Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

S. Graversen, А. Н. Ширяев, М. Йор, К вопросу о стохастических интегральных представлениях функционалов от броуновского движения. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 1, 64–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:06:21

© 2006 г. ГРАВЕРСЕН С. Э.*, ШИРЯЕВ А. Н.**; ЙОР М.***

К ВОПРОСУ О СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ. II¹⁾

В первой части работы, [1], был изложен метод получения стохастических интегральных представлений для функционалов $S(\omega)$ от броуновского движения $B = (B_t)_{t \geq 0}$. В качестве иллюстрации были рассмотрены функционалы $\max_{t \leq T} B_t$ и $\max_{t \leq T-a} B_t$, где $T-a = \inf\{t: B_t = -a\}$, $a > 0$. В настоящей работе будет дан иной вывод (С.Э. Граверсен; §§ 2*, 3*) представлений для этих функционалов и даны два доказательства (§ 4) представления для функционала $\max_{t \leq g_T} B_t$, где (немарковский момент) $g_T = \sup\{0 \leq t \leq T: B_t = 0\}$.

Ключевые слова и фразы: броуновское движение, интегралы Ито, мах-функционалы, стохастическое интегральное представление.

§ 2*. Второй вывод представления для $S_T = \max_{t \leq T} B_t$

1. Согласно формуле (4) первой части работы,

$$S_T = \mathbf{E}S_T + 2 \int_0^T \left[1 - \Phi\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{T-t}}\right) \right] dB_t$$

или, равносильно,

$$S_T = \mathbf{E}S_T + \int_0^T \Psi\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{T-t}}\right) dB_t, \quad (45)$$

где $S_t = \max_{u \leq t} B_u$, $\mathbf{E}S_t = \sqrt{2T/\pi}$ и $\Psi(x) = 2[1 - \Phi(x)]$ ($= 2\mathbf{P}\{\mathcal{N}(0, 1) > x\}$, $\mathcal{N}(0, 1)$ — стандартная гауссовская случайная величина).

2. Покажем, что для всякого $t \geq 0$ справедлива следующая формула:

$$\mathbf{E}(S_T | \mathcal{F}_t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T + \int_0^{T \wedge t} \Psi\left(\frac{S_u - B_u}{\sqrt{T-u}}\right) dB_u, \quad (46)$$

* Institute for Mathematical Sciences, Ny Munkegade, 8000 Aarhus C, Denmark; e-mail: matseg@imf.au.dk

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: albertsh@mi.ras.ru

*** Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Université Pierre et Marie Curie, Boîte courrier 188, 75252 Paris Cedex 05, France; e-mail: deapropa@proba.jussieu.fr

¹⁾ Второй автор поддержан РФФИ (грант 05-01-00944) и грантом НШ-1758.2003.1.

из которой, очевидно, следует и формула (45). (Напомним, что $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ есть σ -алгебра, порожденная броуновским движением и пополненная множествами нулевой $\mathbf{P}$ -вероятности из σ -алгебры $\mathcal{F}$ исходного полного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.)

Зафиксируем $0 \leq t < T$. Тогда, согласно (5),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_T | \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \mathbf{E}[I(a < S_t) | \mathcal{F}_t] da\right) = \int_0^\infty \mathbf{E}[I(T_a < T) | \mathcal{F}_t] da \\ &= \int_0^\infty (I(T_a \leq t) + \mathbf{E}[I(t < T_a < T) | \mathcal{F}_t]) da \\ &= \int_0^\infty I(T_a \leq t) da + \int_0^\infty \mathbf{P}(t < T_a < T | \mathcal{F}_t) da \\ &= S_t + \int_0^\infty \mathbf{P}(t < T_a < T | \mathcal{F}_t) da. \end{aligned} \quad (47)$$

На множестве $\{t < T_a\}$, согласно марковскому свойству и формулам (14), (15), мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t < T_a < T | \mathcal{F}_t) &= \mathbf{P}(\exists s \in (t, T): B_s > a | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbf{P}_{B_t}\{\exists s \in (0, T-t): B_s > a\} = \mathbf{P}_{B_t}\{T_a < T-t\} \\ &= \int_0^{T-t} \frac{a - B_t}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{(a - B_t)^2}{2s}\right\} ds, \end{aligned} \quad (48)$$

где $\mathbf{P}_x(\cdot)$ — распределение броуновского движения, начинающегося в точке x .

Из (47) и (48) находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_T | \mathcal{F}_t] &= S_t + \int_{S_t}^\infty \int_0^{T-t} \frac{a - B_t}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{(a - B_t)^2}{2s}\right\} ds da \\ &= S_t + \int_0^{T-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \left(\int_{S_t}^\infty \frac{a - B_t}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left\{-\frac{(a - B_t)^2}{2s}\right\} da\right) ds \\ &= S_t + \int_0^{T-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{(S_t - B_t)^2}{2s}\right\} ds \\ &= S_t + H(S_t - B_t, t), \end{aligned} \quad (49)$$

где

$$H(x, t) = \int_0^{T-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-x^2/(2s)} ds, \quad x \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq t < T.$$

Ясно, что

$$H(0, 0) = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} ds = \sqrt{\frac{2T}{\pi}} \quad (50)$$

и для $x > 0$ и $0 < t < T$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} H(x, t) &= - \int_0^{T-t} \frac{x}{\sqrt{2\pi s}} e^{-x^2/(2s)} ds \\ &= -P\{T_x < T - t\} = -\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right).\end{aligned}\quad (51)$$

Обозначая $X_t = S_t - B_t$ и применяя к $H(X_t, t)$ формулу Ито, находим, что (в дифференциальной форме)

$$dH(X_t, t) = \frac{\partial}{\partial t} H(X_t, t) dt + \frac{\partial}{\partial x} H(X_t, t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(X_t, t) d[X]_t,$$

где $([X]_t)_{t \leq T}$ — квадратическая вариация процесса $(X_t)_{t \leq T}$. Очевидно, что в рассматриваемом случае $[X]_t = [B]_t = t$. Поэтому (в интегральной форме)

$$\begin{aligned}H(S_t - B_t, t) &= H(0, 0) + \left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial u} H(X_u, u) du + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} H(X_u, u) dS_u \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(X_u, u) du \right] - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} H(X_u, u) dB_u.\end{aligned}$$

Обозначая выражение в квадратных скобках через A_t , находим из (49), что

$$E(S_T | \mathcal{F}_t) = H(0, 0) + (A_t + B_t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} H(X_u, u) dB_u.$$

Поскольку процессы $(E(S_T | \mathcal{F}_t))_{t \leq T}$ и $(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x} H(X_u, u) dB_u)_{t \leq T}$ являются непрерывными мартингалами, то процесс ограниченной вариации $(A_t + B_t)_{t \leq T}$ с $A_0 + B_0 = 0$ также есть мартингал. Следовательно, этот процесс тождественно (с точностью до стохастической неразличимости) равен нулю, а значит,

$$E(S_T | \mathcal{F}_t) = H(0, 0) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} H(X_u, u) dB_u,$$

что с учетом формул (50) и (51) приводит к требуемому представлению (46).

§ 3*. Второй вывод представления для $S_{T-a} = \max_{t \leq T-a} B_t$

1. Согласно формуле (44) из первой части работы,

$$S_{T-a} = \int_0^{T-a} \ln \frac{a}{a + S_u} dB_u. \quad (52)$$

Покажем, что для каждого $M > 0$ и $t \geq 0$ справедливо представление

$$E[S_{T-a} \wedge M | \mathcal{F}_t] = a \ln \frac{a + M}{a} + \int_0^{t \wedge T-a} \ln \frac{a + M}{a + M \wedge S_u} dB_u, \quad (53)$$

из которого, как будет показано ниже, предельным переходом по $M \rightarrow \infty$ получается и формула (52).

Для фиксированного $M > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{T_{-a}} \wedge M \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}\left[\int_0^M I(\alpha < S_{T_{-a}} \wedge M) d\alpha \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \int_0^M \mathbf{E}[I(\alpha < S_{T_{-a} \wedge M}) \mid \mathcal{F}_t] d\alpha = \int_0^M \mathbf{E}[I(T_\alpha < T_{-a}) \mid \mathcal{F}_t] d\alpha \\ &= \int_0^M I(T_\alpha < T_{-a} \leq t) d\alpha \\ &\quad + \int_0^M \left(I(T_\alpha < T_{-a}) + \mathbf{E}[I(t < T_\alpha < T_{-a}) \mid \mathcal{F}_t]\right) d\alpha. \end{aligned} \quad (54)$$

В силу марковского свойства броуновского движения находим, что на множестве $\{t < T_{-a}\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{T_{-a}} \wedge M \mid \mathcal{F}_t] &= \int_0^M I(T_\alpha \leq t) d\alpha + \int_0^M \mathbf{E}[I(t < T_\alpha < T_{-a}) \mid \mathcal{F}_t] d\alpha \\ &= \int_0^M I(\alpha < S_t) d\alpha + \int_0^M \mathbf{E}[I(t < T_\alpha) I(0 < T_\alpha \circ \theta_t < T_{-a} \circ \theta_t) \mid \mathcal{F}_t] d\alpha \\ &= S_t \wedge M + \int_0^M \mathbf{P}_{B_t}\{T_\alpha < T_{-a}\} I(t < T_\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (55)$$

где θ_t — оператор сдвига. На множестве же $\{T_{-a} \leq t\}$

$$\mathbf{E}[S_{T_{-a}} \wedge M \mid \mathcal{F}_t] = \int_0^M I(T_\alpha < T_{-a} < t) d\alpha = S_{T_{-a}} \wedge M. \quad (56)$$

Воспользовавшись известной формулой

$$\mathbf{P}_x\{T_\alpha < T_{-a}\} = \frac{x+a}{\alpha+a}, \quad -a < x < \alpha,$$

из (55) находим, что на множестве $\{t < T_{-a}\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{T_{-a}} \wedge M \mid \mathcal{F}_t] &= S_t \wedge M + \int_0^M \frac{B_t + a}{\alpha + a} I(t < T_\alpha) d\alpha \\ &= S_t \wedge M + B_t \int_0^M \frac{1}{\alpha + a} I(S_t < \alpha) d\alpha + \int_0^M \frac{a}{\alpha + a} I(S_t < \alpha) d\alpha \\ &= S_t \wedge M + (B_t + a) \ln(M + a) - B_t \ln(S_t \wedge M + a) - a \ln(S_t \wedge M + a) \\ &= A_t + \int_0^t \ln \frac{M + a}{S_u \wedge M + a} dB_u, \end{aligned} \quad (57)$$

где $(A_t)_{t \geq 0}$ — непрерывный процесс ограниченной вариации, задаваемый формулой

$$\begin{aligned} A_t &= a \ln(M + a) + S_t \wedge M - a \ln(S_t \wedge M + a) \\ &\quad - \int_0^t \frac{B_u}{S_u \wedge M + a} I(S_u \leq M) dS_u. \end{aligned} \quad (58)$$

(При получении последнего равенства в (57) использована формула Ито, примененная к $B_t \ln(S_t \wedge M + a)$.)

Как и в конце § 2*, воспользуемся тем, что непрерывный мартингал, являющийся процессом ограниченной вариации, есть константа. Тогда из (57) находим, что процессы

$$(E[S_{T-a} \wedge M \mid \mathcal{F}_{t \wedge T-a}])_{t \geq 0} \quad \text{и} \quad \left(A_0 + \int_0^{t \wedge T-a} \ln \frac{M+a}{S_u \wedge M+a} dB_u \right)_{t \geq 0}$$

неразличимы.

Из (58) получаем равенство $A_0 = a \ln[(M+a)/a]$, и, следовательно, для каждого $t \geq 0$

$$E(S_{T-a} \wedge M \mid \mathcal{F}_t) = a \ln \frac{M+a}{a} + \int_0^{t \wedge T-a} \ln \frac{M+a}{S_u \wedge M+a} dB_u \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}),$$

что и есть требуемая формула (53).

Заметим, что согласно этой формуле

$$E(S_{T-a} \wedge M) = a \ln \frac{M+a}{a}.$$

Эту последнюю формулу можно было бы найти и непосредственно:

$$\begin{aligned} E(S_{T-a} \wedge M) &= \int_0^M \mathbf{P}\{S_{T-a} \wedge M > \alpha\} d\alpha \\ &= \int_0^M \mathbf{P}\{T_\alpha < T-a\} d\alpha = \int_0^M \frac{a}{\alpha+a} d\alpha = a \ln \frac{M+a}{a}. \end{aligned}$$

Если в (53) положить $t = T-a$, то найдем, что для каждого $M > 0$

$$\begin{aligned} S_{T-a} \wedge M &= a \ln \frac{M+a}{a} + \int_0^{T-a} [\ln(M+a) - \ln(S_u \wedge M+a)] dB_u \\ &= a \ln \frac{M+a}{a} - a \ln(M+a) - \int_0^{T-a} \ln(S_u \wedge M+a) dB_u \\ &= \int_0^{T-a} [\ln a - \ln(S_u \wedge M+a)] dB_u = \int_0^{T-a} \ln \frac{a}{S_u \wedge M+a} dB_u. \end{aligned}$$

Полагая здесь $M \rightarrow \infty$ и используя непрерывность интеграла по M , находим

$$S_{T-a} = \int_0^{T-a} \ln \frac{a}{a+S_u} dB_u,$$

что и есть требуемая формула (52).

2. Пусть

$$T_{-a}^b = T_b \wedge T_{-a}, \quad a, b > 0.$$

Иначе говоря, пусть

$$T_{-a}^b = \inf \{t > 0: B_t \notin (-a, b)\}.$$

Рассуждения, сходные с приведенными, позволяют установить справедливость следующих представлений:

$$S_{T_{-a}^b} = a \ln \frac{a+b}{a} + \int_0^{T_{-a}^b} \ln \frac{b+a}{S_u+a} dB_u \quad (59)$$

и

$$\mathbf{E}(S_{T_{-a}^b} | \mathcal{F}_t) = a \ln \frac{a+b}{a} + \int_0^{t \wedge T_{-a}^b} \ln \frac{b+a}{S_u+a} dB_u. \quad (60)$$

Действительно, поскольку $\mathbf{P}\{S_{T_{-a}^b} \leq b\} = 1$ и

$$\mathbf{P}\{S_{T_{-a}^b} > u\} = \mathbf{P}\{T_u < T_{-a}\} = \frac{a}{u+a}, \quad 0 < u \leq b,$$

то видим, что

$$\mathbf{E}S_{T_{-a}^b} = a \ln \frac{b+a}{a}.$$

Зафиксируем $t > 0$. Как и в п. 1 (см. (54)), имеем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{T_{-a}^b} | \mathcal{F}_t] &= \int_0^\infty \mathbf{E}[I(u < S_{T_{-a}^b}) | \mathcal{F}_t] du = \int_0^\infty \mathbf{E}[I(T_u < T_{-a}^b) | \mathcal{F}_t] du \\ &= \int_0^\infty \left(I(T_u < T_{-a}^b \leq t) + I(T_u \leq t < T_{-a}^b) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E}[I(t < T_u < T_{-a}^b) | \mathcal{F}_t] \right) du. \end{aligned}$$

Используя марковское свойство броуновского движения, находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[I(t < T_u < T_{-a}^b) | \mathcal{F}_t] &= \mathbf{P}(\exists s \in (t, T_{-a}^b): B_s > u | \mathcal{F}_t) I(t < T_{-a}^b) \\ &= \mathbf{P}_{B_t}\{\exists s \in (0, T_{-a}^b): B_s > u\} I(t < T_{-a}^b) \\ &= \psi(B_t, u) I(t < T_{-a}^b), \end{aligned}$$

где

$$\psi(x, u) = \begin{cases} 1, & x \geq u, u \in (0, b), \\ \frac{x+a}{u+a}, & -a < x < u, u \in (0, b), \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

С учетом этого обозначения находим, что на множестве $\{t < T_{-a}^b\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{T_{-a}^b} | \mathcal{F}_t] &= S_t + \int_{S_t}^b \psi(B_t, u) du \\ &= S_t + \int_{S_t}^b \frac{B_t+a}{u+a} du = S_t + (B_t+a) \ln \frac{b+a}{S_t+a}. \end{aligned}$$

Применяя формулу Ито к правой части этого соотношения и снова, как и в п. 1, игнорируя члены ограниченной вариации, приходим к соотношению

$$\mathbf{E}[S_{T_{-a}^b} | \mathcal{F}_t] = a \ln \frac{a+b}{a} + \int_0^{t \wedge T_{-a}^b} \ln \frac{b+a}{S_u+a} dB_u,$$

что и есть требуемая формула (60), из которой очевидным образом следует формула (59).

§ 4. Случай $S_{g_T} = \max_{t \leq g_T} B_t$

1. Пусть $g_T = \sup\{0 < t \leq T: B_t = 0\}$ есть момент последнего нуля броуновского движения на $(0, T]$. Если $B_t \neq 0$ для всех $0 < t \leq T$, то полагаем $g_T = 0$.

Теорема 3. Для S_{g_T} справедливо следующее стохастическое интегральное представление:

$$S_{g_T} = \frac{1}{2} \mathbf{E} S_T + \int_0^T \left[1 - \Psi \left(\frac{2S_u - B_u}{\sqrt{T-u}} \right) - Z_u(B_u, S_u - S_{g_u}) \right] dB_u, \quad (61)$$

где $\mathbf{E} S_t = \sqrt{2T/\pi}$, $\Psi(x) = 2[1 - \Phi(x)]$ и

$$Z_u(B_u, S_u - S_{g_u}) = (S_u - S_{g_u}) \varphi_{T-u}(B_u) \quad \text{с} \quad g_u = \sup\{0 < t \leq u: B_t = 0\},$$

или, равносильно,

$$S_{g_T} = \frac{1}{2} \mathbf{E} S_T + \int_0^T \left[\frac{1}{2} \Psi \left(\frac{2S_u - B_u}{\sqrt{T-u}} \right) - Z_u(B_u, S_u - S_{g_u}) \right] dB_u. \quad (62)$$

Мы приводим два разных доказательства, каждое из которых может представлять самостоятельный интерес используемыми техническими средствами.

2. Первое доказательство. Имеем

$$S_{g_T} = \int_0^\infty I(a < S_{g_T}) da = \int_0^\infty I(g_T > T_a) da = \int_0^\infty I(d_{T_a} < T) da, \quad (63)$$

где для $K > 0$

$$d_K = \inf\{t > K: B_t = 0\}.$$

По аналогии со схемой доказательства теоремы 1 естественно получить сначала стохастическое интегральное представление для $I(d_{T_a} < T)$ (ср. с леммой 1, дающей представление для $I(T_a < T)$).

Лемма 4. Для всякого $a > 0$ и всякого $T > 0$

$$\begin{aligned} I(d_{T_a} < T) &= \mathbf{P}\{T_{2a} < T\} + 2 \int_{T_a \wedge T}^{d_{T_a} \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s) dB_s \\ &\quad - 2 \int_0^{T_a \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s - 2a) dB_s \quad (\mathbf{P}\text{-н.н.}). \end{aligned} \quad (64)$$

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned} d_{T_a} &= \inf\{t > T_a: B_t = 0\} = T_a + \inf\{u \geq 0: B_{T_a+u} = 0\} \\ &= T_a + \inf\{u \geq 0: B_{T_a+u} - a = -a\} \\ &= T_a + \inf\{u \geq 0: \hat{B}_u = -a\}, \end{aligned} \quad (65)$$

где $\hat{B} = (\hat{B}_u)_{u \geq 0}$ с $\hat{B}_u = B_{T_a+u} - a$ является броуновским движением, независимым от σ -алгебры $\mathcal{F}_{T_a} = \sigma\{A \in \mathcal{F}: A \cap \{T_a \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t > 0\}$ с $\mathcal{F} = \bigvee_{t>0} \mathcal{F}_t$.

Обозначим

$$\hat{T}_{-a} = \inf\{u \geq 0: \hat{B}_u = -a\}.$$

Тогда из (65) имеем $d_{T_a} = T_a + \hat{T}_{-a}$, и, следовательно,

$$I(d_{T_a} < T) = I(\hat{T}_{-a} < T - T_a). \quad (66)$$

Найдем представление для $I(\hat{T}_{-a} < b)$. Если обозначить $\hat{T}_{-a} = \hat{T}_{-a}(\hat{B})$, то видим, что $\hat{T}_{-a}(\hat{B}) = \hat{T}_a(-\hat{B})$. Согласно лемме 1,

$$\begin{aligned} I(\hat{T}_a(-\hat{B}) < b) &= \mathbf{P}\{\hat{T}_a(-\hat{B}) < b\} + 2 \int_0^{\hat{T}_a(-\hat{B}) \wedge b} \varphi_{b-u}(-\hat{B}_u - a) d(-\hat{B}_u) \\ &= \mathbf{P}\{T_a < b\} - 2 \int_0^{\hat{T}_{-a} \wedge b} \varphi_{b-u}(\hat{B}_u + a) d\hat{B}_u. \end{aligned}$$

По формулам (14), (15)

$$\mathbf{P}\{T_a < b\} = \int_0^\infty I(t < b) \gamma_a(t) dt \quad \text{с} \quad \gamma_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/(2t)}.$$

Следовательно,

$$I(\hat{T}_{-a} < b) = \int_0^\infty I(t < b) \gamma_a(t) dt - 2 \int_0^{\hat{T}_{-a} \wedge b} \varphi_{b-u}(\hat{B}_u + a) d\hat{B}_u. \quad (67)$$

Пользуясь независимостью $\hat{T}_{-a}$ от σ -алгебры $\mathcal{F}_{T_a}$, находим из (67), что

$$\begin{aligned} \int_0^{\hat{T}_{-a} \wedge (T-T_a)} \varphi_{T-T_a-u}(\hat{B}_u + a) d\hat{B}_u &= \int_0^{\hat{T}_{-a} \wedge (T-T_a)} \varphi_{T-T_a-u}(B_{T_a+u}) dB_{T_a+u} \\ &= \int_{T_a}^{(\hat{T}_{-a}+T_a) \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s) dB_s = \int_{T_a \wedge T}^{d_{T_a} \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s) dB_s. \end{aligned}$$

Отсюда и из (67), (66) и (6) получаем, что

$$\begin{aligned} I(d_{T_a} < T) &= \int_0^T I(T_a < T-t) \gamma_a(t) dt - 2 \int_{T_a \wedge T}^{d_{T_a} \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s) dB_s \\ &= \int_0^T \mathbf{P}\{T_a < T-t\} \gamma_a(t) dt \\ &\quad + 2 \int_0^T \left[\int_0^{T_a \wedge (T-t)} \varphi_{T-t-s}(B_s - a) dB_s \right] \gamma_a(t) dt \\ &\quad - 2 \int_{T_a \wedge T}^{d_{T_a} \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s) dB_s \\ &= \mathbf{P}\{T_{2a} < T\} + 2 \int_0^{T_a \wedge T} \left[\int_0^{T-s} \gamma_a(t) \varphi_{T-t-s}(B_s - a) dt \right] dB_s \\ &\quad - 2 \int_{T_a \wedge T}^{d_{T_a} \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s) dB_s. \end{aligned} \quad (68)$$

Согласно лемме 5, приводимой в п. 3 ниже, для всех $s < T_a$ таких, что $B_s < a$, выполнено равенство

$$\int_0^{T-s} \gamma_a(t) \varphi_{T-t-s}(B_s - a) dt = \varphi_{T-s}(B_s - 2a). \quad (69)$$

Поэтому из (68) следует, что

$$\begin{aligned} I(d_{T_a} < T) &= \mathbf{P}\{T_{2a} < T\} + 2 \int_0^{T_a \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s - 2a) dB_s \\ &\quad - 2 \int_{T_a \wedge T}^{d_{T_a} \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s) dB_s, \end{aligned}$$

что и есть требуемая формула (64). Лемма 4 доказана.

Обратимся теперь к доказательству представления (61).

В силу (63) и (64)

$$\begin{aligned} S_{g_T} &= \int_0^\infty I(d_{T_a} < T) da \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{T_{2a} < T\} da + 2 \int_0^\infty \left[\int_0^{T_a \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s - 2a) dB_s \right] da \\ &\quad - 2 \int_0^\infty \left[\int_{T_a \wedge T}^{d_{T_a} \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s) dB_s \right] da. \end{aligned} \quad (70)$$

Здесь

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{T_{2a} < T\} da = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{P}\{T_b < T\} db = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{P}\{S_T > b\} db = \frac{1}{2} \mathbf{E} S_T \quad (71)$$

и

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left[\int_0^{T_a \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s - 2a) dB_s \right] da \\ &= \int_0^T \left[\int_0^\infty \varphi_{T-u}(B_u - 2a) I(S_u < a) da \right] dB_u \\ &= \int_0^T \left[\int_{S_u}^\infty \varphi_{T-u}(B_u - 2a) da \right] dB_u = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\int_{2S_u}^\infty \varphi_{T-u}(B_u - b) db \right] dB_u \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left[1 - \Phi\left(\frac{2S_u - B_u}{\sqrt{T-u}}\right) \right] dB_u. \end{aligned} \quad (72)$$

Наконец, преобразуем последнее выражение в правой части (70).

Имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left[\int_{T_a \wedge T}^{d_{T_a} \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s) dB_s \right] da \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty I(T_a \wedge T < s < d_{T_a} \wedge T) \varphi_{T-s}(B_s) dB_s da \\ &= \int_0^T \left[\int_0^\infty I(T_a < s < d_{T_a} \wedge T) da \right] \varphi_{T-s}(B_s) dB_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^T \left[\int_0^\infty I(S_{g_s} < a < S_s) da \right] \varphi_{T-s}(B_s) dB_s \\
 &= \int_0^T (S_u - S_{g_u}) \varphi_{T-u}(B_u) dB_u.
 \end{aligned} \tag{73}$$

Таким образом, из (70)–(73) следует, что

$$\begin{aligned}
 S_{g_T} &= \frac{1}{2} \mathbf{E} S_T + \int_0^T \left[1 - \Phi \left(\frac{2S_u - B_u}{\sqrt{T-u}} \right) \right] dB_u \\
 &\quad + 2 \int_0^T (S_u - S_{g_u}) \varphi_{T-u}(B_u) dB_u.
 \end{aligned}$$

Тем самым формулы (61), (62) доказаны.

3. В приведенном выше доказательстве было использовано интегральное соотношение (69), связывающее плотности

$$\varphi_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-a^2/(2t)} \quad \text{и} \quad \gamma_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/(2t)} \quad \left(= -\frac{\partial}{\partial a} \varphi_t(a) \right).$$

Вытекает оно из следующего предложения.

Лемма 5. Для всех $a > 0$ и $\theta > 0$

$$\int_0^\theta \gamma_a(t) \varphi_{\theta-t}(x-a) dt = \begin{cases} \varphi_\theta(x), & x > a, \\ \varphi_\theta(x-2a), & x \leq a. \end{cases} \tag{74}$$

Доказательство. Положим

$$I(a, x) = \frac{1}{\varphi_\theta(x)} \int_0^\theta \gamma_a(t) \varphi_{\theta-t}(x-a) dt.$$

Используя указанный выше явный вид функций $\varphi_\theta(a)$ и $\gamma_a(t)$ и делая замену переменных $u = \sqrt{\theta/t - 1}$, находим, что

$$I(a, x) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi t}} e^{a(x-a)/\theta} \int_0^\infty e^{-\alpha u^2 - \beta/u^2} du$$

с $\alpha = a^2/(2\theta)$ и $\beta = (x-a)^2/(2\theta)$.

По формуле 3.325 из [2]

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u^2 - \beta/u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-2\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{2\pi\theta}}{2a} e^{-a|x-a|/\theta}.$$

Следовательно,

$$I(a, x) = e^{a(x-a)/\theta} e^{-a|x-a|/\theta} = \begin{cases} 1, & x > a, \\ e^{-2a(a-x)/\theta}, & x \leq a, \end{cases}$$

что и доказывает требуемую формулу (74).

Наряду с приведенным «аналитическим» доказательством формулы (74) небезынтересно следующее «вероятностное» доказательство этой формулы.

Пусть $f = f(x)$ — измеримая ограниченная функция. Тогда

$$\mathbf{E}f(B_\theta) = \mathbf{E}[f(B_\theta) I(T_a < \theta)] + \mathbf{E}[f(B_\theta) I(T_a \geq \theta)]. \quad (75)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f(B_\theta) I(T_a < \theta)] &= \mathbf{E}[f(B_{T_a + (\theta - T_a)}) I(T_a < \theta)] \\ &= \int_0^\theta \gamma_a(t) \left[\int_{-\infty}^\infty f(x) \varphi_{\theta-t}(x-a) dx \right] dt \end{aligned} \quad (76)$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f(B_\theta) I(T_a \geq \theta)] &= \int_{-\infty}^\infty \mathbf{E}[f(B_\theta) I(\theta \leq T_a) | B_\theta = x] \varphi_\theta(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(x) \mathbf{P}(T_a \geq \theta | B_\theta = x) \varphi_\theta(x) dx. \end{aligned} \quad (77)$$

Из (75)–(77) находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}f(B_\theta) &= \int_{-\infty}^\infty f(x) \varphi_\theta(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(x) \left[\int_0^\theta \varphi_{\theta-t}(x-a) \gamma_a(t) dt + \mathbf{P}(T_a \geq \theta | B_\theta = x) \varphi_\theta(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности функции $f(x)$ получаем, что

$$\int_0^\theta \gamma_a(t) \varphi_{\theta-t}(x-a) dt = \varphi_\theta(x) [1 - \mathbf{P}(T_a \geq \theta | B_\theta = x)]. \quad (78)$$

Если $x > a$, то $\mathbf{P}(T_a \geq \theta | B_\theta = x) = 0$ и формула (78) дает (74).

Пусть теперь $x \leq a$, тогда

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{P}(T_a \geq \theta | B_\theta = x) &= \mathbf{P}(T_a < \theta | B_\theta = x) = \mathbf{P}\left(\max_{u \leq \theta} B_u > a | B_\theta = x\right) \\ &= \mathbf{P}(S_\theta > a | B_\theta = x) \end{aligned}$$

с $S_\theta = \max_{u \leq \theta} B_u$.

Вероятность $\mathbf{P}(S_\theta > a | B_\theta = x)$ можно найти, воспользовавшись, например, результатом Сешадри (см. [3]) о том, что величины $S_\theta (S_\theta - B_\theta)$ и B_θ независимы и

$$S_\theta (S_\theta - B_\theta) \stackrel{\text{law}}{=} \frac{\theta}{2} \mathcal{E},$$

где $\mathcal{E}$ — стандартная экспоненциально распределенная случайная величина ($\mathbf{P}\{\mathcal{E} > t\} = e^{-t}$, $t > 0$).

Действительно, из сформулированных утверждений находим, что для $x \leq a$, $a \geq 0$ и $b = a(a-x)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_\theta > a | B_\theta = x) &= \mathbf{P}(S_\theta (S_\theta - B_\theta) > b | B_\theta = x) = \mathbf{P}\left\{\frac{\theta}{2} \mathcal{E} > b\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\mathcal{E} > \frac{2b}{\theta}\right\} = e^{-2b/\theta} = e^{-2a(a-x)/\theta}. \end{aligned}$$

Тем самым, входящее в (78) выражение $1 - \mathbf{P}(T_a \geq \theta \mid B_\theta = x)$ равно

$$\mathbf{P}(S_\theta > a \mid B_\theta = x) = e^{-2a(a-x)/\theta}$$

и, значит, для $x \leq a$

$$\int_0^\theta \gamma_a(t) \varphi_{\theta-t}(x-a) dt = \varphi_\theta(x) e^{-2a(a-x)/\theta},$$

что и утверждается в (74).

4. Второе доказательство. По аналогии с распределениями, использованными в § 2* и § 3*, покажем, что для каждого $t > 0$ справедливо (P-п.н.) равенство

$$\mathbf{E}[S_{g_T} \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{2} \mathbf{E} S_T + \int_0^{t \wedge T} \left[\frac{1}{2} \Psi \left(\frac{2S_u - B_u}{\sqrt{T-u}} \right) - Z_u(B_u, S_u - S_{g_u}) \right] dB_u. \quad (79)$$

(Из этого представления следует, конечно, формула (61).)

Зафиксируем $0 \leq t < T$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{g_T} \mid \mathcal{F}_t] &= \int_0^\infty \mathbf{E}[I(a < S_{g_T}) \mid \mathcal{F}_t] da = \int_0^\infty \mathbf{E}[I(T_a < g_T) \mid \mathcal{F}_t] da \\ &= \int_0^\infty \mathbf{E}[I(T_a < g_T \leq t) + I(T_a \leq t < g_T) \\ &\quad + I(t < T_a < g_T) \mid \mathcal{F}_t] da. \end{aligned} \quad (80)$$

Воспользовавшись марковским свойством броуновского движения, находим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathbf{E}[I(T_a < g_T \leq t) \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}[I(T_a < g_T < t) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{E}[I(T_a < g_T < t) \mid \mathcal{F}_t] I(T_a < t) \\ &= \mathbf{P}(\exists s_1 < s_2 < t: B_{s_1} > a, B_{s_2} = 0; \\ &\quad B_s \neq 0 \text{ для } s \in (t, T) \mid \mathcal{F}_t) I(T_a < t) \\ &= \mathbf{P}(T_a + T_0 \circ \theta_{T_a} < t \text{ и } B_s \neq 0 \text{ для } s \in (t, T) \mid \mathcal{F}_t) I(T_a < t) \\ &= \mathbf{P}_{B_t}\{\exists s \in (0, T-t): B_s \neq 0 \text{ для } s \in (0, T-t)\} I(T_a + T_0 \circ \theta_{T_a} < t) \\ &= \mathbf{P}\{T_{|B_t|} > 1-t\} I(T_a + T_0 \circ \theta_{T_a} < t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \mathbf{E}[I(T_a \leq t \leq g_T) \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}[I(T_a < t < g_T) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{E}[I(T_a < t < g_T) \mid \mathcal{F}_t] I(t > T_a) \\ &= \mathbf{P}(\exists s < t: B_s > a \text{ и } \exists s_1 \in (t, T): B_{s_1} = 0 \mid \mathcal{F}_t) I(t > T_a) \\ &= \mathbf{P}_{B_t}\{\exists s_1 \in (0, T-t): B_{s_1} = 0\} I(t > T_a) \\ &= \mathbf{P}\{T_{|B_t|} > T-t\} I(t > T_a); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad \mathbf{E}[I(t < T_a < g_T) \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbf{P}(\exists s_1, s_2: t < s_1 < s_2 < T, \\
&\quad B_{s_1} > a, B_{s_2} = 0 \mid \mathcal{F}_t) I(t < T_a) \\
&= \mathbf{P}_{B_t}(\exists s_1, s_2: 0 < s_1 < s_2 < T - t, B_{s_1} > a, B_{s_2} = 0) I(t < T_a) \\
&= \mathbf{P}_{B_t}\{\exists s \in (0, T - t): B_s = 2a\} I(t < T_a) \\
&= \mathbf{P}\{T_{2a-B_t} < T - t\} I(t < T_a).
\end{aligned}$$

Из (a), (b) и (c) получаем, что

$$\begin{aligned}
(a^*) \quad &\int_0^\infty \mathbf{E}[I(T_a < g_T \leq t) \mid \mathcal{F}_t] da \\
&= \mathbf{P}\{T_{|B_t|} > T - t\} \int_0^\infty I(T_a + T_0 \circ \theta_{T_a} < t) da \\
&= \mathbf{P}\{T_{|B_t|} > T - t\} S_{g_t} = [1 - \mathbf{P}\{T_{|B_t|} < T - t\}] S_{g_t}; \\
(b^*) \quad &\int_0^\infty \mathbf{E}[I(T_a < t < g_t) \mid \mathcal{F}_t] da = \mathbf{P}\{T_{|B_t|} < T - t\} S_t; \\
(c^*) \quad &\int_0^\infty \mathbf{E}[I(t < T_a < g_T) \mid \mathcal{F}_t] da \\
&= \int_0^\infty \mathbf{P}\{T_{2a-B_t} < T - t\} I(t < T_a) da \\
&= \int_{S_t}^\infty \int_0^{T-t} \frac{2a - B_t}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{(2a - B_t)^2}{2s}\right\} ds da \\
&= \int_0^{T-t} \int_{S_t}^\infty \frac{2a - B_t}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{(2a - B_t)^2}{2s}\right\} da ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{T-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{(2S_t - B_t)^2}{2s}\right\} ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{T-t} \varphi_s(2S_t - B_t) ds = \frac{1}{2} H(2S_t - B_t, t),
\end{aligned}$$

где $H(x, t) = \int_0^{T-t} \varphi_s(x) ds$ и $0 \leq t < T$.

Собирая соотношения (a*), (b*) и (c*) вместе, получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S_{g_T} \mid \mathcal{F}_t) &= \frac{1}{2} H(2S_t - B_t, t) + \mathbf{P}\{T_{|B_t|} < T - t\} (S_t - S_{g_t}) + S_{g_t} \\
&= \frac{1}{2} H(2S_t - B_t, t) \\
&\quad + \int_0^{T-t} \frac{|B_t|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{|B_t|^2}{2s}\right\} ds \cdot (S_t - S_{g_t}) + S_{g_t}. \quad (81)
\end{aligned}$$

Применяя формулу Ито к $H(X_t, t)$ с $X_t = 2S_t - B_t$ (процесс Бесселя порядка 3), находим, что для $t < T$

$$H(2S_t - B_t, t) = H(0, 0) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} H(X_u, u) dB_u + A_t, \quad (82)$$

где $(A_t)_{t < T}$ — процесс ограниченной вариации. Отсюда в силу (50) и (51) получаем

$$H(2S_t - B_t, t) = \sqrt{\frac{2T}{\pi}} + \int_0^t \Psi\left(\frac{2S_u - B_u}{\sqrt{T-u}}\right) dB_u + A_t, \quad (83)$$

где $(A_t)_{t < T}$ — непрерывный процесс ограниченной вариации.

Положим

$$\tilde{H}(x, t) = \int_0^{T-t} \frac{x}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-x^2/(2s)} ds \quad \left(= \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right) \right). \quad (84)$$

Применяя к $\tilde{H}(|B_t|, t)$ формулу Ито–Танака, находим, что

$$\begin{aligned} d\tilde{H}(|B_t|, t) &= \Psi\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{T-t}}\right) = -2\varphi\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{T-t}}\right) \frac{1}{\sqrt{T-t}} \operatorname{sign} B_t dB_t + d\tilde{A}_t \\ &= -2\varphi_{T-t}(B_t) \operatorname{sign} B_t dB_t + d\tilde{A}_t, \end{aligned} \quad (85)$$

где $(\tilde{A}_t)_{t < T}$ — некоторый процесс ограниченной вариации.

Тем самым, из (81), (83)–(85) находим, пренебрегая членами ограниченной вариации (ср. с рассуждениями в конце § 2*), что для $t < T$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{g_T} | \mathcal{F}_t] &= \sqrt{\frac{T}{2\pi}} + \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge T} \Psi\left(\frac{2S_u - B_u}{\sqrt{T-t}}\right) dB_u \\ &\quad - 2 \int_0^{t \wedge T} \varphi_{T-u}(B_u) \operatorname{sign} B_u \cdot (S_u - S_{g_u}) dB_u. \end{aligned} \quad (86)$$

Заметим, что $\operatorname{sign} B_u$ здесь можно опустить, поскольку если $\operatorname{sign} B_u = -1$, то $S_u - S_{g_u} = 0$. Значит,

$$\int_0^{t \wedge T} \varphi_{T-u}(B_u) \operatorname{sign} B_u \cdot (S_u - S_{g_u}) dB_u = \int_0^{t \wedge T} \varphi_{T-u}(B_u) (S_u - S_{g_u}) dB_u. \quad (87)$$

Требуемая формула (79) следует для $t < T$ из (86) и (87). В общем случае (когда $t \geq 0$) надо лишь заметить, что $\lim_{t \uparrow T} \mathbf{E}[S_{g_T} | \mathcal{F}_t] = S_{g_T}$ и пределы $\lim_{t \uparrow T}$ интегралов $\int_0^{t \wedge T} (\cdot) dB_u$ в (86) равны интегралам $\int_0^T (\cdot) dB_u$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н., Йор М. К вопросу о стохастических интегральных представлениях функционалов от броуновского движения. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 375–385.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1108 с.
3. Seshadri V. Exponential models, Brownian motion, and independence. — Canad. J. Statist., 1988, v. 16, № 3, с. 209–221.

Поступила в редакцию
5.XII.2005