемого quenched approach, т.е. в ситуации, когда вероятности событий и меры, связанные с ветвящимся процессом в случайной среде, рассматриваются как случайные элементы, зависящие от реализации среды) был доказан ряд условных предельных теорем, описывающих асимптотическое поведение распределения числа частиц в критическом ветвящемся процессе в случайной среде при условии невырождения процесса к моменту $n \rightarrow \infty$. Из упомянутых теорем следует, что если $t \in (0, 1]$ фиксировано, то условное распределение случайной величины $Z(nt) e^{S_{\tau(nt)} - S_{nt}}$ при условии $Z(n) > 0$ (здесь и далее для краткости мы пишем nt вместо $[nt]$) сходится в некотором смысле к собственному предельному распределению, не имеющему атома в нуле. Это, нестрого говоря, означает, что если процесс не выродился к моменту времени n , то размер $Z(nt)$ популяции в момент времени nt пропорционален $e^{S_{nt} - S_{\tau(nt)}}$. Таким образом, в отличие от условных предельных теорем для классических критических или надкритических ветвящихся процессов, в которых функция, нормирующая размер популяции, растет линейно или экспоненциально с течением времени, (случайная) функция, нормирующая размер популяции в критических ветвящихся процессах в случайной среде, подвержена большим колебаниям. Следовательно, популяция критического ветвящегося процесса в случайной среде проходит в моменты, близкие к моментам последовательных минимумов сопровождающего случайного блуждания, через бутылочные горлышки. Цель настоящей работы — изучить этот феномен более детально (как и в [8]–[11], мы делаем это в рамках quenched approach). Мы покажем, что условное распределение числа частиц в процессе в моменты времени, близкие к $\tau(nt)$, $t \in (0, 1]$, при условии невырождения процесса к моменту времени n , сходится к дискретному распределению. Таким образом, в отличие от неслучайных моментов вида nt , в которые размер популяции является большим (и даже экспоненциально большим, см. [10]), количе-

ство индивидуумов в популяции в (случайные) моменты последовательных глобальных минимумов сопровождающего случайного блуждания оказывается разительно малым, но потом опять начинает расти с экспоненциальной скоростью. Это дает объяснение (разумеется, в рамках рассматриваемой нами модели) следующему хорошо известному факту в биологии популяций: многие популяции в течении их эволюции проходят через «благоприятные периоды» (быстрый рост размера популяции) и «неблагоприятные периоды» (стремительное вырождение, когда выживают лишь несколько представителей популяции, которые впоследствии порождают новую быстро растущую популяцию). Более подробное обсуждение феномена бутылочных горлышек, а также ряда других вопросов, связанных с применением ветвящихся процессов в биологии популяций, читатель может найти в [15] и [16].

2. Формулировка основных результатов. Введем сначала основные условия, которые впоследствии всегда будут считаться выполненными. Мы будем часто обращаться к различным функциям восстановления. Поэтому в дальнейшем предполагается, что распределение случайной величины X либо нерешетчато, либо центрально решетчато (т.е. X принимает лишь значения hk , $h > 0$, $k \in \mathbf{Z}$, и $\mathbf{P}\{X = 0\} > 0$) и что сопровождающее случайное блуждание удовлетворяет следующему условию Спизера.

Условие A1. Существует число $0 < \rho < 1$ такое, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{S_k > 0\} \rightarrow \rho.$$

Известно (см. [22, гл. IV, § 20]), что при выполнении условия A1

$$n^{-1}\tau(n) \xrightarrow{w} \tau, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где τ — случайная величина, распределенная по обобщенному закону арксинуса с параметром ρ , а символ $\xrightarrow{w}$ обозначает слабую сходимость.

Наше следующее условие относится к урезанным моментам распределений π_n вида

$$\Theta(a) := \frac{\sum_{k=a}^{\infty} k^2 \pi(k)}{(\sum_{k=0}^{\infty} k \pi(k))^2}, \quad a \in \mathbf{N}_0.$$

Для формулировки ограничений, связанных с величиной $\Theta(a)$, нам понадобятся некоторые функции, характеризующие случайное блуждание S_n . Пусть $\gamma_0 := 0$, $\gamma_{j+1} := \min(n > \gamma_j : S_n < S_{\gamma_j})$ и $\Gamma_0 := 0$, $\Gamma_{j+1} := \min(n > \Gamma_j : S_n > S_{\Gamma_j})$, $j \geq 0$, — строгие убывающие и, соответственно, строгие возрастающие лестничные моменты случайного

блуждания $\{S_n\}_{n \geq 0}$. Введем функции

$$V(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{\gamma_j} \geq -x\}, \quad x > 0, \quad V(0) = 1, \quad V(x) = 0, \quad x < 0,$$

$$U(x) := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{\Gamma_j} < x\}, \quad x > 0, \quad U(0) = 1, \quad U(x) = 0, \quad x < 0.$$

Условие A2. Существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $a \in \mathbf{N}_0$ такие, что

$$\mathbf{E}[(\ln^+ \Theta(a))^{1/\rho + \varepsilon_0}] < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[V(X)(\ln^+ \Theta(a))^{1 + \varepsilon_0}] < \infty, \quad (7)$$

$$\mathbf{E}[(\ln^+ \Theta(a))^{1/(1-\rho) + \varepsilon_0}] < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[U(-X)(\ln^+ \Theta(a))^{1 + \varepsilon_0}] < \infty. \quad (8)$$

Пусть Ω_n — пространство элементарных событий, соответствующее наборам $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}$; $Z(0), Z(1), \dots, Z(n)$ с $\Omega = \Omega_{\infty}$, а

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, Z(0), Z(1), \dots, Z(n-1)), \quad \mathcal{F} := \bigvee_n \mathcal{F}_n, \quad (9)$$

последовательность естественных σ -алгебр, порожденных ветвящимся процессом в случайной среде. И, наконец, пусть $\mathbf{P}$ — мера на $(\Omega, \mathcal{F})$, которая определяется соотношением (2) и соответствующей мерой на последовательности $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ является нашим основным вероятностным пространством. Более детальное описание этой конструкции можно найти в [10]. Нам также потребуются две копии указанного пространства, обозначаемые $(\Omega^-, \mathcal{F}^-, \mathbf{P}^-)$ и $(\Omega^+, \mathcal{F}^+, \mathbf{P}^+)$.

Рассмотрим две последовательности случайных элементов $\{f_n^-\}_{n \geq 0}$ и $\{f_n^+\}_{n \geq 0}$, заданных на пространствах $(\Omega^-, \mathcal{F}^-, \mathbf{P}^-)$ и $(\Omega^+, \mathcal{F}^+, \mathbf{P}^+)$ соответственно, и обозначим $\{S_n^-\}_{n \geq 0}$ и $\{S_n^+\}_{n \geq 0}$ соответствующие им сопровождающие случайные блуждания. В дальнейшем все меры, характеристики или случайные величины, связанные с пространствами $(\Omega^\mp, \mathcal{F}^\mp, \mathbf{P}^\mp)$, будут снабжаться индексами — или + соответственно. Например, мы будем использовать случайные величины $\Gamma^- := \min\{n \geq 1: S_n^- \geq 0\}$ и $\gamma^+ := \min\{n \geq 1: S_n^+ < 0\}$, а также событие $\mathcal{A}_{k,p} := \{\Gamma^- > k, \gamma^+ > p\}$.

На измеримом пространстве $(\Omega^- \times \Omega^+, \mathcal{F}^- \times \mathcal{F}^+)$ определим вероятностную меру $\hat{\mathbf{P}}_{k,p}$, полагая для $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_k^- \times \mathcal{F}_p^+$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k,p}(\mathcal{A}) = e^D \int_{\mathcal{A}} U(-S_k^-) V(S_p^+) I\{\mathcal{A}_{k,p}\} d(\mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+), \quad (10)$$

где $D = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} \mathbf{P}\{S_j = 0\}$. Поскольку при наших условиях

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[U(-X) I\{-X > 0\}] &= e^{-D}, \\ \mathbf{E}[U(x - X) I\{x - X > 0\}] &= U(x), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (11)$$

и

$$\mathbf{E}[V(x+X)] = V(x), \quad x \geq 0, \quad V(0) = 1 \quad (12)$$

(см. [10, лемма 1]), то, как нетрудно проверить, вероятностные меры $\hat{\mathbf{P}}_{k,p}$, $k, p \in \mathbf{N}$, согласованы и, следовательно, существует мера $\hat{\mathbf{P}}$ на $\mathcal{F}^- \times \mathcal{F}^+$ такая, что

$$\hat{\mathbf{P}}|_{\mathcal{F}_k^- \times \mathcal{F}_p^+} = \hat{\mathbf{P}}_{k,p}.$$

Мера $\hat{\mathbf{P}}$ индуцирует естественным образом меры $\hat{\mathbf{P}}^-$, $\{\hat{\mathbf{P}}_k^-, k \in \mathbf{N}_0\}$ и $\hat{\mathbf{P}}^+$, $\{\hat{\mathbf{P}}_p^+, p \in \mathbf{N}_0\}$ на измеримых пространствах $(\Omega^-, \mathcal{F}^-)$ и $(\Omega^+, \mathcal{F}^+)$ такие, что $\hat{\mathbf{P}}^-(\mathcal{A}^-) = \hat{\mathbf{P}}(\mathcal{A})$ для $\mathcal{A} = \mathcal{A}^- \times \Omega^+$ и $\hat{\mathbf{P}}^+(\mathcal{A}^+) = \hat{\mathbf{P}}(\mathcal{A})$ для $\mathcal{A} = \Omega^- \times \mathcal{A}^+$, а для $\mathcal{A}^- \in \mathcal{F}_k^-$ и $\mathcal{A}^+ \in \mathcal{F}_p^+$

$$\hat{\mathbf{P}}_k^-(\mathcal{A}^-) := \hat{\mathbf{P}}^-(\mathcal{A}^-) = e^D \int_{\mathcal{A}^-} U(-S_k^-) I\{\Gamma^- > k\} d\mathbf{P}^-, \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_p^+(\mathcal{A}^+) := \hat{\mathbf{P}}^+(\mathcal{A}^+) = \int_{\mathcal{A}^+} V(S_p^+) I\{\gamma^+ > p\} d\mathbf{P}^+. \quad (14)$$

Вероятностные меры $\hat{\mathbf{P}}_k^-$, $k \in \mathbf{N}$, и $\hat{\mathbf{P}}_p^+$, $p \in \mathbf{N}$, также являются согласованными.

Ниже мы будем использовать символы $\hat{\mathbf{E}}^\pm$ и $\hat{\mathbf{E}}$ для обозначения математического ожидания относительно мер $\hat{\mathbf{P}}^\pm$ и $\hat{\mathbf{P}}$ соответственно.

Обозначим через Π пространство всех (возможно, несобственных) вероятностных мер на $\mathbf{N}_0$, оснащение которого расстоянием по вариации превращает его в банахово пространство. Ясно, что Π можно идентифицировать с метрическим пространством производящих функций $\mathbf{F}$ (снабженном равномерной метрикой), соответствующих множеству вероятностных (возможно, несобственных) мер, носители которых сконцентрированы на $\mathbf{N}_0$.

Для $m \in \mathbf{Z}$ и $t \in [0, 1]$ положим

$$\mathcal{M}_{m,t}^{(n)}(k) = \mathcal{M}_{m,t}^{(n)}(k, \pi) = \mathbf{P}_\pi(Z(\tau(nt) + m) = k \mid Z(n) > 0). \quad (15)$$

Будем считать, что $Z(\tau(nt) + m) = 1$, если $\tau(nt) + m \leq 0$, и, для краткости, писать $\mathcal{M}_m^{(n)}(k) = \mathcal{M}_{m,1}^{(n)}(k)$. Для меры $\mathcal{M} \in \Pi$ и функции $J: \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ положим

$$\mathcal{M}[J] := \sum_{k=0}^{\infty} J(k) \mathcal{M}(k).$$

Теперь мы можем сформулировать условную предельную теорему о распределении числа частиц в популяции в моменты времени, близкие к точке глобального минимума сопровождающего случайного блуждания.

Теорема 1. Если выполнены условия A1 и A2, то для любого $m \in \mathbf{Z}$ существует собственная вероятностная мера $\mathcal{M}_m \in \Pi$ (точное

выражение для производящей функции, соответствующей $\mathcal{M}_m$, будет дано далее в теореме 5) такая, что

$$\mathcal{M}_m^{(n)} \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{M}_m, \quad n \rightarrow \infty, \quad (16)$$

где символ $\xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})}$ обозначает следующий вид сходимости случайных мер $\mathcal{M}_m^{(n)}$ из (15) к $\mathcal{M}_m$: для любой неслучайной ограниченной функции $J: \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ и любой неслучайной ограниченной непрерывной функции $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\mathbf{E}[g(\mathcal{M}_m^{(n)}[J])] \rightarrow \hat{\mathbf{E}}[g(\mathcal{M}_m[J])], \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

З а м е ч а н и е 1. Так как существует взаимно однозначное соответствие между вероятностными мерами (возможно несобственными) $\mathcal{M} = (\mathcal{M}(k))_{k \geq 0}$ на $\mathbf{N}_0$ и их производящими функциями

$$h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} h_k \leq 1, \quad h_k = \mathcal{M}(k),$$

то, используя обозначение

$$\varphi_m^{(n)}(s) := \mathbf{E}_{\pi}[s^{Z(\tau(n)+m)} \mid Z(n) > 0] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_m^{(n)}(k) s^k,$$

мы можем записать (16) в более удобной для последующих рассуждений форме:

$$\varphi_m^{(n)}(s) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \varphi_m(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_m(k) s^k, \quad (18)$$

которое означает, что имеет место (17).

Следующая теорема описывает асимптотическое поведение распределения числа частиц в популяции в моменты времени, близкие к точке локального, но не глобального минимума сопровождающего случайного блуждания, и является условной предельной теоремой о сходимости случайных мер. Пусть

$$\varphi_{m,t}^{(n)}(s) := \mathbf{E}_{\pi}[s^{Z(\tau(nt)+m)} \mid Z(n) > 0] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m,t}^{(n)}(k) s^k. \quad (19)$$

Теорема 2. Если выполнены условия A1 и A2, то для любого $t \in \mathbf{Z}$ существует собственная вероятностная мера $\mathcal{M}_m^* \in \Pi$ (точное выражение для производящей функции, соответствующей $\mathcal{M}_m^*$, будет дано далее в теореме 6) такая, что для любого $t \in (0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$

$$\{\mathcal{M}_{m,t}^{(n)} \mid \tau(n) > nt\} \xrightarrow{w_t(\mathbf{P}_c, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{M}_m^*, \quad (20)$$

что может быть записано в терминах производящих функций как

$$\{\varphi_{m,t}^{(n)}(s) \mid \tau(n) > nt\} \xrightarrow{w_t(\mathbf{P}_c, \hat{\mathbf{P}})} \varphi_m^*(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_m^*(k) s^k, \quad (21)$$

где символ $\xrightarrow{w_t(\mathbf{P}_c, \hat{\mathbf{P}})}$ обозначает следующий вид (условной) сходимости вероятностных мер $\mathcal{M}_{m,t}^{(n)}$ к $\mathcal{M}_m^*$ при $n \rightarrow \infty$: для любой неслучайной ограниченной функции $J_0: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ и любой ограниченной неслучайной непрерывной функции $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\mathbf{E} [g(\mathcal{M}_{m,t}^{(n)}[J]) \mid \tau(n) > nt] \longrightarrow \hat{\mathbf{E}}[g(\mathcal{M}_m^*[J])]. \quad (22)$$

Заметим, что предельная мера $\mathcal{M}_m^*$ не зависит от конкретного t .

Прежде чем переходить к доказательствам основных результатов, нам хотелось бы напомнить о существовании любопытного соответствия между ветвящимися процессами в случайной среде и простыми случайными блужданиями в случайной среде. Конструкция, приводимая ниже, является естественным обобщением конструкции, предложенной Т. Харрисом в [17] для обычного неоднородного процесса Гальтона–Ватсона.

Пусть T_r , $r = 0, 1, 2, \dots$, — простое случайное блуждание в случайной среде по целочисленной решетке прямой с дискретным временем (см., например, [19] или [21]), определяемое последовательностью независимых одинаково распределенных случайных векторов (p_n, q_n) , $n \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, где $p_n + q_n = 1$, $p_n q_n > 0$ с вероятностью 1. Это означает, что если блуждающая частица в момент времени r находится в точке T_r , то в момент $r+1$ она переместится либо в точку T_r+1 с вероятностью p_{T_r} , либо в точку T_r-1 с вероятностью q_{T_r} . Предположим теперь, что $T_0 = 0$, и пусть $\theta = \min\{r \geq 1: T_r = -1\}$. Обозначим через T_r^* случайное блуждание, остановленное в момент θ : $T_r^* = T_r \wedge \theta$, $r \geq 0$. Будем предполагать, что $\mathbf{P}\{\theta < \infty\} = 1$, т.е. что наше случайное блуждание в случайной среде либо является возвратным, либо уходит в $-\infty$ с вероятностью 1 (что имеет место, например, если $\mathbf{E}[\ln(p_n/q_n)] \leq 0$, см. [21]). Пусть $\Pi_{\text{r.env.}} = \{p_n, q_n, n \in \mathbf{Z}\}$ — фиксированная реализация среды рассматриваемого случайного блуждания в случайной среде, и

$$Y(n) = \#\{r \in \mathbf{N}_0: T_r^* = n, T_{r+1}^* = n-1\}, \quad n \in \mathbf{N}_0, \quad (23)$$

— число переходов остановленного случайного блуждания с уровня n на уровень $n-1$. Нетрудно понять, что если $\mathbf{P}\{\theta < \infty\} = 1$, то для почти всех реализаций среды число попаданий $\ell(n)$ случайного блуждания $\{T_r^*\}_{r \geq 0}$ в состояние $n \in \mathbf{N}_0$, т.е. локальное время остановленного случайного блуждания T_r^* в точке n , вычисляется по формуле

$$\ell(n) := \#\{r \in \mathbf{N}_0: T_r^* = n\} = Y(n+1) + Y(n). \quad (24)$$

Согласно определению остановленного случайного блуждания, $Y(0) = 1$. Кроме того, из предположений, сделанных выше, следует, что случайная

величина $Y(1) = \#\{r \in \mathbf{N}_0: T_r^* = 1, T_{r+1}^* = 0\}$ имеет геометрическое распределение

$$\mathbf{P}(Y(1) = j \mid \Pi_{r.\text{env.}}) = \mathbf{P}(\eta^{(0)} = j \mid \Pi_{r.\text{env.}}) = q_0 p_0^j$$

почти наверное и, более того,

$$Y(n+1) = \eta_1^{(n)} + \dots + \eta_{Y(n)}^{(n)}, \quad n \in \mathbf{N}_0, \quad (25)$$

где $\eta_i^{(n)} \stackrel{d}{=} \eta^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots$, — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что

$$\mathbf{E}[s^{\eta^{(n)}} \mid \Pi_{r.\text{env.}}] = q_n(1 - p_n s)^{-1}. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь ветвящийся процесс в случайной среде, носитель меры $\mathbb{P}$ на пространстве сред которого сконцентрирован только на законах размножения, имеющих производящие функции вида

$$f_n(s) = q_n(1 - p_n s)^{-1} = \mathbf{E}_\pi[s^{\xi^{(n)}}], \quad n \in \mathbf{N}_0, \quad (27)$$

где пары (p_n, q_n) распределены так же, как и в описанном выше случайном блуждании в случайной среде. Ясно, что $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\ln f'_n(1)] = \mathbf{E}[\ln(p_n/q_n)]$ (если указанное математическое ожидание существует). Сравнивая (25) и (26) с (1) и (27), легко понять, что эти соотношения определяют один и тот же случайный процесс. Более того, применяя так называемую процедуру поиска в глубину (см., например, [23]), можно определить на общем вероятностном пространстве случайное блуждание $\{T_r^*\}_{r \geq 0}$ и ветвящийся процесс $Z(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, в случайной среде таким образом, чтобы $\{Z(n)\}_{n \geq 0} = \{Y(n)\}_{n \geq 0}$ с вероятностью 1. Следовательно, для этого частного случая законов размножения частиц результаты настоящей работы, доказанные для ветвящихся процессов в случайной среде, можно переформулировать в соответствующие результаты для остановленного случайного блуждания $\{T_r^*\}_{r \geq 0}$ в случайной среде, и обратно. В частности, для почти всех реализаций среды при $k \in \mathbf{N}$

$$\{\ell(k) = j\} = \{Z(k+1) + Z(k) = j\}, \quad \{Z(k) > 0\} = \left\{ \max_{r \geq 0} T_r^* > k \right\}. \quad (28)$$

Эти соотношения позволяют делать выводы о распределениях различных характеристик локального времени первой экскурсии случайного блуждания в случайной среде. В настоящей работе мы, используя описанное соответствие, изучим распределение величины $\ell(\cdot)$ для уровней, соответствующих лестничным моментам случайного блуждания

$$S_0 = 0, \quad S_n = \ln \frac{p_0}{q_0} + \ln \frac{p_1}{q_1} + \dots + \ln \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

при условии $\{\max_{r \geq 0} T_r^* > n\}$. Заметим, что с помощью указанного соответствия, теоремы 1 в [9] и доказательства теоремы 1 в [10] нетрудно убедиться в том, что если $\{S_n\}_{n \geq 0}$ удовлетворяет условию A1, то

$$\mathbf{P}\left\{ \max_{r \geq 0} T_r^* > n \mid \Pi_{r.\text{env.}} \right\} e^{-S_{\tau(n)}} \xrightarrow{w} \zeta, \quad n \rightarrow \infty, \quad (29)$$

где случайная величина $\zeta \in [0, 1]$ является положительной с вероятностью 1. Этот же результат может быть выведен с помощью наших методов и непосредственно из леммы 2 в [12].

Пусть

$$\mathcal{L}_{m,t}^{(n)}(k) = \mathbf{P}_\pi \left(\ell(\tau(nt) + m) = k \mid \max_{r \geq 0} T_r^* > n \right), \quad \mathcal{L}_m^{(n)} = \mathcal{L}_{m,1}^{(n)}. \quad (30)$$

Теорема 3. Если выполнено условие A1, то для любого $m \in \mathbf{Z}$ существует собственная вероятностная мера $\mathcal{L}_m \in \Pi$ (точное выражение для производящей функции, соответствующей мере $\mathcal{L}_m$, дано далее в теореме 9) такая, что

$$\mathcal{L}_m^{(n)} \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{L}_m, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 4. Если выполнено условие A1, то для любого $m \in \mathbf{Z}$ существует собственная вероятностная мера $\mathcal{L}_m^* \in \Pi$ (точное выражение для производящей функции, соответствующей мере $\mathcal{L}_m^*$, приведено в теореме 10) такая, что для любого $t \in (0, 1)$

$$\{\mathcal{L}_{m,t}^{(n)} \mid \tau(n) > nt\} \xrightarrow{w_t(\mathbf{P}_t, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{L}_m^*, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отметим, что формулировки теорем 3 и 4 не содержат упоминания об условии A2, так как для случая среды с производящими функциями вида (27) это условие автоматически выполнено. В самом деле, для простого случайного блуждания в случайной среде (т.е. для ветвящегося процесса в случайной среде со случайными геометрическими законами размножения) и $a = 2$ имеем

$$\Theta(2) := \frac{\sum_{k=2}^{\infty} k^2 \pi(k)}{(\sum_{k=0}^{\infty} k \pi(k))^2} \leq 3 \frac{f''(1)}{(f'(1))^2} = 6,$$

что ввиду соотношений (11) и (12) влечет (7) и (8). Таким образом, выполнение условия Спизера достаточно для справедливости наших утверждений, касающихся простого случайного блуждания в случайной среде. Отметим, что теоремы 3 и 4 верны для так называемого случая Сина $\mathbf{E}[\ln(p_n/q_n)] = 0$ (см. классическую работу [19], связанную с этой тематикой) и его естественного обобщения на случай, когда математическое ожидание случайной величины $\ln(p_n/q_n)$ не существует (например, эти теоремы верны для *любого* случайного блуждания в случайной среде, для которого распределение величины $\ln(p_n/q_n)$ симметрично). Насколько известно авторам, остановленные случайные блуждания в случайной среде, для которой $\ln(p_n/q_n)$ не имеет среднего, еще не исследовались. Более того, теоремы 3 и 4, описывающие свойства локального времени остановленного случайного блуждания в случайной среде, являются новыми даже для случая Сина.

3. Условное распределение вблизи точки глобального минимума. Мы начнем этот раздел с напомнима некоторых известных результатов. Положим

$$\begin{aligned} f_{k,n}(s) &:= f_k(f_{k+1}(\dots(f_{n-1}(s))\dots)), & 0 \leq k \leq n-1, & \quad f_{n,n}(s) := s, \\ f_{n,m}(s) &:= f_{n-1}(f_{n-2}(\dots(f_m(s))\dots)), & n \geq m+1, \\ \chi_k(s) &:= \frac{1}{1-f_k(s)} - \frac{1}{f'_k(1)(1-s)}, & 0 \leq s \leq 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Лемма 1 (см. [14]). Пусть $f_k \neq 1$, $0 \leq k \leq n-1$. Тогда при любых $0 \leq s < 1$ и $0 \leq m \leq n-1$

$$\frac{1}{1-f_{m,n}(s)} = \frac{e^{-S_n+S_m}}{1-s} + \sum_{k=m}^{n-1} \eta_{k,n}(s) e^{-S_k+S_m}, \quad (32)$$

$$\frac{e^{S_n-S_m}}{1-f_{n,m}(s)} = \frac{1}{1-s} + \sum_{j=m+1}^n \eta_{j,m}(s) e^{S_j-S_m}, \quad (33)$$

где для $0 \leq k \leq n$

$$\eta_{k,n}(s) := \chi_k(f_{k+1,n}(s)) \leq \eta_{k+1} = \frac{f''_k(1)}{(f'_k(1))^2} \quad (34)$$

и $\eta_{j,m}(s) := \chi_{j-1}(f_{j-1,m}(s)) \leq \eta_j$ для $j > m$. Если же производящие функции являются геометрическими:

$$f_i(s) = q_i(1-p_i s)^{-1}, \quad p_i + q_i = 1, \quad p_i q_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

то $\eta_{k,n}(s) = 1$ для всех k и n .

Лемма 2 (см. [10]). Если выполнены условия A1 и A2, то

$$\sum_{j=0}^{\infty} \eta_{j+1} e^{-S_j} < \infty \quad \hat{\mathbf{P}}^+ \text{-п.н.}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j e^{S_j} < \infty \quad \hat{\mathbf{P}}^- \text{-п.н.}$$

Приведем еще несколько утверждений, которые были установлены в [10] при выполнении условий A1 и A2:

1) для любого $m \in \mathbf{N}_0$ существует предел

$$q_m^+ := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{m,n}^+(0) < 1 \quad \hat{\mathbf{P}}^+ \text{-п.н.}; \quad (35)$$

2) пусть

$$\zeta_{l,m}^-(s) := \frac{1 - f_{l,m}^-(s)}{e^{S_l - S_m}}, \quad m \in \mathbf{N}_0, \quad l \geq m, \quad (36)$$

тогда существует и является положительным $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. предел

$$\zeta_{\infty,m}^-(s) := \lim_{l \rightarrow \infty} \zeta_{l,m}^-(s) = \left(\frac{1}{1-s} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \eta_{j,m}^-(s) e^{S_j^- - S_m^-} \right)^{-1}. \quad (37)$$

Положим, для краткости, $q^+ = q_0^+$, $\zeta_l^-(s) = \zeta_{l,0}^-(s)$ и $\zeta^-(s) = \zeta_{\infty,0}^-(s)$. Из (35)–(37) следует, что предел

$$\zeta := \lim_{\min(l, n-l) \rightarrow \infty} \zeta_l^-(f_{0,n-l}^+(0)) = \zeta^-(q^+) \leq 1 \quad (38)$$

существует и является положительным $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

Лемма 3 (см. [10]). Пусть выполнено условие A1, и пусть $\{G_{r,n}, r, n \in \mathbb{N}\}$ — набор равномерно ограниченных случайных величин таких, что $G_{r,n}$ является измеримой относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_r^- \times \mathcal{F}_n^+$ для любой пары r, n . Если предел $\lim_{\min(r,n) \rightarrow \infty} G_{r,n} =: G$ существует $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н., то

$$\lim_{\min(r,n) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[G_{r,n} \mid \mathcal{A}_{r,n}] = \hat{\mathbf{E}}[G]. \quad (39)$$

Теперь мы можем перейти к доказательству следующего важного утверждения.

Лемма 4. Пусть

$$R^{l,n}(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}^{l,n}(k) s^k, \quad \mathcal{M}^{l,n}(k) \geq 0, \quad R^{l,n}(1) = 1,$$

— последовательность случайных вероятностных производящих функций, измеримых для любой пары $l, n \in \mathbb{N}_0$ относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_l^- \times \mathcal{F}_n^+$ и таких, что предел

$$\lim_{\min(l,n) \rightarrow \infty} R^{l,n}(s) = R(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}(k) s^k, \quad s \in [0, 1], \quad (40)$$

существует $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. Тогда при $\min(l, n) \rightarrow \infty$

$$\{\mathcal{M}^{l,n} \mid \mathcal{A}_{l,n}\} \xrightarrow{w(\mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{M},$$

где символ $\xrightarrow{w(\mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+, \hat{\mathbf{P}})}$ обозначает следующий вид сходимости случайных мер $\mathcal{M}^{l,n}$ к $\mathcal{M}$: для любой неслучайной ограниченной функции $J: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ и любой ограниченной неслучайной непрерывной функции $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ при $\min(l, n) \rightarrow \infty$

$$(\mathbf{E}^- \times \mathbf{E}^+)[g(\mathcal{M}^{l,n}[J]) \mid \mathcal{A}_{l,n}] \longrightarrow \hat{\mathbf{E}}[g(\mathcal{M}[J])].$$

Доказательство. Отметим сначала, что соотношение (40) влечет сходимость $\mathcal{M}^{l,n} \xrightarrow{w} \mathcal{M}$ $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. при $\min(l, n) \rightarrow \infty$, где в данном случае символ $\xrightarrow{w}$ означает стандартную слабую сходимость вероятностных мер. Отсюда следует, что для любой неслучайной ограниченной функции $J: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ и любой непрерывной ограниченной неслучайной функции $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(\mathcal{M}^{l,n}[J]) \rightarrow g(\mathcal{M}[J]) \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

при $\min(l, n) \rightarrow \infty$. Для завершения доказательства осталось лишь применить лемму 3.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{M}^{(n)} = \mathcal{M}^{(n)}(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{k-1}) \in \Pi$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность случайных мер таких, что для любой

нелучайной ограниченной функции $J: \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{R}$, любого $l = 0, 1, \dots, n$ и любого борелевского множества $B \subset \mathbf{R}$

$$\mathbf{P}(\mathcal{M}^{(n)}[J] \in B \mid \tau(n) = l) = (\mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+)(\mathcal{M}^{l, n-l}[J] \in B \mid \mathcal{A}_{l, n-l}),$$

где $\mathcal{M}^{l, n-l}$ — последовательность мер на $\mathbf{N}$ таких, что соответствующие им производящие функции удовлетворяют условию (40). Тогда

$$\mathcal{M}^{(n)} \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{M}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Для любой нелучайной ограниченной функции $J: \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ и любой непрерывной нелучайной ограниченной функции $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}g[(\mathcal{M}^{(n)}[J])] &= \sum_{k=0}^n \mathbf{E}[g(\mathcal{M}^{(n)}[J]) \mid \tau(n) = l] \mathbf{P}\{\tau(n) = l\} \\ &= \sum_{k=0}^n (\mathbf{E}^- \times \mathbf{E}^+)[g(\mathcal{M}^{l, n}[J]) \mid \mathcal{A}_{l, n}] \mathbf{P}\{\tau(n) = l\}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что, согласно обобщенному закону арксинуса, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\mathbf{P}\{\tau(n) \in (n\delta, n(1-\delta))\} > 1-\varepsilon$, и применить лемму 4.

Теперь мы можем доказать следующую теорему, которая, ввиду замечания 1, является переформулировкой теоремы 1 в более удобных терминах.

Теорема 5. Если выполнены условия A1 и A2, то для любого $t \in \mathbf{Z}$ справедливо соотношение (1), где для $t \in \mathbf{N}_0$

$$\varphi_m(s) = \frac{\zeta^-(f_{0,m}^+(sq_m^+)) - \zeta^-(f_{0,m}^+(s))}{\zeta}, \quad s \in [0, 1), \quad (41)$$

$$\varphi_{-m}(s) = \frac{\zeta_{\infty, m}^-(sf_{m,0}^-(q^+)) - \zeta_{\infty, m}^-(s)}{\zeta}, \quad s \in [0, 1). \quad (42)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_m^{(n)}(s) &:= \mathbf{E}_\pi[s^{Z(\tau(n)+m)} \mid Z(n) > 0] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_m^{(n)}(k) s^k \\ &= \frac{f_{0, \tau(n)}(f_{\tau(n), \tau(n)+m}(s)) - f_{0, \tau(n)}(f_{\tau(n), \tau(n)+m}(sf_{\tau(n)+m, n}(0)))}{1 - f_{0, n}(0)}. \end{aligned} \quad (43)$$

Положим

$$\begin{aligned} R_m^{l, n-l}(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_m^{l, n-l}(k) s^k := \frac{f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(s)) - f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(sf_{m, n-l}^+(0)))}{1 - f_{l,0}^-(f_{0, n-l}^+(0))} \\ &= \frac{(1 - f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(sf_{m, n-l}^+(0)))) - (1 - f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(s)))}{e^{S_l^-}} \\ &\times \frac{e^{S_l^-}}{1 - f_{l,0}^-(f_{0, n-l}^+(0))} = \frac{\zeta_{l,0}^-(f_{0,m}^+(sf_{m, n-l}^+(0))) - \zeta_{l,0}^-(f_{0,m}^+(s))}{\zeta_{l,0}^-(f_{0, n-l}^+(0))}, \end{aligned} \quad (44)$$

где $f_0^\pm, f_1^\pm, \dots, f_r^\pm, \dots$ — независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных производящих функций, заданных на $(\Omega^- \times \Omega^+, \mathcal{F}^- \times \mathcal{F}^+)$. Используя определения (43), (44) и тот факт, что $(f_0, f_1, \dots, f_l, f_{l+1}, \dots, f_n) \stackrel{d}{=} (f_l, f_{l-1}, \dots, f_0, f_{l+1}, \dots, f_n)$ для любого $l \in [1, n-1]$, нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства (по распределению) для бесконечномерных векторов $\{\mathcal{M}_m^{(n)}(k)\}_{k \geq 1}$ и $\{\mathcal{M}_m^{l, n-l}(\cdot)\}_{k \geq 1}$:

$$(\mathcal{M}_m^{(n)}(\cdot) \mid \tau(n) = l) \stackrel{d}{=} (\mathcal{M}_m^{l, n-l}(\cdot) \mid \mathcal{A}_{l, n-l}).$$

Поэтому для любой неслучайной ограниченной функции $J: \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ и любого борелевского подмножества $B \subset \mathbf{R}$

$$\mathbf{P}(\mathcal{M}_m^{(n)}[J] \in B \mid \tau(n) = l) = (\mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+)(\mathcal{M}_m^{l, n-l}[J] \in B \mid \mathcal{A}_{l, n-l}). \quad (45)$$

Из (35)–(38) следует, что $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$\lim_{\min(l, n-l) \rightarrow \infty} R_m^{l, n-l}(s) = \frac{\zeta^-(f_{0, m}^+(sq_m^+)) - \zeta^-(f_{0, m}^+(s))}{\zeta} = \varphi_m(s), \quad s \in [0, 1],$$

и, таким образом, для последовательности мер $\mathcal{M}_m^{l, n-l}$ выполнены условия леммы 4. Отсюда, из (45) и следствия 1 вытекает (41).

Для доказательства (42) необходимо рассмотреть функции

$$\varphi_{-m}^{(n)}(s) := \frac{f_{0, \tau(n)-m}(s) - f_{0, \tau(n)-m}(sf_{\tau(n)-m, \tau(n)}(f_{\tau(n), n}(0)))}{1 - f_{0, n}(0)},$$

положить для $n \geq l \geq m$

$$\begin{aligned} R_m^{l, n-l}(s) &:= \frac{f_{l, m}^-(s) - f_{l, m}^-(sf_{m, 0}^-(f_{0, n-l}^+(0)))}{1 - f_{l, 0}^-(f_{0, n-l}^+(0))} \\ &= \frac{\zeta_{l, m}^-(sf_{m, 0}^-(f_{0, n-l}^+(0))) - \zeta_{l, m}^-(s)}{\zeta_{l, 0}^-(f_{0, n-l}^+(0))} \end{aligned}$$

и воспользоваться приведенными выше аргументами.

Доказательство теоремы 5, а следовательно, и теоремы 1 завершено.

4. Предельная теорема для числа частиц в моменты локальных (но не глобальных) минимумов. В этом разделе мы изучаем условное распределение процесса $Z(\cdot)$ (при условии $Z(n) > 0$) в окрестности точек $\tau(nt)$, $t \in (0, 1)$, предполагая, что $\tau(n) > nt$. Из определений (15) и (19) вытекает, что

$$\varphi_{m, t}^{(n)}(s) = \frac{f_{0, \tau(nt)+m}(s) - f_{0, \tau(nt)+m}(sf_{\tau(nt)+m, n}(0))}{1 - f_{0, n}(0)} =: \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m, t}^{(n)}(k) s^k. \quad (46)$$

Основным результатом данного раздела является следующее утверждение, которое ввиду (21), (22) и (37) служит переформулировкой теоремы 2 в более удобных терминах.

Теорема 6. Если выполнены условия A1 и A2, то для любого $m \in \mathbf{Z}$ имеет место сходимость (21), где для любого $m \in \mathbf{N}_0$

$$\varphi_m^*(s) = -s(\zeta^-)'(f_{0,m}^+(s))f_{0,m}^{+'}(s)e^{-S_m^+}, \quad s \in [0, 1], \quad (47)$$

$$\varphi_{-m}^*(s) = -s(\zeta_{\infty,m}^-)'(s), \quad s \in [0, 1]. \quad (48)$$

Для доказательства этой теоремы необходимо сначала установить нескольких вспомогательных результатов. Положим

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon(t, n) = \{1 - f_{\tau(nt)+m, n}(0) < \varepsilon\},$$

$$\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_N(t, n) = \{\tau(nt) + m \leq nt, \tau(n) > nt + N\},$$

и пусть $\mathcal{B}_\varepsilon^c, \mathcal{D}_N^c$ — события, дополнительные к событиям $\mathcal{B}_\varepsilon$ и $\mathcal{D}_N$.

Лемма 5. Если выполнены условия A1 и A2, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{B}_\varepsilon^c; \tau(n) > nt) = 0.$$

Доказательство. Согласно обобщенному закону арксинуса $\mathbf{P}\{\mathcal{D}_N^c; \tau(n) > nt\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} (1 - f_{\tau(nt)+m, n}(0)) I\{\mathcal{D}_N\} &\leq (1 - f_{\tau(nt)+m, \tau(n)}(0)) I\{\mathcal{D}_N\} \\ &\leq e^{S_{\tau(n)} - S_{\tau(nt)+m}} I\{\mathcal{D}_N\} \leq e^{S_{\tau(n)} - \min_{0 \leq k \leq \tau(n)-N} S_k}. \end{aligned} \quad (49)$$

По лемме 3 при $\min(l, n-l) \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[e^{S_{\tau(n)} - \min_{0 \leq k \leq \tau(n)-N} S_k} \mid \tau(n) = l] &= \mathbf{E}[e^{\max_{N \leq k \leq l} S_k^-} \mid \mathcal{A}_{l, n-l}] \\ &\rightarrow \hat{\mathbf{E}}[e^{\max_{N \leq k} S_k^-}] = \hat{\mathbf{E}}^-[e^{\max_{N \leq k} S_k^-}]. \end{aligned}$$

Далее, в соответствии с леммой 2 $\max_{N \leq k} S_k^- \rightarrow -\infty$ при $N \rightarrow \infty$ $\hat{\mathbf{P}}^-$ -п.н. Следовательно,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^{S_{\tau(n)} - \min_{0 \leq k \leq \tau(n)-N} S_k}] = 0,$$

что вместе с (49) и оценкой

$$\mathbf{P}(\mathcal{B}_\varepsilon^c; \tau(n) > nt) \leq \mathbf{P}(\mathcal{D}_N^c; \tau(n) > nt) + \mathbf{P}\{e^{S_{\tau(n)} - \min_{0 \leq k \leq \tau(n)-N} S_k} > \varepsilon\}$$

завершает доказательство леммы.

Для $k \leq n$ положим

$$\sigma_n(k) = \frac{e^{S_k}(1 - f_{k,n}(0))}{1 - f_{0,n}(0)}. \quad (50)$$

Лемма 6. Если выполнены условия A1 и A2, то

$$\{\sigma_n(\tau(nt) + m) \mid \tau(n) > nt\} \xrightarrow{d} 1.$$

Доказательство. Заметим, что $\sigma_n(k) \geq 1$ для всех $k \leq n$ ввиду соотношения

$$1 - f_{0,n}(0) = 1 - f_{0,k}(f_{k,n}(0)) \leq e^{S_k}(1 - f_{k,n}(0)).$$

С другой стороны, $\sigma_n(\tau(nt) + m) \leq \sigma_n(nt)$, если $\tau(nt) + m \leq nt$, так как в этом случае

$$e^{S_{\tau(nt)+m}}(1 - f_{\tau(nt)+m,n}(0)) \leq e^{S_{nt}}(1 - f_{nt,n}(0)).$$

Для завершения доказательства осталось применить следствие 4 работы [10] с $\beta_n(k) = 1/\sigma_n(k)$.

Введем функцию

$$h_{m,t}^{(n)}(s) := s(f_{0,\tau(nt)+m}(s))' e^{-S_{\tau(nt)+m}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}(k) s^k \quad (51)$$

и обозначим

$$d^{(n)}(m, t) := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{M}_{m,t}^{(n)}(k) - \mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}(k)|$$

расстояние по вариации между мерами $\mathcal{M}_{m,t}^{(n)}$ и $\mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}$.

Лемма 7. Если выполнены условия A1 и A2, то для любых $t \in (0, 1)$, $m \in \mathbf{Z}$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(d^{(n)}(m, t) > \varepsilon \mid \tau(n) > nt) = 0.$$

Доказательство. Запишем $f_{0,\tau(nt)+m}(s)$ в виде

$$f_{0,\tau(nt)+m}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_{m,t}^{(n)}(k) s^k.$$

Из (46) и (51) для $k \geq 1$ получаем

$$\mathcal{M}_{m,t}^{(n)}(k) = \mathcal{P}_{m,t}^{(n)}(k) \frac{1 - (f_{\tau(nt)+m,n}(0))^k}{1 - f_{0,n}(0)}, \quad \mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}(k) = k \mathcal{P}_{m,t}^{(n)}(k) e^{-S_{\tau(nt)+m}}.$$

В силу неравенств

$$k(1-x) - \frac{k(k-1)}{2} (1-x)^2 \leq 1-x^k \leq k(1-x), \quad x \in (0, 1),$$

справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & k(\sigma_n(\tau(nt) + m) - 1) - \frac{k(k-1)}{2} \frac{(1 - f_{\tau(nt)+m,n}(0))^2 e^{S_{\tau(nt)+m}}}{1 - f_{0,n}(0)} \\ & \leq \frac{(1 - (f_{\tau(nt)+m,n}(0))^k) e^{S_{\tau(nt)+m}}}{1 - f_{0,n}(0)} - k \leq k(\sigma_n(\tau(nt) + m) - 1), \end{aligned}$$

дающее

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{m,t}^{(n)}(k) - \mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}(k)| & \leq e^{-S_{\tau(nt)+m}} (\sigma_n(\tau(nt) + m) - 1) k \mathcal{P}_{m,t}^{(n)}(k) \\ & + \frac{(1 - f_{\tau(nt)+m,n}(0))^2}{1 - f_{0,n}(0)} \frac{k(k-1)}{2} \mathcal{P}_{m,t}^{(n)}(k). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} 2d^{(n)}(m, t) & \leq e^{-S_{\tau(nt)+m}} (\sigma_n(\tau(nt) + m) - 1) \mathbf{E}_\pi[Z(\tau(nt) + m)] \\ & + \frac{(1 - f_{\tau(nt)+m,n}(0))^2}{2(1 - f_{0,n}(0))} \mathbf{E}_\pi[Z(\tau(nt) + m)(Z(\tau(nt) + m) - 1)]. \quad (52) \end{aligned}$$

Ясно, что

$$e^{-S_{\tau(nt)+m}} (\sigma_n(\tau(nt) + m) - 1) \mathbf{E}_\pi[Z(\tau(nt) + m)] = \sigma_n(\tau(nt) + m) - 1,$$

и в силу леммы 6 эта величина, при осуществлении события $\{\tau(n) > nt\}$, стремится к нулю по вероятности при $n \rightarrow \infty$. Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\pi \left[Z(\tau(nt) + m)(Z(\tau(nt) + m) - 1) \right] &= (f_{0, \tau(nt)+m}(s))''|_{s=1} \\ &= e^{2S_{\tau(nt)+m}} b_{\tau(nt)+m}, \end{aligned}$$

где

$$b_r := \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f_k''(1)}{(f_k'(1))^2} e^{-S_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{r-1} \eta_{k+1} e^{-S_k}$$

(см. (34)), то второе слагаемое в правой части (52) не превосходит

$$\begin{aligned} \frac{(1 - f_{\tau(nt)+m,n}(0))^2}{1 - f_{0,n}(0)} e^{2S_{\tau(nt)+m}} b_{\tau(nt)+m} &= \sigma_n^2(\tau(nt) + m)(1 - f_{0,n}(0)) b_{\tau(nt)+m} \\ &\leq \sigma_n^2(\tau(nt) + m) e^{S_{\tau(n)}} b_{\tau(nt)+m}. \end{aligned} \quad (53)$$

Заметим теперь, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(e^{S_{\tau(n)}} b_{\tau(n)+m} > \varepsilon; \tau(n) > nt) &\leq \mathbf{P}\{nt + N > \tau(n) > nt\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{e^{S_{\tau(n)}} b_{\tau(n)-N} > \varepsilon\}, \end{aligned}$$

и первый член в правой части этого неравенства пренебрежимо мал при $n \rightarrow \infty$ согласно обобщенному закону арксинуса, в то время как второй член стремится к 0 по лемме 15 из [10], если устремить сначала $n \rightarrow \infty$, а затем $N \rightarrow \infty$. Откуда, вспоминая лемму 5 (и, в частности, оценки (49)) и лемму 6, получаем, что при выполнении условия $\tau(n) > nt$ выражение, стоящее после знака неравенства в (53), стремится к нулю по вероятности при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, при выполнении того же условия, правая часть в (52) стремится к нулю по вероятности при $n \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 6. Докажем сначала равенство (47). По лемме 7 достаточно показать, что при $m \in \mathbf{N}_0$

$$\mathcal{M}_{m,t}^{(n)*} \xrightarrow{w_t(\mathbf{P}_{c_i}, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{M}_m^* \quad (54)$$

или, что то же самое,

$$\{h_{m,t}^{(n)}(s) \mid \tau(n) > nt\} \xrightarrow{w_t(\mathbf{P}_{c_i}, \hat{\mathbf{P}})} \varphi_m^*(s), \quad s \in [0, 1], \quad n \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Представляя $h_{m,t}^{(n)}(s)$ в виде

$$h_{m,t}^{(n)}(s) = \frac{s f'_{0, \tau(nt)}(f_{\tau(nt), \tau(nt)+m}(s))}{e^{S_{\tau(nt)}}} \frac{(f_{\tau(nt), \tau(nt)+m}(s))'}{e^{S_{\tau(nt)+m} - S_{\tau(nt)}}}$$

и полагая

$$R_m^{l*}(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_m^{l*}(k) s^k := \frac{s f_{l,0}^{-'}(f_{0,m}^+(s))}{e^{S_l^-}} \frac{(f_{0,m}^+(s))'}{e^{S_m^+}},$$

мы видим, что для $m \in \mathbf{N}_0$ и $l + m \leq nt$

$$(\mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}(\cdot) \mid \tau(nt) = l) \stackrel{d}{=} (\mathcal{M}_m^{l*}(\cdot) \mid \mathcal{A}_{l,nt-l}). \quad (56)$$

Мы знаем, что при $l \rightarrow \infty$

$$\frac{1 - f_{l,0}^-(s)}{e^{S_l^-}} \rightarrow \zeta^-(s), \quad s \in [0, 1], \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Так как в этом выражении допредельная и предельная функции являются аналитическими внутри круга $|s| \leq 1$, то при $l \rightarrow \infty$

$$(f_{l,0}^-(s))' e^{-S_l^-} = -\frac{d}{ds} \frac{1 - f_{l,0}^-(s)}{e^{S_l^-}} \rightarrow -(\zeta^-)'(s), \quad s \in [0, 1], \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Следовательно, $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. существует

$$\lim_{l \rightarrow \infty} R_m^{l*}(s) = -s(\zeta^-)'(f_{0,m}^+(s))(f_{0,m}^+(s))' e^{-S_m^+} = \varphi_m^*(s) =: \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_m^*(k) s^k. \quad (57)$$

Применяя лемму 4, получаем

$$\{\mathcal{M}_m^{l*} \mid \mathcal{A}_{l,nt-l}\} \xrightarrow{w(\mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{M}_m^* \quad \text{при} \quad \min(l, nt-l) \rightarrow \infty. \quad (58)$$

Покажем, что для любой неслучайной ограниченной функции $J_0: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ и любой неслучайной ограниченной непрерывной функции $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\mathbf{E}[g(\mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}[J]) \mid \tau(n) > nt] \rightarrow \hat{\mathbf{E}}[g(\mathcal{M}_m^*[J])], \quad n \rightarrow \infty. \quad (59)$$

Ясно, что

$$\mathbf{E}[g(\mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}[J]); \tau(n) > nt] = \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}[J])] - \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}[J]); \tau(n) \leq nt].$$

Из (56)–(58) и следствия 1 вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}[J])] = \hat{\mathbf{E}}[g(\mathcal{M}_m^*[J])].$$

С другой стороны, применяя рассуждения, близкие к тем, которые мы проводили при доказательстве (58), можно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}[J]); \tau(n) \leq nt] &= \sum_{l=0}^{nt} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_{m,t}^{l*}[J]) \mid \mathcal{A}_{l,nt-l}] \mathbf{P}\{\tau(n) = l\} \\ &= (1 + o(1)) \hat{\mathbf{E}}[g(\mathcal{M}_m^*[J])] \mathbf{P}\{\tau \leq t\}, \end{aligned}$$

где случайная величина τ та же, что и в (6). Отсюда следует (59), что и завершает доказательство соотношения (47).

Для того чтобы доказать (48), нужно представить $h_{-m,t}^{(n)}(s)$, $m \in \mathbf{N}_0$, в виде

$$h_{-m,t}^{(n)}(s) = s f'_{0,\tau(nt)-m}(s) e^{-S_{\tau(nt)-m}},$$

ввести функцию

$$R_m^{l*}(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_m^{l*}(k) s^k := s f_{l,m}^{-l}(s) e^{-(S_l^- - S_m^-)}$$

и применить рассуждения, аналогичные приведенным ранее при доказательстве соотношения (47).

Это завершает доказательство теоремы 6 и, тем самым, и доказательство теоремы 2.

5. Ветвящиеся процессы в случайной среде и локальное время остановленного случайного блуждания в случайной среде. В этом разделе результаты, полученные ранее для ветвящихся процессов в случайной среде, применяются к исследованию локального времени остановленного случайного блуждания в случайной среде. Однако сначала мы сформулируем еще две теоремы, относящиеся к ветвящимся процессам в случайной среде. Первая из них характеризует распределение числа частиц в популяции в два соседних момента времени, находящихся в окрестности момента глобального минимума сопровождающего случайного блуждания, а вторая описывает аналогичное распределение в окрестности точки $\tau(nt)$ при $\tau(n) > nt$. Для $t \in [0, 1]$, $s_1, s_2 \in [0, 1)$ положим

$$\varphi_{m,t}^{(n)}(s_1, s_2) = \mathbf{E}_\pi[s_1^{Z(\tau(nt)+m)} s_2^{Z(\tau(nt)+m+1)} | Z(n) > 0].$$

Теорема 7. Если выполнены условия A1 и A2, то для любого $m \in \mathbf{Z}$

$$\varphi_{m,1}^{(n)}(s_1, s_2) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \varphi_m(s_1, s_2), \quad s_1, s_2 \in [0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

где для $m \in \mathbf{N}_0$

$$\varphi_m(s_1, s_2) = \frac{\zeta^-(f_{0,m}^+(s_1 f_m^+(s_2 q_{m+1}^+))) - \zeta^-(f_{0,m}^+(s_1 f_m^+(s_2)))}{\zeta},$$

а для $m \in \mathbf{N}$

$$\varphi_{-m}(s_1, s_2) = \frac{\zeta_{\infty,m}^-(s_1 f_{m-1}^-(s_2 f_{m-1,0}^-(q^+))) - \zeta_{\infty,m}^-(s_1 f_{m-1}^-(s_2))}{\zeta}.$$

Теорема 8. Если выполнены условия A1 и A2, то для любых $m \in \mathbf{Z}$ и $t \in (0, 1)$

$$\{\varphi_{m,t}^{(n)}(s_1, s_2) | \tau(n) > nt\} \xrightarrow{w_t(\mathbf{P}_c, \hat{\mathbf{P}})} \varphi_m^*(s_1, s_2), \quad s_1, s_2 \in [0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

где для $m \in \mathbf{N}_0$

$$\varphi_m^*(s_1, s_2) = -s_1 s_2 (\zeta^-)'(f_{0,m}^+(s_1 f_m^+(s_2))) f_{0,m}^{+'}(s_1 f_m^+(s_2)) f_m^{+'}(s_2) e^{-S_{m+1}^+}, \quad (60)$$

а для $m \in \mathbf{N}$

$$\varphi_{-m}^*(s_1, s_2) = -s_1 s_2 (\zeta_{\infty,m}^-)'(s_1 f_{m-1}^-(s_2)) f_{m-1}^{-'}(s_2) e^{-X_m^-}. \quad (61)$$

Доказательства этих теорем в основном следуют схеме доказательств теорем 5 и 6. Поэтому мы приведем лишь набросок аргументов, необходимых для получения теоремы 8.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}_0$. Нетрудно показать, что

$$\varphi_{m,t}^{(n)}(s_1, s_2) = \frac{1}{1 - f_{0,n}(0)} \left[f_{0,\tau(nt)+m}(s_1 f_{\tau(nt)+m}(s_2)) - f_{0,\tau(nt)+m}(s_1 f_{\tau(nt)+m}(s_2 f_{\tau(nt)+m+1,n}(0))) \right].$$

Применяя рассуждения, использованные при доказательстве леммы 7 и теоремы 6, можно показать, что при условии $\tau(n) > nt$ расстояние по вариации между мерами, соответствующими производящим функциям $\varphi_{m,t}^{(n)}(s_1, s_2)$ и

$$\begin{aligned} h_{m,t}^{(n)}(s_1, s_2) &:= \frac{1}{e^{S_{\tau(nt)+m+1}}} s_1 s_2 f'_{0,\tau(nt)}(f_{\tau(nt),\tau(nt)+m}(s_1 f_{\tau(nt)+m}(s_2))) \\ &\quad \times f'_{\tau(nt),\tau(nt)+m}(s_1 f_{\tau(nt)+m}(s_2)) f'_{\tau(nt)+m}(s_2) \\ &= s_2 e^{-S_{\tau(nt)+m+1}} \frac{\partial}{\partial s_2} [f_{0,\tau(nt)+m}(s_1 f_{\tau(nt)+m}(s_2))] \\ &= \sum_{k,j=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}(k, j) s_1^k s_2^j, \end{aligned}$$

стремится к нулю по вероятности при $n \rightarrow \infty$. Полагая

$$\begin{aligned} R_m^{l*}(s_1, s_2) &:= -s_1 s_2 (\zeta_{l,0}^-)'(f_{0,m}^+(s_1 f_m^+(s_2))) f_{0,m}^{+'}(s_1 f_m^+(s_2)) f_m^{+'}(s_2) e^{-S_{m+1}^+} \\ &= \sum_{k,j=1}^{\infty} \mathcal{M}_m^{l*}(k, j) s_1^k s_2^j, \end{aligned}$$

можно показать, что $(\mathcal{M}_{m,t}^{(n)*}(\cdot) | \tau(nt) = l) \stackrel{d}{=} (\mathcal{M}_m^{l*}(\cdot) | \mathcal{A}_{l,nt-l})$ для $m \in \mathbb{N}_0$ и $l + m \leq nt$. Отсюда нетрудно вывести, что $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} R_m^{l*}(s_1, s_2) &= -s_1 s_2 (\zeta^-)'(f_{0,m}^+(s_1 f_m^+(s_2))) f_{0,m}^{+'}(s_1 f_m^+(s_2)) f_m^{+'}(s_2) e^{-S_{m+1}^+} \\ &= \varphi_m^*(s_1, s_2). \end{aligned}$$

Применяя теперь аргументы, сходные с приводимыми в конце доказательства теоремы 6, можно получить (60).

Соотношение (61) доказывается с помощью аналогичных рассуждений, если положить

$$\begin{aligned} \varphi_{-m,t}^{(n)}(s_1, s_2) &:= \frac{1}{1 - f_{0,n}(0)} \left[f_{0,\tau(nt)-m}(s_1 f_{\tau(nt)-m}(s_2)) - f_{0,\tau(nt)-m}(s_1 f_{\tau(nt)-m}(s_2 f_{\tau(nt)-m,n}(0))) \right], \end{aligned}$$

ввести функции

$$\begin{aligned} h_{-m,t}^{(n)}(s_1, s_2) &:= \frac{s_1 s_2 f'_{0,\tau(nt)-m}(s_1 f_{\tau(nt)-m}(s_2)) f'_{\tau(nt)-m}(s_2)}{e^{S_{\tau(nt)-m}}} \\ &= s_2 e^{-S_{\tau(nt)-m}} \frac{\partial}{\partial s_2} [f_{0,\tau(nt)-m}(s_1 f_{\tau(nt)-m}(s_2))] \\ &= \sum_{k,j=1}^{\infty} \mathcal{M}_{-m,t}^{(n)*}(k, j) s_1^k s_2^j, \end{aligned}$$

$$R_{-m}^{l*}(s_1, s_2) := -\frac{s_1 s_2 \zeta_{l,m}^{-'}(s_1 f_{m-1}^{-}(s_2)) f_{m-1}^{-'}(s_2)}{e^{X_m^-}} = \sum_{k,j=1}^{\infty} \mathcal{M}_{-m}^{(n)*}(k, j) s_1^k s_2^j$$

и заметить, что $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} R_{-m}^{l*}(s_1, s_2) = -\frac{s_1 s_2 (\zeta^-)'(s_1 f_{m-1}^{-}(s_2)) f_{m-1}^{-'}(s_2)}{e^{X_m^-}} = \varphi_{-m}^*(s_1, s_2).$$

Доказательство теоремы 8 завершено.

В дальнейшем мы будем рассматривать только ветвящиеся процессы в случайной среде, мера $\mathbb{P}$ которых сконцентрирована на геометрических вероятностных производящих функциях $f_n(s)$, имеющих вид (27), и в связи с этим не будем делать различия между последовательностями $\{Y(k)\}_{k \geq 0}$ и $\{Z(k)\}_{k \geq 0}$.

Пусть $\{T_r\}_{r \geq 0}$ — простое случайное блуждание в случайной среде $\{p_n, q_n, n \in \mathbf{Z}\}$: $T_0 = 0$, $T_r = W_1 + \dots + W_r$, $r \in \mathbf{N}$, где для $\delta \in \{-1, 1\}$

$$\mathbf{P}(W_{r+1} = \delta \mid T_r) = \frac{1 + \delta}{2} p_{T_r} + \frac{1 - \delta}{2} q_{T_r}$$

и пары (p_n, q_n) являются независимыми и одинаково распределенными. Положим $\theta = \min\{r: T_r = -1\}$, и пусть $T_r^* = T_{r \wedge \theta}$, $r \geq 0$, — часть случайного блуждания $\{T_r\}_{r \geq 0}$ до момента его попадания на уровень -1 . Определим локальное время блуждания T_r^* на уровне n соотношением (24) и обозначим $X_k = \ln(p_{k-1}/q_{k-1})$, $k \in \mathbf{N}$. Последовательность $S_0 = 0$, $S_k = X_1 + \dots + X_k$, $k \geq 1$, называется сопровождающим случайным блужданием для $\{T_r^*\}_{r \geq 0}$. Пусть, как и ранее, $\tau(n)$ — самая левая точка, в которой достигается минимум случайного блуждания $\{S_k\}_{k \geq 0}$ на отрезке $[0, n]$, и пусть

$$\Lambda_{m,t}^{(n)}(s) = \mathbf{E}\left[s^{\ell(\tau(nt)+m)} \mid \max_{r \geq 0} T_r^* > n; \{p_l, q_l, l \in \mathbf{N}_0\}\right].$$

Положим

$$\omega_m^- := \sum_{j=m+1}^{\infty} e^{S_j^- - S_m^-}, \quad r_m := \sum_{k=0}^{m-1} e^{-S_k^+}, \quad R_m = \omega_0^- + r_m.$$

Для $i = 0, 1$ обозначим

$$b_{im} = \frac{a_m^+(q_{m+1}^+)^i + R_m(R_m + e^{-S_m^+})^{-1}}{1 + a_m^+}, \quad (62)$$

$$c_{im} = \frac{a_{m-1}^-(1 + \omega_m^-)(f_{m-1,0}^-(q^+))^i + \omega_m^-}{(1 + a_{m-1}^-)(1 + \omega_m^-)}, \quad (63)$$

где $a_k^{\pm} = p_k^{\pm}(q_k^{\pm})^{-1} = (f_k^{\pm})'(1)$.

Теперь мы можем доказать следующее утверждение, являющееся эквивалентом теоремы 3.

Теорема 9. Пусть случайное блуждание $\{S_k\}_{k \geq 0}$ удовлетворяет условию A1. Тогда для любого $m \in \mathbb{Z}$

$$\Lambda_{m,1}^{(n)}(s) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \Lambda_m(s) = \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{L}_m(k) s^k, \quad n \rightarrow \infty,$$

причем для $m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \Lambda_m(s) &= \frac{\zeta^-(f_{0,m}^+(sf_m^+(sq_{m+1}^+))) - \zeta^-(f_{0,m}^+(sf_m^+(s)))}{\zeta} \\ &= s^2 \left(\frac{1 - b_{0m}}{1 - b_{0m}s} \right) \left(\frac{1 - b_{1m}}{1 - b_{1m}s} \right), \end{aligned} \quad (64)$$

а для $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Lambda_{-m}(s) &= \frac{\zeta_{\infty,m}^-(sf_{m-1}^-(sf_{m-1,0}^-(q^+))) - \zeta_{\infty,m}^-(sf_{m-1}^-(s))}{\zeta} \\ &= s^2 \left(\frac{1 - c_{0m}}{1 - c_{0m}s} \right) \left(\frac{1 - c_{1m}}{1 - c_{1m}s} \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Доказательство. Согласно (28),

$$\Lambda_{m,1}^{(n)}(s) = \mathbf{E} \left[s^{\ell(\tau(nt)+m)} \mid \max_{r \geq 0} T_r^* > n; \{p_l, q_l, l \in \mathbb{N}_0\} \right] = \varphi_{m,1}^{(n)}(s, s).$$

Таким образом, в силу теоремы 7 для проверки справедливости доказываемой теоремы достаточно найти точные выражения для правых частей в (64) и (65) в случае, когда производящие функции численности потомства задают геометрические распределения. Заметим, что в этом случае $\chi_k(s) = 1$ (см. (31)), что дает $\eta_{j,m}(s) = 1$, и кроме того, $f_m(s) = (1 + e^{X_{m+1}}(1-s))^{-1}$. Отсюда, используя (32) и (33), нетрудно вывести, что

$$\zeta_{\infty,m}^-(s) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1 - f_{l,m}^-(s)}{e^{S_l^- - S_m^-}} = \left(\frac{1}{1-s} + \omega_m^- \right)^{-1} \quad \hat{\mathbf{P}}^- \text{ - п.н.} \quad (66)$$

и

$$(1 - f_{0,m}^+(s))^{-1} = e^{-S_m^+} (1-s)^{-1} + r_m. \quad (67)$$

Отталкиваясь от этих представлений, можно показать, проводя не сложные, но громоздкие вычисления, что для любого $m \in \mathbb{N}_0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Lambda_{m,1}^{(n)}(s) &\xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \frac{\zeta^-(f_{0,m}^+(sf_m^+(sq_{m+1}^+))) - \zeta^-(f_{0,m}^+(sf_m^+(s)))}{\zeta} \\ &= \left(\left(\frac{1}{1 - f_{0,m}^+(sf_m^+(sq_{m+1}^+))} + \omega_0^- \right)^{-1} - \left(\frac{1}{1 - f_{0,m}^+(sf_m^+(s))} + \omega_0^- \right)^{-1} \right) \zeta^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(\frac{e^{-S_m^+}}{1 - sf_m^+(sq_{m+1}^+)} + R_m \right)^{-1} - \left(\frac{e^{-S_m^+}}{1 - sf_m^+(s)} + R_m \right)^{-1} \right) \zeta^{-1} \\
&= \frac{e^{-S_m^+} s (f_m^+(s) - f_m^+(sq_{m+1}^+))}{\zeta(e^{-S_m^+} + R_m(1 - sf_m^+(sq_{m+1}^+)))(e^{-S_m^+} + R_m(1 - sf_m^+(s)))} \\
&= \frac{s^2 f_m^+(s) f_m^+(sq_{m+1}^+) (1 - q_{m+1}^+) e^{-S_m^+ + X_{m+1}^+}}{\zeta(e^{-S_m^+} + R_m(1 - sf_m^+(sq_{m+1}^+)))(e^{-S_m^+} + R_m(1 - sf_m^+(s)))} \\
&= s^2 \left(\frac{1 - b_{0m}}{1 - b_{0m}s} \right) \left(\frac{1 - b_{1m}}{1 - b_{1m}s} \right).
\end{aligned}$$

Аналогично, используя (66), можно проверить, что для $m \in \mathbb{N}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{-m,1}^{(n)}(s) &= \varphi_{-m,1}^{(n)}(s, s) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \frac{\zeta_{\infty, m}^-(sf_{m-1}^-(sf_{m-1,0}^-(q^+))) - \zeta_{\infty, m}^-(sf_{m-1}^-(s))}{\zeta} \\
&= \frac{s(f_{m-1}^-(s) - f_{m-1}^-(sf_{m-1,0}^-(q^+)))}{\zeta(1 + \omega_m^-(1 - sf_{m-1}^-(sf_{m-1,0}^-(q^+))))(1 + \omega_m^-(1 - sf_{m-1}^-(s)))} \\
&= s^2 \left(\frac{1 - c_{0m}}{1 - c_{0m}s} \right) \left(\frac{1 - c_{1m}}{1 - c_{1m}s} \right).
\end{aligned}$$

Применяя похожие рассуждения, можно доказать следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы 4.

Теорема 10. Пусть $\{S_k\}_{k \geq 0}$ удовлетворяет условию A1. Тогда для любого $m \in \mathbb{Z}$ и любого фиксированного $t \in (0, 1)$

$$\{\Lambda_{m,t}^{(n)}(s) \mid \tau(n) > nt\} \xrightarrow{w(\mathbf{P}_c, \hat{\mathbf{P}})} \Lambda_m^*(s), \quad s \in [0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Здесь для $m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\Lambda_m^*(s) &= -s^2 (\zeta^-)'(f_{0,m}^+(sf_m^+(s))) f_{0,m}'(sf_m^+(s)) f_m^{+'}(s) e^{-S_{m+1}^+} \\
&= \frac{s^2 e^{-S_m^+} e^{-S_{m+1}^+} (f_m^+(s))'}{(e^{-S_m^+} + R_m(1 - sf_m^+(s)))^2} = s^2 \left(\frac{1 - c_m}{1 - c_m s} \right)^2,
\end{aligned}$$

где

$$c_m = \frac{R_m(1 - a_m^+) + a_m^+ e^{-S_m^+}}{R_m(1 - a_m^+) + (1 + a_m^+) e^{-S_m^+}},$$

и для $m \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_{-m}^*(s) = -\frac{s^2 \zeta_{\infty, m}'(sf_{m-1}^-(s)) f_{m-1}^{-'}(s)}{e^{X_m^-}} = s^2 \left(\frac{1 - c_{0m}}{1 - c_{0m}s} \right)^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альбеверио С., Козлов М. В. О возвратности и транзиентности зависящих от состояния ветвящихся процессов в случайной среде. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 641–660.

2. *Athreya K. B., Karlin S.* On branching processes with random environments. I. Extinction probabilities. — *Ann. Math. Statist.*, 1971, v. 42, № 5, p. 1499–1520.
3. *Athreya K. B., Karlin S.* On branching processes with random environments. II. Limit theorems. — *Ann. Math. Statist.*, 1971, v. 42, № 6, p. 1843–1858.
4. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching Processes. New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
5. *Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A.* Criticality for branching processes in random environment. — *Ann. Probab.*, 2005, v. 33, № 2, p. 645–673.
6. *Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A.* Functional limit theorems for strongly subcritical branching processes in random environment. — *Stochastic Process. Appl.*, 2005, v. 115, № 10, p. 1658–1676.
7. *Vatutin V. A., Zubkov A. M.* Branching processes. II. — *J. Soviet Math.*, 1993, v. 67, № 6, p. 3407–3485.
8. *Vatutin V. A., Dyakonova E. E.* Reduced branching processes in random environment. — *Mathematics and Computer Science. II: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities*. Ed. by B. Chauvin et al. Basel: Birkhäuser, 2002, p. 455–467.
9. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. I: предельные теоремы. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, т. 48, в. 2, с. 274–300.
10. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. II: конечномерные распределения. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, т. 49, в. 2, с. 231–268.
11. *Vatutin V. A., Dyakonova E. E.* Yaglom type limit theorem for branching processes in random environment. — *Mathematics and Computer Science. III: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities*. Ed. by M. Drmota et al. Basel: Birkhäuser, 2004, p. 375–385.
12. *Deheuvels P., Révész P.* Simple random walk on the line in random environment. — *Probab. Theory Related Fields*, 1986, v. 72, № 2, p. 215–230.
13. *Dyakonova E. E., Geiger J., Vatutin V. A.* On the survival probability and a functional limit theorem for branching processes in random environment. — *Markov Process. Related Fields*, 2004, v. 10, № 2, p. 289–306.
14. *Geiger J., Kersting G.* The survival probability of a critical branching process in random environment. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, т. 45, в. 3, с. 607–615.
15. *Gillespie J. H.* The Causes of Molecular Evolution. Oxford: Oxford Univ. Press, 1991, 352 p.
16. *Haccou P., Jagers P., Vatutin V. A.* Branching Processes: Variation, Growth, and Extinction of Populations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005, 320 p.
17. *Harris T. E.* First passage and recurrence distributions. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1952, v. 73, p. 471–486.
18. Козлов М. В. Условная предельная теорема критического ветвящегося процесса в случайной среде. — *Докл. РАН*, 1995, т. 344, № 1, с. 12–15.
19. Синай Я. Г. Предельное поведение одномерного случайного блуждания в случайной среде. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1982, т. 27, в. 2, с. 247–258.
20. *Smith W. L., Wilkinson W. E.* On branching processes in random environments. — *Ann. Math. Statist.*, 1969, v. 40, p. 814–827.
21. *Solomon F.* Random walk in a random environment. — *Ann. Probab.*, 1975, v. 3, № 1, p. 1–31.
22. Спitzer Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.
23. *Tarjan R. E.* Depth-first search and linear graph algorithm. — *SIAM J. Comput.*, 1972, v. 1, № 2, p. 146–160.
24. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.

Поступила в редакцию
7.VII.2005