Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Володин, А. А. Новиков, Локальная асимптотическая эффективность последовательного критерия отношения вероятностей при d -гарантийном различении сложных гипотез, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 2, 209–225

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:08:47

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 43

Выпуск 2, 1998 год

апрель, май, июнь

© 1998 г.

ВОЛОДИН И. Н.*, НОВИКОВ АН. А.*

ЛОКАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ОТНОШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРИ d -ГАРАНТИЙНОМ РАЗЛИЧЕНИИ СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗ¹⁾

Последовательный критерий Вальда различения двух простых гипотез $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ с границами A и B используется для различения сложных гипотез $\theta < \theta_0$ и $\theta > \theta_0$, причем параметры θ_1, θ_2, A и B подбираются таким образом, чтобы d -апостериорные вероятности ошибок не превосходили заданных ограничений β_0 и β_1 . Исследуется асимптотическое поведение границ A, B и средней длительности наблюдений, когда $\beta = \max\{\beta_0, \beta_1\} \rightarrow 0$. Проводится асимптотическое ($\beta \rightarrow 0$) сравнение $E_{\theta} \nu$ с наименьшим фиксированным числом наблюдений, необходимым для различения сложных гипотез с теми же ограничениями β_0, β_1 на d -апостериорные вероятности ошибок. Показано, что минимальный (в окрестности точки $\theta = \theta_0$) выигрыш в средней длительности наблюдений составляет 25%. Таким образом, в d -апостериорном подходе существуют последовательные критерии, которые дают выигрыш в объеме наблюдений при любом значении тестируемого параметра.

Ключевые слова и фразы: различение сложных гипотез, байесовская парадигма, d -апостериорный подход, d -гарантийность, жесткие ограничения на d -риски, регулярные статистические эксперименты, последовательные критерии, средний объем наблюдений, необходимый объем выборки, асимптотическая эффективность, винеровский процесс.

*Казанский государственный университет, Кремлевская 18, 420008 Казань, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00396.

1. Введение. Проблема d -гарантийного статистического вывода была сформулирована в конце 70-х годов (см. сообщение [9] и обзор [5] с библиографией по этому вопросу) и применительно к задаче различения сложных гипотез $H_0: \theta \leq \theta_0$ и $H_1: \theta > \theta_0$ о параметре θ распределения наблюдаемой случайной величины состоит в следующем. Параметр θ трактуется как реализация случайной величины с некоторым априорным распределением (байесовский подход). Задача состоит в построении критерия, гарантирующего заданные ограничения β_0 и β_1 на d -апостериорные вероятности ошибочных решений (так называемые d -риски): условная вероятность справедливости гипотезы H_i при условии, что принята H_{1-i} , не должна превосходить β_i , $i = 0, 1$; при этом мы стремимся минимизировать среднее число испытаний.

В d -апостериорном подходе проблема гарантийности, в отличие от классического подхода, решается очень просто с помощью так называемой процедуры первого перескока. В контексте задачи различения двух гипотез эта процедура состоит в проведении наблюдений до тех пор, пока апостериорная вероятность справедливости H_0 не выйдет из интервала $(\beta_0, 1 - \beta_1)$ (см. более подробно об этой процедуре в обзоре [5]). Результаты статистического моделирования показывают, что процедура первого перескока обладает чрезвычайно высокой безусловной вероятностью остановки эксперимента на первом шаге, но в окрестности точки $\theta = \theta_0$ средняя длительность наблюдений $E_{\theta} \nu$ неограниченно возрастает, что, по-видимому, говорит о бесконечности $E_{\theta_0} \nu$. Различные оптимальные свойства этой процедуры получены в [16] в схеме «стягивающихся априори», когда априорное распределение имеет высокую степень концентрации в окрестности граничной точки θ_0 . Отметим также работу [23], в которой данная процедура используется для различения гипотез о коэффициенте линейного сноса винеровского процесса вне рамок d -апостериорного подхода, с точки зрения ее оптимальности при функции потерь

$$L(\theta, d; t) = I\{\theta \leq 0, d = 1\} + I\{\theta > 0, d = 0\} + c\theta^2 t,$$

где $I\{\cdot\}$ — индикаторная функция.

Внимание к процедуре первого перескока связано в первую очередь с тем, что структура его правила принятия решения (принимается та гипотеза, апостериорная вероятность которой превышает определенный уровень) соответствует оптимальному объему наблюдений. Этот общий результат Симушкина [18], касающийся характеристики правил принятия решений d -гарантийных процедур с оптимальной длительностью наблюдений, позволяет строить критерии, соответствующие необходимому объему выборки (НОВ) — наименьшему числу наблюдений, при котором существует критерий, гарантирующий заданные ограничения β_0, β_1 на d -апостериорные вероятности ошибочных решений (d -риски). Асимптотика НОВ в схеме «стягивающихся априори» исследована

в работе авторов [6], а в случае жестких ограничений на d -риски ($\beta = \max(\beta_0, \beta_1) \rightarrow 0$) — в [8]. Обзор асимптотик НОВ в d -апостериорном подходе содержится в работе авторов [7] (представлено к печати).

Основной результат в рамках d -апостериорного подхода, относящийся к асимптотике НОВ $n^* = n^*(\beta_0, \beta_1)$, состоит в том, что $n^* \sim c\beta^{-2}$ при $\beta \rightarrow 0$. Представляет интерес поведение средней длительности наблюдений последовательных d -гарантийных критериев. В сообщении [26] был отмечен следующий результат, носящий эвристический характер.

Рассмотрим задачу различения гипотез H_0 и H_1 , когда θ — среднее значение нормального распределения и априорное распределение θ также нормально. Возьмем критерий Вальда различения двух простых гипотез $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ с границами A и B области продолжения эксперимента и, используя приближенные ($\theta_1 - \theta_2 \rightarrow 0$) формулы для оперативной характеристики, подберем θ_1, θ_2, A и B таким образом, чтобы d -риски этого критерия не превосходили заданных β_0 и β_1 . Подобрав постоянные, воспользуемся вальдовской аппроксимацией для $E_\theta \nu$. Удивительно то, что $E_\theta \nu \sim c\beta^{-1}$, если $\theta \neq \theta_0$ и $E_{\theta_0} \nu \sim c\beta^{-2}$. По-видимому, в рамках d -апостериорного подхода существуют последовательные критерии, которые, в отличие от классического (небайесовского) подхода, сокращают на порядок среднюю длительность наблюдений.

Чтобы придать строгость этому эвристическому результату, естественно рассмотреть задачу различения гипотез о коэффициенте θ линейного сноса винеровского процесса. Результаты в этом направлении, подтверждающие качественные выводы сообщения [26], содержатся в первом пункте настоящей работы и представляют развернутое изложение сообщения [4]. Отметим, что правило принятия решения этого критерия имеет структуру оптимального правила с точки зрения d -апостериорного подхода, поскольку семейство распределений винеровского процесса со сносом обладает монотонным (относительно траекторий) отношением правдоподобия (более подробно о структуре оптимальных решающих правил в d -апостериорном подходе к проблеме гарантийности см. [19], а также § 2 обзора [5]).

С учетом всего сказанного имеет смысл рассмотреть критерий Вальда, подбирая две из постоянных θ_1, θ_2, A, B по заданным ограничениям β_0, β_1 на d -риски и оптимизируя длительность наблюдений по оставшимся параметрам. В пунктах 2–4 данной работы мы исследуем асимптотическое поведение характеристик такого критерия, когда $\beta = \max(\beta_0, \beta_1) \rightarrow 0$. Техника асимптотического анализа та же, что и в статье [8], — по существу накладываются только условия локальной асимптотической нормальности статистического эксперимента (см. [12]). Логарифм отношения правдоподобия заменяется статистикой вклада, которая аппроксимируется винеровским процессом, при этом влияние параметров θ_1 и θ_2 нивелируется (оптимизация по ним невозможна), и асим-

птотический анализ средней длительности наблюдений $E_{\theta}\nu$ проводится лишь в окрестности точки $\theta = \theta_0$. Естественно, при этом $E_{\theta}\nu$ имеет порядок β^{-2} , и поскольку НОВ n^* имеет тот же порядок, мы имеем возможность исследовать асимптотическую эффективность $\mathcal{E}(\theta) = E_{\theta}\nu/n^*$ при $\beta \rightarrow 0$, $\theta - \theta_0 = O(\beta)$.

Оказывается, предельное значение $\mathcal{E}(\theta)$ в точке $\theta = \theta_0$, соответствующее наименьшему выигрышу в средней длительности наблюдений, равно 0.755. Таким образом, в отличие от классического подхода (см. [3]) последовательный критерий *равномерно* лучше критерия, основанного на фиксированном числе наблюдений (см. в связи с этим [11], где решается задача минимизации $\sup_{\theta} E_{\theta}\nu$). Следует отметить также, что в нашем случае $E_{\theta}\nu \sim c[\beta(\theta - \theta_0)]^{-1}$, что, по-видимому, говорит об асимптотике $E_{\theta}\nu = O(\beta^{-1})$ при θ , далеких от граничной точки θ_0 (см. [26], [4] и пункт 1 настоящей работы). Представляется, что строгое обоснование этого утверждения возможно с помощью техники больших уклонений, развиваемой в [2], или с помощью асимптотических разложений Лотова [15], [24], оправдав возможность почленного интегрирования этих разложений (см. п. 3 данной работы).

2. Различение гипотез о сносе винеровского процесса с жесткими ограничениями на d -риски. Для винеровского процесса с линейным сносом $Z(t) = w(t) + \theta t$, где $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, различаются две гипотезы $H_0: \theta \leq 0$ и $H_1: \theta > 0$. Предполагается, что значение θ в эксперименте есть реализация случайной величины ϑ с функцией плотности

$$g(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(\theta - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Рассмотрим оптимальный для данной задачи последовательный критерий с моментом остановки $\tau = \inf\{t \geq 0: Z(t) \notin (-A, B)\}$. Подберем границы A, B по заданным ограничениям β_0, β_1 на d -риски. Известно [13, § 16.6.4, с. 427], что оперативная характеристика этого критерия

$$L(\theta) = P_{\theta}\{Z(\tau) \leq -A\} = \frac{1 - e^{-2\theta B}}{e^{-2\theta A} - e^{-2\theta B}}.$$

Поэтому постоянные A и B определяются по заданным β_0 и β_1 из уравнений

$$P\{\vartheta \leq 0 \mid Z(t) \geq B\} = \frac{\int_{-\infty}^0 (1 - L(\theta)) g(\theta) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} (1 - L(\theta)) g(\theta) d\theta} = \beta_0,$$

$$P\{\vartheta > 0 \mid Z(t) \leq -A\} = \frac{\int_0^{\infty} L(\theta) g(\theta) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} L(\theta) g(\theta) d\theta} = \beta_1.$$

Подставляя имеющееся выражение для $L(\theta)$, получаем, что данная система эквивалентна следующей:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-2\theta B} \frac{1 - e^{-2\theta A}}{1 - e^{-2\theta(A+B)}} \exp \left\{ -\frac{(\theta + \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} d\theta = \frac{\Phi(\mu/\sigma) - \beta_1}{1 - \beta_0 - \beta_1} \beta_0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-2\theta A} \frac{1 - e^{-2\theta B}}{1 - e^{-2\theta(A+B)}} \exp \left\{ -\frac{(\theta - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} d\theta = \frac{\Phi(-\mu/\sigma) - \beta_0}{1 - \beta_0 - \beta_1} \beta_1.$$

Поскольку

$$1 - e^{-2\theta A} \leq \frac{1 - e^{-2\theta A}}{1 - e^{-2\theta(A+B)}} \leq 1,$$

то асимптотически ($\max(\beta_0, \beta_1) \rightarrow 0$) точные (по порядку) верхние границы A и B определяются системой уравнений

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-2\theta B} \exp \left\{ -\frac{(\theta + \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} d\theta = \frac{\Phi(\mu/\sigma) - \beta_1}{1 - \beta_0 - \beta_1} \beta_0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-2\theta A} \exp \left\{ -\frac{(\theta - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} d\theta = \frac{\Phi(-\mu/\sigma) - \beta_0}{1 - \beta_0 - \beta_1} \beta_1. \quad (2)$$

Левая часть (1) равна

$$J_0 = e^{2\mu B + 2\sigma^2 B^2} \left[1 - \Phi \left(\frac{2\sigma^2 B - \mu}{\sigma} \right) \right],$$

и поскольку

$$1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}$$

при любом $x > 0$, то

$$J_0 \leq \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}(2\sigma^2 B - \mu)} \exp \left\{ -\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Аналогично устанавливается, что левая часть (2)

$$J_1 \leq \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}(2\sigma^2 A - \mu)} \exp \left\{ -\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Таким образом, $A \leq c_1/\beta_1$, $B \leq c_0/\beta_0$ с некоторыми постоянными c_0 , c_1 , которые легко находятся из предыдущих неравенств для J_0 и J_1 .

Обратимся теперь к асимптотическому анализу средней длительности $E_{\theta}\tau$ при $\beta = \max(\beta_0, \beta_1) \rightarrow 0$. Из [13] имеем

$$E_{\theta}\tau = \frac{Be^{\theta(A+B)} + Ae^{-\theta(A+B)} - (A+B)e^{\theta(B-A)}}{\theta(e^{\theta(A+B)} - e^{-\theta(A+B)})}.$$

Легко видеть, что $E_{\theta}\tau \leq B/\theta$, если $\theta > 0$, и $E_{\theta}\tau \leq -A/\theta$, если $\theta < 0$. Так как все полученные границы для $A, B, E_{\theta}\tau$ точны по порядку, то $E_{\theta}\tau \asymp \beta^{-1}$, если $\theta \neq 0$.

Как следует из результатов [8] в классе моментов остановки $\tau = t = \text{const}$ наименьшее t , гарантирующее существование критерия с заданными β_0 и β_1 имеет порядок β^{-2} при $\beta \rightarrow 0$. Таким образом, переход к последовательным процедурам *сокращает на порядок* среднюю длительность наблюдений, если только истинное значение θ не совпадает с границей различаемых гипотез ($\theta \neq 0$). Однако, если $\theta \rightarrow 0$ так, что $\theta(A+B) \rightarrow 0$, то $E_{\theta}\tau \sim AB = c\beta^{-2}$. Тем не менее, как будет показано ниже, у последовательных процедур постоянная c перед β^{-2} меньше, чем у процедур с фиксированным объемом наблюдений.

Представляет интерес асимптотическое поведение безусловной средней длительности наблюдений

$$E\tau = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\theta}\tau g(\theta) d\theta.$$

Для простоты рассмотрим случай $\beta_0 = \beta_1 (= \beta)$, $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Тогда $A = B$ и, как было показано выше, $A \asymp \beta^{-1}$.

Предложение 1. Если $\beta \rightarrow 0$, то безусловное среднее

$$E\tau = O(\beta^{-1} \ln \beta).$$

Доказательство. В нашем «симметричном» случае

$$E\tau = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\text{th } A\theta}{\theta} e^{-\theta^2/2} d\theta = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\text{th } t}{t} e^{-t^2/2A^2} dt.$$

Разобьем этот интеграл на три по промежуткам $[0, 1]$, $[1, A]$ и $[A, \infty)$. Интеграл по отрезку $[0, 1]$ не превосходит

$$\frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{\text{th } t}{t} dt = O(\beta^{-1}).$$

Тот же порядок имеет интеграл по промежутку $[A, \infty)$. Действительно, при $t \in [A, \infty)$ функция $t^{-1} \text{th } t \leq A^{-1}$, так что интеграл по этому промежутку не превосходит

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_A^{\infty} e^{-t^2/2A^2} dt \leq 2A = O(\beta^{-1}).$$

Порядок $E\tau$, указанный в предложении 1, дает интеграл по отрезку $[1, A]$. На этом отрезке функции $\text{th } t$ и $e^{-t^2/2A^2}$ ограничены и отделены от нуля. Поэтому порядок интеграла определяет величина

$$\frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \int_1^A \frac{dt}{t} = O(\beta^{-1} \ln \beta).$$

Таким образом, безусловное среднее длительности наблюдений у последовательного критерия также имеет меньший порядок роста при $\beta \rightarrow 0$, чем у любой процедуры, основанной на фиксированном числе наблюдений.

В следующих параграфах мы исследуем асимптотику A , B и средней длительности наблюдений последовательного критерия Вальда в случае дискретного времени. При этом будет использоваться локальная теория аппроксимации логарифма отношения правдоподобия винеровским процессом, что позволит установить асимптотику средней длительности наблюдений только в окрестности границы различаемых гипотез.

3. Последовательный критерий Вальда для различения сложных гипотез: аппроксимация винеровским процессом. Рассматривается задача различения двух сложных гипотез $H_0: \theta \leq \theta_0$ и $H_1: \theta > \theta_0$ о скалярном параметре θ , индексирующем семейство распределений $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ наблюдаемой случайной величины X с функцией плотности $f(x | \theta)$ относительно некоторой σ -конечной меры μ , $\theta \in \Theta \subseteq \mathbf{R}$. Предполагается, что значение θ при наблюдении X есть реализация случайной величины ϑ с известным распределением G , имеющем плотность $g(\theta)$ по мере Лебега.

Требуется построить процедуру различения гипотез H_0 и H_1 , гарантирующую заданные ограничения β_0 и β_1 на соответствующие d -риски — условные вероятности $\mathbf{P}\{\vartheta \leq \theta_0 \mid \text{принята } H_1\}$ и $\mathbf{P}\{\vartheta > \theta_0 \mid \text{принята } H_0\}$. Для этой цели предлагается использовать известный последовательный критерий Вальда различения двух простых гипотез, выбирая параметры, определяющие критерий, таким образом, чтобы выполнялись заданные ограничения β_0, β_1 на указанные условные вероятности.

Пусть θ_1 и θ_2 — две точки из Θ (простые гипотезы) и a, b — некоторые положительные числа. Если наблюдается последовательность $X_1, X_2, \dots$ независимых копий X , то критерий Вальда определяется моментом остановки

$$\nu = \min \left\{ n: L_n(X^{(n)}) = \sum_1^n \ln \frac{f(X_k | \theta_2)}{f(X_k | \theta_1)} \notin (-a, b) \right\}$$

и следующим правилом принятия решения: гипотеза $H_0: \theta \leq \theta_0$ принимается, если $L_\nu(X^{(\nu)}) \leq -a$, а если $L_\nu(X^{(\nu)}) \geq b$, то принимается $H_1: \theta > \theta_0$.

Пусть

$$L(\theta) = L(\theta | \theta_1, \theta_2, a, b) = \mathbf{P}\{L_\nu(X^{(\nu)}) \leq -a \mid \theta\}$$

— оперативная характеристика этого критерия. Постоянные θ_1, θ_2, a и b

d -гарантийного критерия должны удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\vartheta \leq \theta_0 \mid L_\nu(X^{(\nu)}) \geq b\} &= \frac{\int_{-\infty}^{\theta_0} (1 - L(\theta)) g(\theta) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} (1 - L(\theta)) g(\theta) d\theta} \leq \beta_0, \\ \mathbf{P}\{\vartheta > \theta_0 \mid L_\nu(X^{(\nu)}) \leq -a\} &= \frac{\int_{\theta_0}^{\infty} L(\theta) g(\theta) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} L(\theta) g(\theta) d\theta} \leq \beta_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку число свободных параметров больше, чем число ограничений, то избыточные параметры могут быть использованы для минимизации некоторых функционалов от $\mathbf{E}_\theta \nu$. Естественно, явные формулы для параметров критерия в общем случае получить невозможно, поэтому мы будем использовать асимптотики $L(\theta)$ и $\mathbf{E}_\theta \nu$ при $\theta_2 - \theta_1 \rightarrow 0$ (так называемый асимптотический анализ в схеме сближающихся гипотез).

Пусть ε — некоторое малое положительное число. Выберем θ_1 и θ_2 в окрестности граничной точки θ_0 , полагая $\theta_i = \theta_0 + \varepsilon u_i$, $i = 1, 2$, $u_2 > 0 > u_1$. При выполнении стандартных условий регулярности статистического эксперимента разложение $\ln f(X_k \mid \theta_0 + \varepsilon u)$ в ряд Тейлора по степеням ε до членов порядка ε^2 дает приближенный ($\varepsilon \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$) последовательный критерий с областью продолжения наблюдений

$$-a < \varepsilon S_n - n I_0 \varepsilon^2 \frac{u_2 + u_1}{2} < b, \quad (4)$$

где

$$S_n = \sum_1^n \frac{\partial \ln f(X_k \mid \theta_0)}{\partial \theta}$$

— так называемая статистика вклада, $I_0 = I(\theta_0)$ — информация по Фишеру в точке θ_0 .

Следующий шаг состоит в аппроксимации случайной последовательности $\{\varepsilon S_n - n \varepsilon^2 (u_2 + u_1) I_0 / 2, n = 1, 2, \dots\}$ винеровским процессом с линейным сносом в предположении, что $X_1, X_2, \dots$ — случайная последовательная выборка из распределения с плотностью $f(x \mid \theta_0 + \varepsilon u)$. Для этого потребуется выполнение стандартных условий регулярности статистического эксперимента.

(A1) Семейство $\mathcal{E} = \{P(\cdot \mid \theta), \theta \in \Theta\}$ распределений наблюдаемой случайной величины регулярно в смысле [12, § 1.7], то есть

- а) для μ -п.в. x плотность $f(x \mid \theta)$ есть непрерывная функция на Θ ;
- б) функция $f^{1/2}(\cdot \mid \theta)$ дифференцируема в каждой точке $\theta \in \Theta$ в $L_2(\mu)$ (имеет конечную информацию Фишера $I(\theta)$ при любом $\theta \in \Theta$);
- в) производная в среднем квадратическом функции $f^{1/2}(\cdot \mid \theta)$ непрерывна в $L_2(\mu)$.

Пусть $Z_\varepsilon = Z_\varepsilon(t)$ — ступенчатая функция, принимающая значения εS_n , если $n \varepsilon^2 \leq t < (n+1) \varepsilon^2$, $n = 1, 2, \dots$, и $Z_\varepsilon(t) = 0$ при $0 \leq t < \varepsilon^2$. Пусть далее $D[0, T]$ — пространство Скорохода и $\rho(x, y) =$

$\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|$ — равномерная метрика в этом пространстве для любых $x, y \in D[0, T]$.

Введем винеровский процесс с линейным сносом $Z = Z(t) = \sqrt{I_0}w(t) + utI_0$, где $I_0 = I(\theta_0)$, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс. Следующее предложение непосредственно вытекает из теоремы 11 монографии [22].

Предложение 2. Пусть последовательный случайный выбор $X_1, X_2, \dots$ осуществляется из распределения $P_\epsilon = P_{\theta_0 + u\epsilon}$. При выполнении условий регулярности (A1) распределение случайного процесса Z_ϵ в пространстве $\langle D[0, T], \rho \rangle$ сходится слабо при $\epsilon \rightarrow 0$ к распределению винеровского процесса Z .

Предложение 2 показывает, что последовательность статистик $\epsilon S_n - n\epsilon^2(u_1 + u_2)I_0/2$, $n = 1, 2, \dots$, может быть аппроксимирована винеровским процессом с коэффициентом сноса $(u - (u_1 + u_2)/2)I_0$. Как будет видно в дальнейшем (см. «предельную» оперативную характеристику в предложении 3, а также теорему 1), необходимо положить $u_1 + u_2 = 0$ — в противном случае один из d -рисков этого критерия не будет стремиться к нулю ни при каком выборе границ a и b . Этим же обстоятельством объясняется выбор момента остановки при построении последовательного критерия для различения гипотез о коэффициенте сноса винеровского процесса в п. 1 данной статьи. Таким образом, асимптотическое решение нашей задачи игнорирует выбор θ_1 и θ_2 как дополнительных параметров для оптимизации момента остановки.

4. Аппроксимация границ для области продолжения; асимптотическая d -гарантийность последовательного критерия. Итак, рассмотрим последовательный критерий с моментом остановки

$$\nu_\epsilon = \min \{n: \epsilon S_n \notin (-a, b)\}. \quad (5)$$

Вывод приближенных формул для границ a и b начнем с аппроксимации оперативной характеристики последовательного критерия с моментом остановки (5). Из предложения 2 немедленно следует

Предложение 3. При выполнении условия (A1) для оперативной характеристики $L_\epsilon(\theta)$ последовательного критерия с моментом остановки ν_ϵ справедливо асимптотическое ($\epsilon \rightarrow 0$) представление

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} L_\epsilon(\theta_0 + u\epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon\{\epsilon S_{\nu_\epsilon} \leq -a\} = P\{Z(\tau) \leq -a\} \\ &= \frac{1 - e^{-2ub}}{e^{2ua} - e^{-2ub}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $Z(t) = \sqrt{I_0}w(t) + utI_0$ и момент остановки $\tau = \inf\{t: Z(t) \notin (-a, b)\}$.

Доказательство. Пусть A — множество функций из $D[0, T]$, которые впервые выходят из полосы $\{(x, y): -a < y < b\}$ через нижнюю

границу $-a$. В силу теоремы 2.1 главы 1 [1] для доказательства (6) достаточно показать, что $P\{Z(\cdot) \in \partial A\}$, где ∂A — граница множества A в равномерной метрике (см. предложение 2). Однако этот факт установлен в работе [25] при доказательстве теоремы 2 (с. 123). Наконец, последнее равенство в (6), дающее формулу для предельной оперативной характеристики, содержится в справочнике [13].

Для того, чтобы последовательный критерий с моментом остановки ν_ε удовлетворял заданным ограничениям β_0, β_1 на соответствующие d -риски, необходимо выполнение неравенств

$$P\{\vartheta \leq \theta_0 \mid \varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \geq b\} \leq \beta_0, \quad P\{\vartheta > \theta_0 \mid \varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \leq -a\} \leq \beta_1,$$

левые части которых записываются через интегралы от оперативной характеристики $L_\varepsilon(\theta)$ по аналогии с (3). Наша ближайшая задача — исследовать асимптотическое ($\varepsilon \rightarrow 0$) поведение этих интегралов:

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\theta_0} (1 - L_\varepsilon(\theta)) g(\theta) d\theta, \quad J_1 = \int_{\theta_0}^{\infty} L_\varepsilon(\theta) g(\theta) d\theta. \quad (7)$$

Для этого нам потребуется наложить дополнительные условия на функции плотности f и g .

(A2) Существуют такие функция $\lambda(u, \varepsilon)$ и число ε_0 , что при любых $u \neq 0$ и $a > 0$

$$E_\varepsilon \exp \left\{ -\operatorname{sgn}(u) \lambda(u, \varepsilon) \varepsilon \frac{\partial \ln f(X \mid \theta_0)}{\partial \theta} \right\} < 1 \quad (8)$$

и при $M \rightarrow \infty$

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \int_{\{|u| > M\}} e^{-\lambda(u, \varepsilon)a} g(\theta_0 + u\varepsilon) du \rightarrow 0. \quad (9)$$

Эти условия, несмотря на кажущуюся сложность, достаточно просто проверяются для наиболее распространенных параметрических семейств. Так, для экспоненциального семейства с функцией плотности $f(x \mid \theta) = \exp\{T(x)\theta + \mu(\theta) + h(x)\}$ условие (8) выполняется при $\lambda(u, \varepsilon) = |u|$, если информация по Фишеру $I(\theta) > 0$ при всех θ . Действительно, легко проверить, что при таком выборе λ левая часть (8) равна $\exp\{\mu(\theta_0 + u\varepsilon) - \mu(\theta_0) - u\varepsilon\mu'(\theta_0)\} = \exp\{\mu''(\theta_{cp})(u\varepsilon)^2/2\}$. Поскольку $\mu''(\theta) = -I(\theta) < 0$, то условие (8) выполняется при $u \neq 0$. Условие (9) в этом случае имеет вид

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \int_{\{|u| > M\}} e^{-|u|a} g(\theta_0 + u\varepsilon) du \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty,$$

и выполняется, если, например, плотность g — ограниченная функция.

Условия (8) и (9) обеспечивают равномерную сходимость интегралов J_0 и J_1 (см. формулы (7)).

Лемма 1. При выполнении условий (A2)

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \int_{\{u > M\}} P_\varepsilon \{ \varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \leq -a \} g(\theta_0 + u\varepsilon) du = 0,$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \int_{\{u < -M\}} P_\varepsilon \{ \varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \geq b \} g(\theta_0 + u\varepsilon) du = 0.$$

Доказательство проведем для первого равенства, второе доказывается аналогично.

В силу неравенства Чебышева для любого $\lambda > 0$

$$P_\varepsilon \{ \varepsilon S_{\nu_\varepsilon} < -a \} \leq e^{-\lambda a} E_\varepsilon \exp \{ -\lambda \varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \}. \quad (10)$$

Покажем, что при выборе $\lambda = \lambda(u, \varepsilon)$ из условий (A2) последовательность $\{ \exp \{ -\lambda \varepsilon S_n \}, n = 1, 2, \dots \}$ образует супермартингал относительно последовательности σ -алгебр $\mathcal{F}_n$, порожденных случайными величинами $X_1, \dots, X_n$, и вероятностью P_ε^n . Действительно, в силу условия (9) при $\lambda = \lambda(u, \varepsilon)$ условное математическое ожидание

$$\begin{aligned} E_\varepsilon \{ \exp \{ -\lambda \varepsilon S_n \} \mid \mathcal{F}_{n-1} \} &= \exp \{ -\lambda \varepsilon S_{n-1} \} E_\varepsilon \exp \left\{ -\lambda \varepsilon \frac{\partial \ln f(X_n \mid \theta_0)}{\partial \theta} \right\} \\ &< \exp \{ -\lambda \varepsilon S_{n-1} \}. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь известной теоремой Дуба (см. [20, с. 477, гл. 7, § 2, теорема 1]) о сохранении свойства мартингалности при замене времени на случайный момент остановки. В силу этой теоремы

$$E_\varepsilon \exp \{ -\lambda \varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \} \leq E_\varepsilon \exp \{ -\lambda \varepsilon S_1 \}, \quad (11)$$

если выполняются два условия

$$E_\varepsilon \exp \{ -\lambda \varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \} < \infty \quad \text{и} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\{\nu_\varepsilon > n\}} \exp \{ -\lambda \varepsilon S_n \} dP_\varepsilon = 0.$$

Первое из этих условий имеет место, так как при $u \neq 0$

$$\begin{aligned} E_\varepsilon \exp \{ -\lambda \varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_\varepsilon [\exp \{ -\lambda \varepsilon S_n \} I_{\{\nu_\varepsilon = n\}}] \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} [E_\varepsilon \exp \{ -\lambda \varepsilon S_1 \}]^n < \infty, \end{aligned}$$

где последнее неравенство выполняется в силу (8). Что же касается второго условия, то

$$\begin{aligned} \int_{\{\nu_\varepsilon > n\}} \exp \{ -\lambda \varepsilon S_n \} dP_\varepsilon &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{\{\nu_\varepsilon = k\}} \exp \{ -\lambda \varepsilon S_n \} dP_\varepsilon \\ &\leq \exp \{ \lambda a \} P_\varepsilon \{ \nu_\varepsilon > n \} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в силу коечности момента остановки ν_ε , которая следует из стандартных в данной ситуации рассуждений (см. [3], а также доказательство предложения 4 ниже).

Итак, оба условия теоремы Дуба выполняются, и поэтому в силу (10), (11), а также условия (8)

$$P_\varepsilon\{\varepsilon S_{\nu_\varepsilon} < -a\} \leq e^{-\lambda a} E_\varepsilon \exp\{-\lambda \varepsilon S_1\} < e^{-\lambda a},$$

откуда

$$\begin{aligned} & \sup_{\varepsilon > 0} \int_{\{u > M\}} P_\varepsilon\{\varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \leq -a\} g(\theta_0 + u\varepsilon) du \\ & \leq \sup_{\varepsilon > 0} \int_{\{u > M\}} \exp\{-\lambda(u, \varepsilon)a\} g(\theta_0 + u\varepsilon) du \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $M \rightarrow \infty$ в силу условия (9).

Доказанная лемма позволяет находить асимптотическое поведение интегралов J_0 и J_1 с помощью подстановки в (7) вместо $L_\varepsilon(\theta)$ ее асимптотического представления (6).

Предложение 4. Пусть выполняются условия (A1)–(A2) и $g(\theta)$ непрерывна в точке $\theta = \theta_0$. Тогда

$$J_0 = \varepsilon g(\theta_0) \int_0^\infty \frac{1 - e^{-2ua}}{e^{2ub} - e^{-2ua}} du + o(\varepsilon), \quad (12)$$

$$J_1 = \varepsilon g(\theta_0) \int_0^\infty \frac{1 - e^{-2ub}}{e^{2ua} - e^{-2ub}} du + o(\varepsilon). \quad (13)$$

Доказательство. Сделаем замену $\theta = \theta_0 + u\varepsilon$ в интеграле J_0 :

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_{-\infty}^{\theta_0} (1 - L_\varepsilon(\theta)) g(\theta) d\theta = \varepsilon \int_{-\infty}^0 (1 - L_\varepsilon(\theta_0 + u\varepsilon)) g(\theta_0 + u\varepsilon) du \\ &= \varepsilon \int_{-\infty}^0 P_\varepsilon\{\varepsilon S_{\nu_\varepsilon} > b\} g(\theta_0 + u\varepsilon) du. \end{aligned}$$

В силу предложения 3 и непрерывности $g(\theta)$ в точке θ_0 подынтегральная функция сходится к пределу $(e^{2ua} - 1)(e^{2ua} - e^{-2ub})^{-1} g(\theta_0)$, и лемма 1 обеспечивает возможность перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ под знаком интеграла. Поэтому

$$J_0 = \varepsilon g(\theta_0) \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2ua} - 1}{e^{2ua} - e^{-2ub}} du + o(\varepsilon),$$

и замена u на $-u$ дает интеграл в (12).

Аналогично доказывается представление (13).

Обратимся теперь к выводу асимптотических формул для a и b , когда ограничения β_0 и β_1 стремятся к нулю с одинаковой скоростью: $\beta_0 = \varepsilon b_0$, $\beta_1 = \varepsilon b_1$, где b_0 и b_1 — фиксированные положительные числа и $\varepsilon \rightarrow 0$.

О п р е д е л е н и е. Критерий φ_ε с решающей функцией δ_ε называется асимптотически ($\varepsilon \rightarrow 0$) d -гарантийным, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\{\vartheta \leq \theta_0 \mid \delta_\varepsilon = d_1\} \beta_0^{-1} \leq 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\{\vartheta > \theta_0 \mid \delta_\varepsilon = d_0\} \beta_1^{-1} \leq 1.$$

Более подробно о вопросе d -гарантийности см. [5].

Теорема 1. Пусть выполнены условия (A1)–(A2), $g(\theta)$ непрерывна в точке θ_0 , $g_0 = g(\theta_0) > 0$ и $\beta_i < G_i$, $i = 0, 1$, где $G_0 = P\{\vartheta \leq \theta_0\}$, $G_1 = 1 - G_0$. Тогда критерий с моментом остановки $\nu = \min\{n: S_n \leq -A \text{ или } S_n \geq B\}$, где A и B — решение системы уравнений

$$g_0 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-2uA}}{e^{2uB} - e^{-2uA}} du = \frac{G_1 - \beta_1}{1 - \beta_0 - \beta_1} \beta_0,$$

$$g_0 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-2uB}}{e^{2uA} - e^{-2uB}} du = \frac{G_0 - \beta_0}{1 - \beta_0 - \beta_1} \beta_1 \quad (14)$$

асимптотически ($\max\{\beta_0, \beta_1\} \rightarrow 0$) d -гарантиен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательный критерий с моментом остановки ν_ε будет d -гарантийным, если выбрать границы a и b из условия (см. (3), (8))

$$\frac{J_0}{J_0 + G_1 - J_1} \leq \beta_0, \quad \frac{J_1}{J_1 + G_0 - J_0} \leq \beta_1.$$

Подставим вместо J_0 и J_1 их асимптотические выражения (12) и (13) и сделаем замену $u\varepsilon = t$ в обоих интегралах. Если теперь положить $A = a/\varepsilon$, $B = b/\varepsilon$, то получим утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Интеграл

$$I(A, B) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-2uA}}{e^{2uB} - e^{-2uA}} du$$

выражается через ψ -функцию Эйлера

$$I(A, B) = \frac{1}{2(A+B)} \left[\psi(1) - \psi\left(\frac{B}{A+B}\right) \right], \quad (15)$$

где $\psi(1) = -C \approx -0.577216$, C — постоянная Эйлера (см. [10, с. 319,

3.311.11]). Используя известное разложение ψ -функции (см. [10, с. 975, 8.362.1])

$$\psi(x) = -C - \frac{1}{x} + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(x+k)},$$

получаем удобную в вычислительном отношении систему уравнений, определяющую границы A и B :

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} - \frac{B}{A+B} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(B+k(A+B))} &= \frac{2\beta_0(G_1 - \beta_1)}{g(\theta_0)(1 - \beta_0 - \beta_1)}, \\ \frac{1}{A} - \frac{A}{A+B} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(A+k(A+B))} &= \frac{2\beta_1(G_0 - \beta_0)}{g(\theta_0)(1 - \beta_0 - \beta_1)}. \end{aligned}$$

Из этой же системы легко видеть, что $A = O(\beta_1^{-1})$ и $B = O(\beta_0^{-1})$ при $\beta_0 \rightarrow 0$ и $\beta_1 \rightarrow 0$.

5. Асимптотика средней длительности наблюдений. Изучим теперь поведение $E_\theta \nu$ в окрестности точки $\theta = \theta_0$.

Предложение 5. При выполнении условия (A1) распределение нормированного момента остановки $\varepsilon^2 \nu_\varepsilon$ слабо сходится к распределению момента остановки $\tau = \inf\{t: Z(t) \notin (-a, b)\}$ винеровского процесса $Z(t)$, если $\theta = \theta_0 + u\varepsilon$ и $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, имеет место асимптотическое представление

$$E_\varepsilon \nu_\varepsilon = \varepsilon^{-2} E\tau + o(\varepsilon^{-2}). \quad (16)$$

Доказательство. Так как $\varepsilon^2 \nu_{\varepsilon, T} = \min\{T, \varepsilon^2 \nu_\varepsilon\}$ есть непрерывный в метрике ρ (см. предложение 1) функционал на пространстве $D[0, T]$, то $\varepsilon^2 \nu_{\varepsilon, T} \Rightarrow \tau_T = \min\{T, \tau\}$, $\varepsilon \rightarrow 0$, в силу предложения 2.

Покажем теперь, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$

$$\sup_{\varepsilon < \varepsilon_0} P_\varepsilon\{\varepsilon^2 \nu_\varepsilon > T\} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad P\{\tau > T\} \rightarrow 0,$$

если $T \rightarrow \infty$. То, что $P\{\tau > T\} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ — известный факт (см., например, [13, § 16.6.4, с. 426–427]), а для вероятности $P_\varepsilon\{\varepsilon^2 \nu_\varepsilon > T\}$ получим экспоненциальную (по T) равномерную (по ε) оценку, используя стандартный для данной ситуации метод разбиения суммы случайных величин на «пачки» растущего ($\varepsilon \rightarrow 0$) размера (см. [3, п. 1 приложений, с. 202–203]):

$$\begin{aligned} P_\varepsilon\{\varepsilon^2 \nu_\varepsilon > T\} &\leq P_\varepsilon\{-a < \varepsilon S_{[k\varepsilon^{-2}]} < b, k = 1, 2, \dots, [T]\} \\ &\leq P_\varepsilon^{[T]}\{-a - b < \varepsilon S_{[\varepsilon^{-2}]} < a + b\}. \end{aligned}$$

Поскольку (см. доказательство предложения 2)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}_\varepsilon \{-a - b < \varepsilon S_{\varepsilon^{-2}} < a + b\} = \Phi \left(\frac{a + b - u I_0}{\sqrt{I_0}} \right) - \Phi \left(\frac{-a - b - u I_0}{\sqrt{I_0}} \right) = q < 1,$$

то для любого q_1 с $q < q_1 < 1$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что

$$\sup_{\varepsilon < \varepsilon_0} \mathbf{P}_\varepsilon \{\varepsilon^2 \nu_\varepsilon > T\} < q_1^{[T]} \rightarrow 0 \quad (17)$$

при $T \rightarrow \infty$.

Таким образом, $\varepsilon^2 \nu_\varepsilon \Rightarrow \tau$, если $\theta = \theta_0 + u\varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

В силу экспоненциальности оценки (17) семейство $\varepsilon^2 \nu_\varepsilon$ равномерно интегрируемо, откуда немедленно следует сходимость $\varepsilon^2 \mathbf{E}_\varepsilon \nu_\varepsilon \rightarrow \mathbf{E} \tau$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, что эквивалентно (16).

Обратимся теперь к критерию с моментом остановки ν (см. теорему 1) и сформулируем окончательный результат.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A1), (A2), априорная плотность $g(\theta)$ непрерывна и положительна в точке θ_0 , $\beta = \max\{\beta_0, \beta_1\} \rightarrow 0$, A, B — решение системы (14). Тогда

$$\mathbf{E}_{\theta} \nu = \frac{B e^{(\theta - \theta_0)(A+B)} + A e^{-(\theta - \theta_0)(A+B)} - (A+B) e^{(\theta - \theta_0)(B-A)}}{(\theta - \theta_0) I_0 \left(e^{(\theta - \theta_0)(A+B)} - e^{-(\theta - \theta_0)(A+B)} \right)} + o(\beta^{-2}), \quad (18)$$

если $\theta - \theta_0 = O(\beta)$.

Доказательство немедленно следует из теоремы 1, предложения 4, а также известных формул для среднего значения момента выхода винеровского процесса из полосы $(-a, b)$ (см., например, [13, § 16.6.4, с. 426–427]).

З а м е ч а н и е 2. Полезно иметь в виду следующие довольно точные неравенства для главного члена $\mu(\theta)$ асимптотики (18):

$$\mu(\theta) \leq \begin{cases} B(\theta - \theta_0)^{-1} I_0^{-1}, & \text{если } \theta > \theta_0, \\ -A(\theta - \theta_0)^{-1} I_0^{-1}, & \text{если } \theta < \theta_0. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 3. В случае экспоненциального семейства рассматриваемый критерий совпадает с последовательным критерием отношения правдоподобия Вальда для двух простых гипотез (см., например, [21]) и поэтому к $\mathbf{E}_{\theta} \nu$ применимы асимптотические $(A, B \rightarrow \infty)$ формулы Лотова [15], [24]. Если $\theta = \theta_0$, то, как легко видеть, формулы из [24] и формула (18) дают один и тот же результат: $\mathbf{E}_{\theta} \nu \sim AB/I_0$.

Естественно сравнить полученную асимптотику средней длительности наблюдений последовательного критерия с асимптотикой необходи-

мого объема выборки, найденной в [8]. Рассмотрим только «симметричный» случай $G(\theta_0) = 0.5$, $\beta_0 = \beta_1 (= \beta)$. Тогда правые части формул (14) равны $\beta/2$ и поскольку $\psi(1) - \psi(\frac{1}{2}) = 2 \ln 2$ (см. [10, с. 959, 8.366]), то $A = B = (g_0 \ln 2)/\beta$ (см. (15)). Следовательно,

$$\begin{aligned} E_{\theta} \nu &\sim \frac{1}{(\theta - \theta_0) I_0} \frac{e^{(\theta - \theta_0)A} - e^{-(\theta - \theta_0)A}}{e^{(\theta - \theta_0)A} + e^{-(\theta - \theta_0)A}} \frac{g_0 \ln 2}{\beta} \\ &= \frac{g_0 \ln 2}{\beta(\theta - \theta_0) I_0} \operatorname{th} \left(\frac{g_0(\theta - \theta_0) \ln 2}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Как следует из [8] в этом случае для d -гарантийного различения гипотез H_0 и H_1 необходимый объем выборки $n^* \sim 2g_0^2/(\pi I_0 \beta^2)$, так что асимптотическая эффективность

$$\mathcal{E}(\lambda) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{E_{\theta} \nu}{n^*} = \frac{\pi \ln 2}{2g_0 \lambda} \operatorname{th}(\lambda g_0 \ln 2),$$

где $\lambda = \lim_{\beta \rightarrow 0} (\theta - \theta_0)/\beta$. Предельное ($\lambda \rightarrow 0$) значение асимптотической эффективности, соответствующее ее максимуму, равно

$$\mathcal{E}(0) = \frac{\pi \ln^2 2}{2} \approx 0.755.$$

Напомним, что в классическом подходе при различении двух простых гипотез $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$ средний объем выборки $E_{\theta} \nu$ критерия Вальда при некоторых $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$ превосходит объем выборки критерия Неймана–Пирсона с теми же ограничениями на вероятности ошибок (см. [14], [11]). Полученный результат говорит о том, что в d -апостериорном подходе существуют последовательные критерии, которые дают выигрыш в объеме наблюдений при любом значении тестируемого параметра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
2. Боровков А. А., Мозульский А. А. Большие отклонения и проверка статистических гипотез. — Труды института математики СО РАН, 1993, т. 19, с. 1–222.
3. Вальд А. Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960, 328 с.
4. Володин И. Н., Каштанова Е. К. Асимптотическое поведение среднего объема выборки в последовательном критерии Вальда с жесткими ограничениями на d -риски. — В сб.: Вторая Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Тезисы докладов. М.: ТВП, 1995, с. 39–40.
5. Володин И. Н., Новиков Ан. А., Симушкин С. В. Гарантийный статистический контроль качества: апостериорный подход. — Обзорение прикладной и промышленной математики, 1994, т. 1, в. 2, с. 1–32.
6. Володин И. Н., Новиков Ан. А., Симушкин С. В. Асимптотика необходимого объема выборки при d -гарантийном различении двух гипотез. — Изв. вузов, сер. математика, 1983, № 11, с. 59–66.

7. Volodin I. N., Novikov An. A. Asymptotics of the necessary sample size in testing parametric hypotheses: d -posterior approach. — Math. Methods Statist., vol. 7, № 1, 1998, pp. 111–121.
8. Володин И. Н., Новиков Ан. А. Асимптотика необходимого объема выборки при жестких ограничениях на d -риск. — В сб.: Актуальные вопросы современной математики. Сборник научных трудов. Т. 1. Новосибирск: НИИ МОО НГУ, 1995, с. 52–59.
9. Володин И. Н., Симушкин С. В. О d -апостериорном подходе к проблеме гарантийности статистического вывода. — III международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов, т. 1, Вильнюс, 1981, с. 101–102.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962, 1100 с.
11. Драгалин В. П., Новиков Ан. А. Асимптотическое решение задачи Кифера–Вейса для процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., т. 32, в. 4, с. 679–690.
12. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.
13. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике, изд. 2-е. М.: Наука, 1985, 640 с.
14. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979, 408 с.
15. Лотов В. И. Об асимптотическом поведении характеристик последовательного критерия отношения правдоподобия. — Теория вероят. и ее примен., 1985, т. 30, № 1, с. 164–169.
16. Новиков Ан. А. Асимптотическая оптимальность последовательного d -гарантийного критерия. — Теория вероят. и ее примен., 1987, т. 32, в. 2, с. 387–391.
17. Руссас Дж. Контигуальность вероятностных мер. М.: Мир, 1975, 254 с.
18. Симушкин С. В. Оптимальный объем выборки при d -гарантийном различении гипотез. — Изв. вузов, сер. математика, 1982, № 5, с. 47–52.
19. Симушкин С. В. Эмпирический d -апостериорный подход к проблеме гарантийности статистического вывода. — Изв. вузов, сер. математика, 1983, № 11, с. 42–58.
20. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.
21. Berk R. H. Locally most powerfull tests. — Ann. Statist., 1975, v. 3, p. 373–381.
22. Greenwood P. E., Shiryaev A. N. Contiguity and the statistical invariance principle. New York: Gordon and Breach, 1985.
23. Lerche H. R. Boundary crossing of brownian motion. — Lect. Notes Statist., vol. 40, Berlin: Springer-Verlag, 1986.
24. Lotov V. I. On the results of asymptotic analysis for the random walks with two-sided boundary. — Probab. Theor. Math. Statist., Proceedings of the 5th Japanese-USSR Symposium, Kyoto, 1986, (Lect. Notes Math., Vol. 1299) Berlin: Springer-Verlag, 1988, p. 267–273.
25. Stadje W. Asymptotic efficiency of sequential testing using error sums. — Sankhyā, Ser. A, 1984, v. 46, p. 117–134.
26. Volodin I. N. Necessary sample size for guaranteed (by L. N. Bolshev) discrimination of hypotheses. — In: Fifth International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics: Abstracts of Communications. Vilnius: Inst. Math. Cybern., 1989, v. II, p. 218–219.

Поступила в редакцию
26.VIII.1996