Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Докучаев, Локальное время пребывания диффузионных и вырождающихся процессов на подвижной поверхности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 2, 226–247

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 07:26:40

© 1998 г.

ДОКУЧАЕВ Н. Г.*

**ЛОКАЛЬНОЕ ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ ДИФFUЗИОННЫХ
И ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ НА
ПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ¹⁾**

Для многомерных процессов Ито установлено существование локального времени пребывания на поверхности и выведены уравнения для вероятностных распределений. Получена явная формула для локального времени типа формулы Танаки. Установлена непрерывность локального времени. Исследованы предельные свойства локального времени при вырождении диффузии.

Ключевые слова и фразы: локальное время, диффузионные процессы, вырождение диффузии.

Введение. Вопросам, связанным с вероятностным распределением функционалов от локального времени, посвящена обширная литература (см. обзоры [1]–[3] и библиографию там же). Наиболее подробно изучено локальное время скалярного броуновского движения. Представляется естественным иметь описание распределения локального времени для более общих процессов, чем броуновское движение (например, для диффузионных процессов с зависящим от управления сносом, чтобы включить в стохастическую теорию оптимального управления новые задачи, в которых требуется минимизировать или максимизировать локальное время пребывания в множествах нулевой меры). Существование локального времени пребывания на гладких гиперповерхностях для общих многомерных семимартингалов было установлено в [4], при этом распределение локального времени не изучалось. С использованием аппарата уравнений Колмогорова ниже получено описание распределения локального времени пребывания для общего многомерного марковского диффузионного процесса на изменяющейся во времени «кусочно-гладкой» или даже фрактальной гиперповерхности (пример 4.1); выведены специальные аналоги уравнений Колмогорова; установлена разрешимость этих уравнений, а также сходимости случайных величин, предел

*С.-Петербургский государственный университет, НИИ математики и механики, 198904 С.-Петербург, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00408.

которых обычно называют локальным временем. Найдено явное выражение локального времени через стохастический интеграл, т.е. получен аналог формулы Танаки. Изучены предельные свойства локального времени при исчезновении диффузии, когда уравнение Ито переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение.

1. Постановка задачи. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ рассмотрим n -мерный винеровский процесс $w(t)$ с независимыми компонентами такой, что $w(0) = 0$. Рассмотрим случайный n -вектор a , не зависящий от $w(t)$. Пусть случайный процесс $y(t)$ размерности n является сильным решением стохастического уравнения Ито

$$dy(t) = f(y(t), t) dt + \beta(y(t), t) dw(t), \quad (1.1)$$

$$y(0) = a. \quad (1.2)$$

Функции $f(x, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta(x, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ограничены и измеримы. Полагаем, что функция $\beta(x, t)$ непрерывна, производная $\partial \beta(x, t) / \partial x$ ограничена, $b(x, t) = \frac{1}{2} \beta(x, t) \beta(x, t)^T \geq \delta I > 0$ для некоторого $\delta > 0$ при всех x, t .

Известно [8, § II.6], что при таких предположениях уравнение (1.1)–(1.2) имеет слабое решение (однозначное по распределению). Введенный здесь набор $(\Omega, \mathcal{F}, P, w(t), y(t))$ является, таким образом, одним из таких слабых решений.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область. Полагаем, что либо $D = \mathbb{R}^n$, либо область D ограничена и имеет C^2 -гладкую границу, $a \in D$ п.н.

Рассмотрим случайные моменты первого выхода $\tau_D = \inf\{t: y(t) \notin D\}$. Пусть для п.в. (почти всех) $t \in [0, T]$ задана ограниченная гиперповерхность $\Gamma(t) \subset D$ размерности $n - 1$, $\partial \Gamma(t)$ — край этой гиперповерхности. Введем множества

$$\begin{aligned} \Gamma_*(t, \varepsilon) &= \left\{ x \in D: \inf_{y \in \Gamma(t)} |x - y| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \\ \Gamma'(t, \varepsilon) &= \left\{ x \in D: \inf_{y \in \partial \Gamma(t)} |x - y| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

(Возможно, $\partial \Gamma(t) = \emptyset$, тогда $\Gamma'(t, \varepsilon) = \emptyset$.) Для всех $t \in [0, T]$, $\varepsilon > 0$ зададим произвольным образом борелевские множества $\Gamma(t, \varepsilon)$ такие, что

$$\Gamma_*(t, \varepsilon) \setminus \Gamma'(t, \varepsilon) \subseteq \Gamma(t, \varepsilon) \subseteq \Gamma_*(t, \varepsilon). \quad (1.4)$$

Нас будет интересовать локальное время пребывания процесса $y(t)$ на $\Gamma(t)$ (до выхода из D), т.е. предельные значения при $\varepsilon \rightarrow +0$ величин

$$l_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau_D \wedge t} \text{Ind} \{y(s) \in \Gamma(s, \varepsilon)\} ds. \quad (1.5)$$

В случае $f, \beta, \Gamma(t)$ общего вида будет показано, что для любого $t > 0$ эти величины сходятся в среднеквадратическом к некоторой случайной величине $\hat{t}(t)$. Сходимость по распределению установлена в п. 5, в среднеквадратическом — в п. 6 (при этом предел не зависит от выбора $\Gamma(t, \varepsilon)$ в (1.4)). Будет найдено уравнение для характеристической функции

$$\phi(z) = \mathbf{E} e^{z\hat{t}(t)}, \quad z \in \mathbf{C}. \quad (1.6)$$

Кроме того, будут выведены уравнения, являющиеся аналогом обратного уравнения Колмогорова (и установлена их разрешимость в соответствующих классах функций) для функционалов типа

$$\phi_1 = \mathbf{E} \hat{t}(T), \quad \phi_2 = \mathbf{E} \int_0^{\tau_D \wedge T} \varphi(y(t), t) e^{\hat{t}(t)} dt \quad (1.7)$$

для заданного числа $T > 0$ и функции φ .

2. Пространства и классы функций. Зададим число $T > 0$. Обозначим $Q = D \times (0, T)$. Ниже $\|\cdot\|_X$ означает норму в пространстве X , $(\cdot, \cdot)_X$ есть скалярное произведение в гильбертовом пространстве X .

Введем пространства (комплекснозначных) функций. Для целых $k \geq 0$ пусть $H^k = \overset{\circ}{W}_2^k(D)$ — гильбертовы пространства Соболева, H^{-k} — пространство, двойственное к H^k , с нормой $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ такой, что $\|u\|_{H^{-1}}$ для $u \in H^0$ есть супремум $(u, v)_{H^0}$ по $v \in H^0$, $\|v\|_{H^k} \leq 1$.

Пусть ℓ_m означает меру Лебега в $\mathbf{R}^m$, $\overline{\mathcal{B}}_m$ есть σ -алгебра лебеговских множеств в $\mathbf{R}^m$. Введем пространства $\mathcal{C}^k = C([0, T] \rightarrow H^k)$, $X^k = L^2([0, T], \overline{\mathcal{B}}_1, \ell_1, H^k)$, $Y^k = X^k \cap \mathcal{C}^{k-1}$ с нормой $\|u\|_{Y^k} = \|u\|_{X^k} + \|u\|_{\mathcal{C}^{k-1}}$.

Форму $(u, v)_{H^0}$ считаем определенной также и для $u \in H^{-k}$, $v \in H^k$ (распространяя ее естественным образом с $u \in H^0$, $v \in H^k$).

Пусть ниже $\mu \in (1, 2)$ — произвольное число в случае $n = 1$,

$$\mu \in \left(1, \frac{n}{n-1}\right) \quad \text{в случае } n > 1. \quad (2.1)$$

Введем пространство $\mathcal{W} = W_\mu^{(1)}(D)$ и сопряженное пространство $\mathcal{W}^*$, а также пространство $\mathcal{X} = L^\infty([0, T], \overline{\mathcal{B}}_1, \ell_1, \mathcal{W}^*)$.

Следующее предложение стандартно.

Предложение 2.1. i) Если D — ограниченная область, то $\mathcal{W}^* \subset H^{-1}$, $\|g\|_{H^{-1}} \leq c \|g\|_{\mathcal{W}^*}$, где $c = c(n, D, \mu)$ — константа, и $\mathcal{X} \subset X^{-1}$.

ii) Пусть $D = \mathbf{R}^n$, $g \in \mathcal{W}^*$ и существует такая ограниченная область $D_1 \subset \mathbf{R}^n$, что $\langle \xi, g \rangle = 0$ ($\forall \xi \in \mathcal{W}$: $\text{supp } \xi \subset \mathbf{R}^n \setminus D_1$). Тогда $g \in H^{-1}$, $\|g\|_{H^{-1}} \leq c \|g\|_{\mathcal{W}^*}$, где $c = c(n, D, \mu)$ — константа.

Лемма 2.1. Для $\xi \in H^1$, $\eta \in H^1$ выполнено $\xi\eta \in \mathcal{W}$ и $\|\xi\eta\|_{\mathcal{W}} \leq c \|\xi\|_{H^1} \|\eta\|_{H^1}$, где $c = c(n, D, \mu)$ — константа.

Доказательство. Пусть $r = 2/\mu$, $r' = r(r-1)^{-1}$, $p = \mu r'$, $\bar{\eta} \in H^0$. Имеем $p = \mu r' = 2\mu(2-\mu)$, $\mu(2-\mu)^{-1} < n(n-2)^{-1}$, $p < 2n(n-2)^{-1}$ при $n > 2$,

$$\begin{aligned} \|\xi \bar{\eta}\|_{L_\mu(D)} &= \left(\int_D \xi^\mu \bar{\eta}^\mu dx \right)^{1/\mu} \leq \left(\left(\int_D \xi^{\mu r'} dx \right)^{1/r'} \left(\int_D \bar{\eta}^2 dx \right)^{1/r} \right)^{1/\mu} \\ &= \|\bar{\eta}\|_{H^0} \left(\int_D \xi^p dx \right)^{1/p} \leq c \|\bar{\eta}\|_{H^0} \|\xi\|_{H^1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где константа $c = c(n, D, \mu)$. Последняя оценка получена из теорем вложения для пространств Соболева (см. [5, с. 78]). Применив (2.2) к $(\partial \xi / \partial x_i) \eta$, $(\partial \eta / \partial x_i) \xi$, получаем требуемое.

Лемма 2.2. Для $\xi \in H^1$, $g \in \mathcal{W}^* \cap H^0$ выполнено

$$\xi g \in H^{-1} \quad \text{и} \quad \|\xi g\|_{H^{-1}} \leq c \|\xi\|_{H^1} \|g\|_{\mathcal{W}^*},$$

где $c = c(n, D, \mu)$ — константа.

Доказательство. Введем множество $BH^1 = \{\eta \in H^1 \cap L_\infty(D): \|\eta\|_{H^1} \leq 1\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\xi g\|_{H^{-1}} &= \sup_{\eta \in BH^1} (\eta, \xi g)_{H^0} \leq \sup_{\eta \in BH^1} (\eta \xi, g)_{H^0} \leq \sup_{\eta \in BH^1} \|\eta \xi\|_{\mathcal{W}} \|g\|_{\mathcal{W}^*} \\ &\leq c \sup_{\eta \in BH^1} \|\eta\|_{H^1} \|\xi\|_{H^1} \|g\|_{\mathcal{W}^*} \leq c \|\xi\|_{H^1} \|g\|_{\mathcal{W}^*}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где c — константа из леммы 2.1. Отсюда получаем требуемое.

Введем параметр

$$\mathcal{P} = \left\{ n, T, D, \delta, \sup_{x,t} |f(x, t)|, \sup_{x,t} |\beta(x, t)|, \sup_{x,t,i} \left| \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x_i} \right| \right\}. \quad (2.4)$$

3. Параболическое уравнение с коэффициентом из $\mathcal{X}$. Введем и исследуем параболические уравнения, которые далее используются для описания эволюции функционалов (1.6)–(1.7) и являются аналогами обратного уравнения Колмогорова.

Введем оператор $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}V = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n f_i(x, t) \frac{\partial V}{\partial x_i}(x). \quad (3.1)$$

Здесь b_{ij} , f_i , x_i — компоненты матрицы b и векторов f , x соответственно. Будем рассматривать краевые задачи

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{A}V + gV = -\varphi, \quad V(x, t)|_{x \in \partial D} = 0, \quad V(x, T) = R(x). \quad (3.2)$$

Известно [5], что в случае $g \in L_\infty(Q)$, $\varphi \in X^{-1}$, $R \in H^0 = L_2(D)$ эта задача однозначно разрешима в классе Y^1 .

Теорема 3.1. Пусть заданы $z \in \mathbf{C}$, $h \in \mathcal{X}$, $\varphi \in X^{-1}$, $R \in H^0$. Пусть $g_\varepsilon \in L_\infty(Q)$, $g \in \mathcal{X}$, $h_\varepsilon \in L_\infty(Q)$, $\varphi_\varepsilon \in L_\infty(Q)$, $R_\varepsilon \in H^0$ — такие функции, что $g_\varepsilon = zh_\varepsilon$, $g = zh$, $\|h_\varepsilon - h\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$, $\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{X^{-1}} \rightarrow 0$, $\|R_\varepsilon - R\|_{H^0} \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Пусть V_ε — решения задачи (3.2), соответствующие $g = g_\varepsilon$, $\varphi = \varphi_\varepsilon$. Тогда последовательность V_ε имеет при $\varepsilon \rightarrow +0$ предел V в Y^1 , равномерный по z : $|z| \leq 1$, определяемый однозначно, и при этом

$$\|V\|_{Y^1} \leq c (\|\varphi\|_{X^{-1}} + \|R\|_{H^0}), \quad (3.3)$$

где $c > 0$ — константа, зависящая от параметров $\mathcal{P}$, μ , $\|g\|_{\mathcal{X}}$.

Отметим, что V в теореме для любого заданного g линейно зависит от φ , R . Кроме того, $V = 0$ в случае $\varphi = 0$, $R = 0$. Отсюда следует, что линейен и однороден оператор, сопоставляющий решение V паре $(\varphi, R) \in X^{-1} \times H^0$. Введем операторы $L(g)$, $\mathcal{L}(g)$ такие, что $V = L(g)\varphi + \mathcal{L}(g)R$ для соответствующего значения V из теоремы 3.1. По теореме, $L(g): X^{-1} \rightarrow Y^1$, $\mathcal{L}(g): H^0 \rightarrow Y^1$ — линейные непрерывные операторы; по лемме 2.2, $gV \in X^{-1}$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Говорим, что V есть решение в классе Y^1 задачи (3.2) с обобщенным $g \in \mathcal{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3.1. Сначала покажем, что при подстановке $g = g_\varepsilon$ в (3.2) константа в неравенстве (3.3) для $V = V_\varepsilon$ не увеличивается при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Ниже используем элементарное неравенство

$$uv \leq \frac{u^2}{2\gamma} + \frac{v^2\gamma}{2} \quad (\forall u, v, \gamma \in \mathbf{R}, \gamma > 0).$$

Пусть $v \in H^1 \cap C^2(D)$. Имеем для любого $t \in [0, T]$ и оператора $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, t)$ определенного в (3.1), оценки

$$\begin{aligned} (v, \mathcal{A}v)_{H^0} &= \left(v, \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{H^0} + \left(v, \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{H^0} \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}, b_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{H^0} - \sum_{i,j=1}^n \left(v, \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{H^0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(v, f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{H^0} \\ &\leq -\delta \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{H^0}^2 + \sum_{i,j=1}^n \|v\|_{H^0} \left\| \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i} \right\|_{L_\infty(Q)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{H^0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \|v\|_{H^0} \|f_i\|_{L_\infty(Q)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{H^0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq -\delta \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{H^0}^2 + \frac{\delta}{4} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{H^0}^2 \\ &\quad + \frac{C}{\delta} \sum_{i,j=1}^n \|v\|_{H^0}^2 \left(\left\| \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(Q)}^2 + \|f_i\|_{L^\infty(Q)}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где константа $C = C(n)$. Отсюда получаем, что для любого $v \in H^1$ при любом $t \in [0, T]$ выполнено

$$(v, \mathcal{A}v)_{H^0} \leq -\frac{3\delta}{4} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{H^0}^2 + C_1 \|v\|_{H^0}^2, \quad (3.5)$$

где константа C_1 зависит от параметра $\mathcal{P}$.

Для любого $v \in H^1$ при любом $t \in [0, T]$ выполнено

$$\begin{aligned} (v, \varphi_\varepsilon(\cdot, t))_{H^0} &\leq \|v\|_{H^1}^2 \|\varphi_\varepsilon(\cdot, t)\|_{H^{-1}}^2 \leq C_D \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{H^0} \|\varphi_\varepsilon(\cdot, t)\|_{H^{-1}} \\ &\leq \frac{\delta}{4} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{H^0}^2 + C_2 \|\varphi_\varepsilon(\cdot, t)\|_{H^{-1}}^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где константа C_D зависит от n, D , константа C_2 зависит от $\mathcal{P}$.

Для любого $v \in H^1$ выполнено

$$\begin{aligned} (v, g_\varepsilon v)_{H^0} &\leq \|v\|_{\mathcal{W}} \|g_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^*} \leq C_3 \|v\|_{H^1} \|v\|_{H^0} \|g_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^*} \\ &\leq \frac{\delta}{4} \sum_{i=1}^n \|v\|_{H^1}^2 + \widehat{C}_3 \|v\|_{H^0}^2 \leq \frac{\delta}{4} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{H^0}^2 + C_3 \|v\|_{H^0}^2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где константы $\widehat{C}_3, C_3$ зависят от $\sup_\varepsilon \|g_\varepsilon\|_{\mathcal{X}}, \delta, n, D$.

Для решения $V = V_\varepsilon$ задачи (3.2) с $g = g_\varepsilon, \varphi = \varphi_\varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ имеем в силу (3.5)–(3.7)

$$\begin{aligned} &\|V_\varepsilon(\cdot, t)\|_{H^0}^2 - \|V_\varepsilon(\cdot, T)\|_{H^0}^2 \\ &= 2 \int_t^T (V_\varepsilon(\cdot, s), \mathcal{A}V_\varepsilon(\cdot, s) + g_\varepsilon V_\varepsilon(\cdot, s) + \varphi_\varepsilon(\cdot, s))_{H^0} ds \\ &\leq \int_t^T \left\{ -\delta \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial V_\varepsilon(\cdot, s)}{\partial x_i} \right\|_{H^0}^2 \right. \\ &\quad \left. + C_4 \left(\|V_\varepsilon(\cdot, s)\|_{H^0}^2 + \|\varphi_\varepsilon(\cdot, s)\|_{H^{-1}}^2 \right) \right\} ds, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где константа C_4 зависит от $\mathcal{P}, \mu, \|g\|_{\mathcal{X}}$.

Отсюда сразу видно, что

$$\|V_\varepsilon\|_{Y^1} \leq C_* (\|\varphi_\varepsilon\|_{X^{-1}} + \|R\|_{H^0}) \quad (\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1]), \quad (3.9)$$

где константа C_* зависит от $\mathcal{P}, \mu, \|g\|_{\mathcal{X}}$.

Покажем, что последовательность $\{V_\varepsilon\}$ сходится в себе в Y^1 . Пусть $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. Обозначим $W = V_{\varepsilon_1} - V_{\varepsilon_2}$. Имеем

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}W + g_{\varepsilon_1}W = -\xi, \quad W(x, t)|_{x \in \partial D} = 0, \quad W(x, T) = 0, \quad (3.10)$$

где $\xi = \varphi_{\varepsilon_1} - \varphi_{\varepsilon_2} + (g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2})V_{\varepsilon_2}$. Имеем

$$\|\varphi_{\varepsilon_1} - \varphi_{\varepsilon_2}\|_{X^{-1}} \rightarrow 0, \quad \|g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0, \quad (3.11)$$

поскольку последовательности $\{\varphi_{\varepsilon_i}\}$, $\{g_{\varepsilon_i}\}$ сходятся в себе и сходятся в соответствующих пространствах. По лемме 2.2,

$$\begin{aligned} \|(g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2})V_{\varepsilon_2}\|_{X^{-1}} &= \int_0^T \|(g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2})V_{\varepsilon_2}(\cdot, t)\|_{H^{-1}} dt \\ &\leq \int_0^T \|g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}\|_{\mathcal{W}^*} \|V_{\varepsilon_2}(\cdot, t)\|_{H^1} dt \\ &\leq \|g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}\|_{\mathcal{X}} \int_0^T \|V_{\varepsilon_2}(\cdot, t)\|_{H^{-1}} dt \\ &= \|g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}\|_{\mathcal{X}} \|V_{\varepsilon_2}\|_{X^1} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, ввиду (3.9), (3.11). Значит, $\|\xi\|_{X^{-1}} \rightarrow 0$. Применив оценку (3.9) к решению W краевой задачи (3.10), получаем, что

$$\|W\|_{Y^1} \leq C_* \|\xi\|_{X^{-1}} \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

Отсюда видно, что последовательность $\{V_\varepsilon\}$, $\varepsilon = \varepsilon_i \rightarrow 0$, сходится в себе (а значит, сходится) в банаховом пространстве Y^1 . Оценка (3.3) следует из (3.9), из этой же оценки следует однозначность V .

Покажем, что последовательность $\{V_\varepsilon\}$ сходится в Y^1 равномерно по $z \in \mathbf{C}$: $|z| \leq 1$. Пусть $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим $W = V_\varepsilon - V$. Имеем

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}W + g_\varepsilon W = -\xi, \quad W(x, t)|_{x \in \partial D} = 0, \quad W(x, T) = R_\varepsilon - R, \quad (3.14)$$

где $\xi = \varphi_\varepsilon - \varphi + (g_\varepsilon - g)V$. Имеем

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{X^{-1}} \rightarrow 0, \quad \|g_\varepsilon - g\|_{\mathcal{X}} = z \|h_\varepsilon - h\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0 \quad (3.15)$$

равномерно по $|z| \leq 1$. По лемме 2.2,

$$\begin{aligned} \|(g_\varepsilon - g)V\|_{X^{-1}} &= \int_0^T \|(g_\varepsilon - g)V(\cdot, t)\|_{H^{-1}} dt \\ &\leq \int_0^T \|g_\varepsilon - g\|_{\mathcal{W}^*} \|V(\cdot, t)\|_{H^1} dt \\ &\leq \|g_\varepsilon - g\|_{\mathcal{X}} \int_0^T \|V(\cdot, t)\|_{H^1} dt \\ &= \|g_\varepsilon - g\|_{\mathcal{X}} \|V\|_{X^1} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\|\xi\|_{X^{-1}} \rightarrow 0$ равномерно по $|z| \leq 1$. Применяв оценку (3.3) к решению W краевой задачи (3.14), получаем, что

$$\|W\|_{Y^1} \leq C_* (\|\xi\|_{X^{-1}} + \|R_\varepsilon - R\|_{H^0}) \rightarrow 0.$$

Отсюда видно, что последовательность $\{V_\varepsilon\}$, $\varepsilon \rightarrow 0$, сходится равномерно по $|z| \leq 1$. Теорема 3.1 доказана.

4. О классе гиперповерхностей. Естественнo предположить, что для изучения функционалов типа (1.6)–(1.7) пригодны уравнения (3.2) с такими $g \in \mathcal{X}$, $\varphi \in X^{-1}$, что в качестве функций g_ε , φ_ε , фигурирующих в теореме 3.1, можно взять функции $\varepsilon^{-1} \text{Ind}\{x \in \Gamma(t, \varepsilon)\}$ для гиперповерхности $\Gamma(t) \subset D$ (множества $\Gamma(t, \varepsilon)$ определены в (1.3)–(1.4)). Ниже будет показано, что предел $\varepsilon^{-1} \text{Ind}\{x \in \Gamma(t, \varepsilon)\}$ принадлежит X^{-1} и $\mathcal{X}$ для $\Gamma(t)$ из достаточно широкого класса «кусочно C^1 -гладких» гиперповерхностей.

Через $e^{(j)}$ обозначаем j -й орт в $\mathbf{R}^n$.

Пусть Γ — некоторая поверхность. Обозначим через $N(x, j)$ число пересечений гиперповерхности Γ лучом из $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в $(x_1, \dots, x_{j-1}, -\infty, x_{j+1}, \dots, x_n)$, точки $\hat{x}_k(x, j)$ являются соответствующими точками пересечения; полагаем $N(x, j) = +\infty$, если луч проходит по касательной к Γ .

Введем функции $\gamma_j: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ такие, что $\gamma_j(x) = |\cos \alpha_j(x)|$, где $\alpha_j(x)$ — угол между $e^{(j)}$ и нормалью к Γ в точке $x \in \Gamma$, если эта нормаль определена; $\gamma_j(x) = 0$ ($\forall j$), если x — точка нарушения гладкости, где не определена нормаль. Определим функции

$$G_j(x) = \sum_{k=1}^{N(x, j)} \gamma_j(\hat{x}_k(x, j)). \quad (4.1)$$

Пологаем $G_j(x) = +\infty$, если $N(x, j) = +\infty$.

Теорема 4.1. Пусть задано множество $\hat{\Gamma} \subset \mathbf{R}^n$, являющееся объединением конечного числа $\mathcal{N}$ многогранников $\hat{\Gamma}_i$ размерности $n-1$ с попарно непересекающимися внутренностями, $\hat{\Gamma} = \bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}} \hat{\Gamma}_i$. Пусть $\mathcal{B}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ — некоторая непрерывная биективная функция, гиперповерхность $\Gamma \subset D$ такова, что $\Gamma = \mathcal{M}(\hat{\Gamma})$. Предполагаем, что функции $\mathcal{B}: \hat{\Gamma}_i \rightarrow \mathbf{R}^n$ являются C^1 — гладкими биекциями, $\mathcal{B}(x) = x$, если x является вершиной какого-либо $\hat{\Gamma}_i$, $|\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}_i| \leq \delta_0$, если x принадлежит внутренней части Γ_i , $i = 1, \dots, \mathcal{N}$. Здесь $\Gamma_i = \mathcal{B}(\hat{\Gamma}_i)$, $\mathbf{n}(x)$ — нормаль к Γ в x , $\mathbf{n}_i$ — нормаль к $\hat{\Gamma}_i$, $\delta_0 \leq n^{-2}/2$ (ориентация нормалей фиксирована, $|\mathbf{n}(x)| = 1$, $|\mathbf{n}_i| = 1$). Тогда $N(x, j) < +\infty$ для всех j для п.в. x . Определим обобщенные функции

$$g = \sum_{j=1}^n \frac{\partial G_j}{\partial x_j}. \quad (4.2)$$

Тогда $g \in \mathcal{W}^* \cap H^{-1}$, функции $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \text{Ind}\{x \in \Gamma(\varepsilon)\}$ сходятся к g в метрике $\mathcal{W}^*$ и H^{-1} , и

$$\|g\|_{\mathcal{W}^*} \leq c \sum_{j=1}^n \|G_j\|_{L_\nu(D_1)}, \quad \|g\|_{H^{-1}} \leq c \sum_{j=1}^n \|G_j\|_{L_2(D_1)},$$

где $\nu = \mu(\mu - 1)^{-1}$, D_1 — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, такая, что $\Gamma \subset D_1 \subseteq D$, $c = c(n, D_1)$ — константа.

З а м е ч а н и е 4.1. Нетрудно заметить, что предположения теоремы 4.1 выполнены для дисков, сфер и многих других кусочно C^1 -гладких $(n-1)$ -мерных поверхностей.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4.1. Обозначим $S_0 = \cup \partial \Gamma_i$; имеем $\ell_n(S_0) = 0$. Рассмотрим множество открытых областей $D_i \subseteq D$ таких, что $\overline{D} = \cup_{i=1}^n \overline{D}_i$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, если $i \neq j$, $\Gamma_i = \Gamma \cap \overline{D}_i$ (через $\overline{D}_i$, $\overline{D}$ обозначаем замыкания областей). Обозначим $\Gamma_i(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon) \cap \overline{D}_i$. Обозначим $P_j(x)$ прямую линию, проходящую через x и параллельную $e^{(j)}$. Зададим функции $\psi(\cdot, \varepsilon): \Gamma(\varepsilon) \rightarrow \Gamma \setminus S_0$ такие, что $\psi(x) \in \Gamma_i$, если $x \in \Gamma_i(\varepsilon)$, $|\psi(x, \varepsilon) - x| \leq c\varepsilon$, где константы c таковы, что эти функции существуют для всех $\varepsilon \leq \varepsilon_*$ для некоторого малого $\varepsilon_* > 0$. Зададим функции $G_j^\varepsilon(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Полагаем, что эти функции непрерывны по x_j . Полагаем, что эти функции $G_j^\varepsilon(x)$ постоянны на каждом отрезке $P_j(x)$, лежащем в $D \setminus \Gamma(\varepsilon)$ (константы свои для каждого такого отрезка), $G_j^\varepsilon(x) = 0$, если $(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \notin \Gamma(\varepsilon)$ ($\forall y_j < x_j$), и $\partial G_j^\varepsilon(x) / \partial x_j = \varepsilon^{-1} \gamma_j^2(\psi(x, \varepsilon))$, $x \in P_j(x) \cap \Gamma(\varepsilon)$. Эти условия определяют $G_j^\varepsilon(x)$ однозначно.

Имеем $\sum_{j=1}^n \gamma_j^2(x) = 1$ ($\forall x \in \Gamma \setminus S_0$). Тогда

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial G_j^\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^n \gamma_j^2(\psi(x, \varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon}, \quad x \in \Gamma(\varepsilon),$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial G_j^\varepsilon}{\partial x_j}(x) = 0, \quad x \notin \Gamma(\varepsilon), \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial G_j^\varepsilon}{\partial x_j}(x) = g_\varepsilon(x), \quad x \in D.$$

Имеем $\ell_n(x \in \mathbf{R}^n: P_j(x) \cap S_0 \neq \emptyset) = 0$, $j = 1, \dots, n$.

По предложению 2.1 [7], выполнено $N(j, x) < +\infty$ для п.в. x (можно представить луч как решение тривиального обыкновенного дифференциального уравнения, тогда предложение 2.1 [7] можно переформулировать для данного случая). Ввиду кусочной C^1 -гладкости Γ имеем $N(x, j) \leq \text{const}$ для п.в. x .

Пусть $\mathcal{N} = 1$, $\Gamma = \Gamma_1$ таково, что $\mathbf{n}_1 = (\mathbf{n}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{n}_1^{(n)})$, $|\mathbf{n}_1^{(j)}| = n^{-1/2}$, $j = 1, \dots, n$, тогда $\gamma_j(x) \geq \delta_1$ ($\forall x \in \Gamma \setminus S_0$) для некоторых $\delta_1 > 0$. Обозначим через $\mu_j(x, \varepsilon)$ длину минимального отрезка, лежащего в $\Gamma(\varepsilon)$, с концами в $\partial \Gamma(\varepsilon)$, проходящего через x и параллельного $e^{(j)}$. Име-

ем $\varepsilon^{-1} \mu_j(x, \varepsilon) \rightarrow \gamma_j^{-1}(x)$. Из непрерывности нормали на данной C^1 — гладкой поверхности $\Gamma = \Gamma_1$ следует, что $G_i^\varepsilon(x) \rightarrow G_i(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ для п.в. x , $i = 1, \dots, n$,

$$\sup_x |G_j^\varepsilon(x)| \leq \varepsilon^{-1} \mu_j(x, \varepsilon) \sup_x \gamma_j^2(\psi(x, \varepsilon)) \leq c,$$

где $x \in P_j(x) \cap \Gamma(\varepsilon)$, константа c зависит от Γ . Значит, $\|G_i^\varepsilon - G_i\|_{L_\nu(D)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ ($\forall \nu > 1$, $i = 1, \dots, n$), или $g_\varepsilon = \sum_{j=1}^n \partial G_j^\varepsilon / \partial x_j(x) \rightarrow g$ в $\mathcal{W}^*$. Пусть $u \in C^2(D) \cap \mathcal{W}^* \cap H^1$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle g_\varepsilon - g, u \rangle &= \sum_{j=1}^n \int_{\partial D} (G_j^\varepsilon(x) - G_j(x)) u(x) \cos(\mathbf{n}(x), e_j) dx \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \int_D (G_j^\varepsilon(x) - G_j(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) dx \\ &= - \sum_{j=1}^n \int_D (G_j^\varepsilon(x) - G_j(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) dx, \end{aligned}$$

поскольку $G_j^\varepsilon \equiv G_j$ на ∂D (при $D = \mathbf{R}^n$ интегралы по ∂D во втором выражении исчезают). Значит, для $\nu = \mu(\mu - 1)^{-1}$ имеем

$$|\langle g_\varepsilon - g, u \rangle| \leq \sum_{j=1}^n (G_j^\varepsilon - G_j)_{L_\nu(D)} \|u\|_{\mathcal{W}}.$$

Следовательно, $g_\varepsilon = \sum_{j=1}^n \partial G_j^\varepsilon / \partial x_j(x) \rightarrow g$ в $\mathcal{W}^*$. В указанном частном случае теорема 4.1 доказана.

Пусть $\mathcal{N} = 1$, нормаль $\mathbf{n}_1$ произвольно направлена. Введем новые координаты $\tilde{x}_j = \sum_{k=1}^n \theta_{jk} x_k$, где $\theta \in \mathbf{R}^{n \times n}$ — такая матрица, что $\theta^T = \theta^{-1}$ и $|\tilde{\mathbf{n}}_1^{(j)}| = n^{-1/2}$, $\mathbf{n}_1^{(j)} \tilde{\mathbf{n}}_1^{(j)} \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, где $\tilde{\mathbf{n}}_1 = (\tilde{\mathbf{n}}_1^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{n}}_1^{(n)})$ — соответствующая нормаль к $\theta \hat{\Gamma}$ в новых координатах. Обозначим через $\tilde{N}(x, j)$ число пересечений гиперповерхности $\tilde{\Gamma} = \theta \Gamma$ лучом из $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ в $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{j-1}, -\infty, \tilde{x}_{j+1}, \dots, \tilde{x}_n)$, точки $\tilde{x}'_k(x, j)$ являются соответствующими точками пересечения; полагаем $\tilde{N}(x, j) = +\infty$, если луч проходит по касательной к Γ . Тогда $\tilde{N}(x, j) < +\infty$ для всех j для п.в. x . Определим функции $\tilde{G}_j(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}(\tilde{x}, j)} \gamma_j(\tilde{x}'_k(\tilde{x}, j))$. Здесь $\tilde{\gamma}_j(\tilde{x})$ — соответствующие функции, построенные по правилу, указанному перед формулировкой теоремы, но в новых координатах. Обозначим $\tilde{g} = \sum_{j=1}^n \partial \tilde{G}_j / \partial \tilde{x}_j$. Как и выше, получаем, что $\tilde{g}_\varepsilon(\tilde{x}) = \text{Ind}\{x = \theta^{-1} \tilde{x} \in \Gamma(\varepsilon)\} \rightarrow \tilde{g}$ в $\mathcal{W}^*$. Обозначим $\Delta G_j(x)$ скачок функции G_j в x на прямой $P_j(x)$, в порядке возрастания x_j . Имеем $\Delta G_j(x) = \gamma_j(x)$. Обозначим $\Delta \tilde{G}_j(\tilde{x})$ аналогичные скачки в новых координатах. Из того, что преобразование координат является поворотом, видно, что $\Delta \tilde{G}_j(\tilde{x}) =$

$\sum_{k=1}^n \theta_{jk} \Delta G_k(\theta^{-1} \tilde{x})$, если $N(x, j) < +\infty$, $x \in \Gamma \setminus S_0$. Значит, $\langle \tilde{\xi}, \tilde{g} \rangle = \langle \xi, g \rangle$ для $\tilde{\xi} \in \mathcal{W}$, $\tilde{\xi}(x) = \tilde{\xi}(\theta x)$. Следовательно, теорема 4.1 доказана в этом случае.

Пусть $\mathcal{N} > 1$, $g_\varepsilon^{(i)}(x) = \text{Ind}\{x \in \Gamma_i(\varepsilon)\}$. Имеем $g_\varepsilon = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} g_\varepsilon^{(i)}$, $g_\varepsilon^{(i)}(x) \rightarrow g^{(i)} \in \mathcal{W}^*$ в $\mathcal{W}^*$, $g^{(i)} = \sum_{j=1}^n \partial G_j^{(i)} / \partial x_j$, где $G_j^{(i)}$ построены так же, как в формулировке теоремы 4.1 для соответствующих $\Gamma = \Gamma_i$. Имеем $G_j(x) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} G_j^{(i)}(x)$. Отсюда следует доказательство теоремы 4.1.

Приведем пример поверхности $\Gamma = \Gamma(t)$, которая изменяется во времени, приближаясь к фракталу, и при этом выполнено $g = g(t) \in X^{-1}$ для $g(t)$, определенных для каждого t в теореме 4.1.

Пример 4.1. Пусть $n = 2$, $T = 2$,

$$\Gamma(t) = \left\{ (x_1, x_2): x_2 = \sin \left(x_1(1-t)^{-1/3} \right), x_1 \in [-1, 1] \right\},$$

тогда $g = g(t) \in X^{-1}$.

5. Вероятностная интерпретация решения параболического уравнения для обобщенных g, φ . Всюду ниже полагаем, что для процесса $y(t)$ и уравнений (1.1)–(1.2) выполнены предположения § 1, кроме того, предполагаем, что случайный начальный вектор $a = y(0)$ имеет плотность распределения $\rho \in H^0 = L_2(D)$. Полагаем, что для п.в. $t \in [0, T]$ задана гиперповерхность $\Gamma(t)$, для которой выполнены предположения теоремы 4.1, $g(t)$ — соответствующие элементы $\mathcal{W}^* \cap H^{-1}$, определенные в теореме 4.1, g — соответствующий элемент X^{-1} .

Пусть $\Gamma(t, \varepsilon)$ определены в (1.3)–(1.4), $l_\varepsilon(t)$ — величины, заданные (1.5).

Теорема 5.1. Пусть $\rho \in L_2(D)$, $g \in \mathcal{X}$.

а) Для любого $t > 0$ существует такая случайная величина $\hat{t}(t)$, что $l_\varepsilon(t) \rightarrow \hat{t}(t)$ по распределению при $\varepsilon \rightarrow +0$.

б) Пусть $z \in \mathbb{C}$. Введем обобщенную функцию $g_1 = zg$. Пусть $V_1 = L(g_1)g$, $V = zV_1$ (иными словами, $V = zL(zg)g$). Тогда $V \in Y^1$,

$$1 + (V(\cdot, 0), \rho)_{H^0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{E} \exp \{z l_\varepsilon(T)\} = \mathbf{E} \exp \{z \hat{t}(T)\}, \quad (5.1)$$

причем предел имеет место равномерно по $z \in \mathbb{C}$: $|z| \leq 1$.

Следствие 5.1. В предположениях теоремы 5.1 $\mathbf{E} e^{k\hat{t}(t)} < +\infty$, $\mathbf{E} \hat{t}(t)^k < +\infty$ ($\forall k > 0$).

З а м е ч а н и е 5.1. В работе [4] было в принципе установлено существование локального времени пребывания на гладких гиперповерхностях общих многомерных процессов Ито. Точнее, там доказано существование непрерывных неубывающих процессов $\hat{t}(t)$, возрастающих только на гиперповерхности и таких, что их можно получить как предел п.н. величин $\hat{l}_\varepsilon(t) = \int_0^t \hat{g}_\varepsilon(y(t)) dt$, где $\hat{g}_\varepsilon$ — некоторые неотрицательные функции; но был оставлен открытым вопрос, можно ли в общем случае

взять $\widehat{g}_\varepsilon = g_\varepsilon$ (индикатор окрестности гиперповерхности с нормирующим множителем).

Везде ниже $\hat{t}(t)$ — величины из теоремы 5.1.

Теорема 5.2. Пусть выполнены предположения теоремы 5.1, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in X^{-1}$, функция $R \in L_2(D)$ измерима, $\varphi_\varepsilon \in L_2(Q)$ — измеримые функции такие, как в теореме 3.1 для данного φ , $V = L(zg)\varphi + \mathcal{L}(zg)R$. Тогда

$$(V(\cdot, 0), \rho)_{H^0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{E} \left\{ R(y(T)) \text{Ind} \{ \tau_D > T \} \exp \{ z l_\varepsilon(T) \} + \int_0^{\tau_D \wedge T} \exp \{ z l_\varepsilon(t) \} \varphi_\varepsilon(y(t), t) dt \right\}. \quad (5.2)$$

Доказательство теоремы 5.2. Введем функции $R_\varepsilon \in C^2(D)$ такие, что $\|R_\varepsilon - R\|_{H^0} \rightarrow 0$. Введем функции $g_\varepsilon(x, t) = \varepsilon^{-1} \text{Ind} \{ x \in \Gamma(t, \varepsilon) \}$, $V_\varepsilon = L(zg_\varepsilon)\varphi + \mathcal{L}(zg_\varepsilon)R_\varepsilon$. Имеем $V_\varepsilon \in W_q^{2,1}(Q)$, $\forall q > 1$, в силу [5, § IV.9]. Введем функцию

$$W(t) = V_\varepsilon(y(t), t) \exp \left\{ z \int_0^t g_\varepsilon(y(r), r) dr \right\}.$$

Имеем

$$d_t W(t) = \exp \left\{ z \int_0^t g_\varepsilon(y(r), r) dr \right\} d_t V_\varepsilon(y(t), t) + z g_\varepsilon(y(t), t) W(t) dt.$$

Поскольку $V_\varepsilon \in W_q^{2,1}(Q)$, $\forall q > 1$, для $d_t V_\varepsilon(y(t), t)$ можно применить формулу Ито § II.10 [8]. Используя эту формулу, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (W(\tau_D \wedge T) - W(0)) &= \mathbf{E} (W(\tau_D \wedge T) - V_\varepsilon(y(0), 0)) \\ &= -\mathbf{E} \int_0^{\tau_D \wedge T} \exp \left\{ z \int_0^t g_\varepsilon(y(r), r) dr \right\} \varphi_\varepsilon(y(t), t) dt. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} V_\varepsilon(y(0), 0) &= (V_\varepsilon(\cdot, 0), \rho)_{H^0} \\ &= \mathbf{E} \left\{ R_\varepsilon(y(T)) \text{Ind} \{ \tau_D > T \} \exp \left(z \int_0^{\tau_D \wedge T} g_\varepsilon(y(t), t) dt \right) + \int_0^{\tau_D \wedge T} \exp \left\{ z \int_0^t g_\varepsilon(y(r), r) dr \right\} \varphi_\varepsilon(y(t), t) dt \right\}. \quad (5.3) \end{aligned}$$

По теореме 3.1 имеем $V_\varepsilon \rightarrow V$ в Y^1 . Отсюда получаем требуемое.

Доказательство теоремы 5.1. Докажем сначала п. б). Пусть $g_\varepsilon(x, t) = \varepsilon^{-1} \text{Ind} \{x \in \Gamma(t, \varepsilon)\}$, $V_\varepsilon = zL(zg_\varepsilon)g_\varepsilon$. Это означает, что V_ε является решением задачи

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{A}V_\varepsilon + zg_\varepsilon V_\varepsilon = -zg_\varepsilon, \quad V_\varepsilon(x, t)|_{x \in \partial D} = 0, \quad V_\varepsilon(x, T) = 0. \quad (5.4)$$

Из формулы Ито (§ II.10 [8]) имеем аналогично (5.3)

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(a, 0) &= \mathbf{E} \int_0^{\tau_D \wedge T} g_\varepsilon(y(t), t) \exp \left(z \int_0^t g_\varepsilon(y(r), r) dr \right) dt \\ &= \mathbf{E} \exp \left(z \int_0^{\tau_D \wedge T} g_\varepsilon(y(t), t) dt \right) - 1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Значит,

$$\phi_\varepsilon(z) = (V_\varepsilon(\cdot, 0), \rho)_{H^0} + 1 = \mathbf{E} \exp \{z l_\varepsilon(T)\}. \quad (5.6)$$

Отсюда получаем утверждение б) теоремы 5.1.

Докажем утверждение а). По теореме 3.1 имеем $V_\varepsilon \rightarrow V$ в Y^1 равномерно по $z \in \mathbf{C}$: $|z| \leq 1$. Введем функцию $\phi(z) = (V(\cdot, 0), \rho)_{H^0} + 1$. По доказанному $\phi_\varepsilon(z) \rightarrow \phi(z)$ равномерно по $z \in \mathbf{C}$: $|z| \leq 1$. По теореме Леви это означает, что $\phi(z)$ — характеристическая функция некоторой случайной величины $\hat{t}(T)$, к которой величины $l_\varepsilon(T)$ сходятся по распределению. Теорема 5.1 доказана.

Теорема 5.3. Пусть $g \in X^{-1}$, $V = L(0)g$, тогда

$$(V(\cdot, 0), \rho)_{H^0} = \mathbf{E} \hat{t}(T).$$

Доказательство. Имеем $\mathbf{E} l_\varepsilon = (\rho, V_\varepsilon(\cdot, 0))_{H^0}$, где $V_\varepsilon = L(0)g_\varepsilon$, $g_\varepsilon(x, t) = \varepsilon^{-1} \text{Ind} \{x \in \Gamma(t, \varepsilon)\}$. По теореме 5.1 $\mathbf{E} l_\varepsilon(T) \rightarrow \mathbf{E} \hat{t}(T)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, по теореме 3.1 $V_\varepsilon \rightarrow V$ в Y^1 . Отсюда получаем требуемое.

З а м е ч а н и е 5.2. Для немарковских процессов Ито $y(t)$ в предположениях [9] (т.е. когда $\beta dw(t) = \tilde{\beta} d\tilde{w}(t) + \hat{\beta} d\hat{w}(t)$, где $\tilde{\beta}, \hat{\beta}$ — случайные неупреждающие по отношению к $\hat{w}(t)$ функции, $\tilde{\beta} \tilde{\beta}^T \geq \delta I > 0$) можно получить аналоги теорем 5.1–5.3 при помощи подхода [9]–[10].

6. Явная формула для локального времени и сильная сходимость. Пусть выполнены предположения п. 5. Сохраняем все обозначения п. 5 (в частности, для $g, l_\varepsilon(T), g_\varepsilon$).

Пусть ниже β_j , $j = 1, \dots, n$, — столбцы матрицы β в (1.1), $\mathcal{F}_t$ — поток σ -алгебр событий, порожденных $\{a, w(s), s \leq t\}$. Пусть $\mathcal{M}(g)$: $X^{-1} \rightarrow H^0$ — оператор, сопоставляющий функции $\varphi \in X^{-1}$ значение $V(x, t)|_{t=0} = \mathcal{M}(g)\varphi$.

Теорема 6.1. Пусть начальный вектор a имеет плотность распределения $\rho \in L_\infty(D)$, $g \in X^{-1}$, матрица $\beta(x, t)$ непрерывна. Пусть

$V = L(0)g$. Тогда $V \in Y^1$ и $\mathbf{E}|l_\varepsilon(T) - \hat{\mathbf{t}}(T)|^2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где случайная величина

$$\hat{\mathbf{t}}(T) = V(a, 0) + \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_D \wedge T} \frac{\partial V}{\partial x}(y(t), t) \beta_j(y(t), t) dw_j(t). \quad (6.1)$$

Здесь под $\partial V/\partial x$ понимаем измеримую по Борелю функцию, являющуюся представителем класса эквивалентности $\partial V/\partial x \in L_2(Q)$. Функции

$$\xi_j(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(y(t), t) \beta_j(y(t), t)$$

таковы, что $\mathbf{E} \int_0^T |\xi_j(t)|^2 dt < +\infty$ ($\forall j$) и для некоторой последовательности прогрессивно измеримых относительно потока $\mathcal{F}_t$ случайных функций времени $\xi_{\varepsilon, j}(t)$, $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$, выполнено

$$\mathbf{E} \int_0^T |\xi_{j, \varepsilon}(t) - \xi_j(t)|^2 dt \rightarrow 0, \quad \sup_{\varepsilon} \mathbf{E} \int_0^T |\xi_{j, \varepsilon}(t)|^2 dt < +\infty \quad (\forall j).$$

Следствие 6.1. Пусть $p(x, t)$ — плотность распределения процесса $y(t)$, обрывающегося на ∂D (т.е. $p = \mathcal{M}(0)^* \rho$). Тогда в предположениях и обозначениях теоремы 6.1 имеем

$$\mathbf{E} \hat{\mathbf{t}}(T)^2 = \int_D |V(x, 0)|^2 \rho(x) dx + \sum_{j=1}^n \int_Q \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) \beta_j(x, t) \right|^2 p(x, t) dx dt.$$

Лемма 6.1. Пусть в предположениях теоремы 6.1 $V_\varepsilon = L(0)g_\varepsilon$,

$$\xi_{j, \varepsilon}(t) = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x}(y(t), t) \beta_j(y(t), t).$$

Тогда

$$\ell_\varepsilon(T) = V_\varepsilon(a, 0) + \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_D \wedge T} \xi_{j, \varepsilon}(t) dw_j(t) \quad (6.2)$$

и $\mathbf{E}|l_\varepsilon(T) - \hat{\mathbf{t}}(T)|^2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство леммы 6.1. Пусть p — то же, что в следствии 6.1. Заметим, что $p \in L_\infty(Q)$. Обозначим

$$\ell_\varepsilon^{x, 0}(T) = \int_0^{\tau_D \wedge T} g_\varepsilon(y^{x, 0}(t), t) dt.$$

Для $V_\varepsilon = L(0)g_\varepsilon$ имеем $g_\varepsilon = -\partial V_\varepsilon/\partial t - AV_\varepsilon$. По теореме 9.1 § IV.9 [5] $V_\varepsilon \in W_q^{2, 1}(Q)$ ($\forall q > 1$). Для $x \in D$ из формулы Ито (§ II.10 [8]) имеем

$$\begin{aligned} -V_\varepsilon(a, 0) &= V_\varepsilon(y(\tau_D \wedge T), \tau_D \wedge T) - V_\varepsilon(a, 0) \\ &= - \int_0^{\tau_D \wedge T} g_\varepsilon(y(t), t) dt + \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_D \wedge T} \xi_j(y(t), t) dw_j(t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\ell_\varepsilon(T) = V_\varepsilon(a, 0) + \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_D \wedge T} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x}(y(t), t) \beta_j(y(t), t) dw_j(t).$$

Отсюда получаем (6.2). Функция $\partial V_\varepsilon(x, t)/\partial x$ непрерывна, отсюда следует, что функции $\xi_{\varepsilon, j}(t)$ прогрессивно измеримы относительно потока $\mathcal{F}_t$.

Обозначим $W_\varepsilon = V_\varepsilon - V$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^{\tau_D \wedge T} |\xi_{j, \varepsilon}(t) - \xi_j(t)|^2 dt &\leq c \mathbf{E} \int_0^{\tau_D \wedge T} \left| \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}(y(t), t) \right|^2 dt \\ &\leq c \int_Q \left| \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}(x, t) \right|^2 p(x, t) dx dt \leq c \|p\|_{L_\infty(Q)} \|W_\varepsilon\|_{Y^1} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |V_\varepsilon(a, 0) - V(a, 0)|^2 &\leq c \int_D \|W_\varepsilon(x, 0)\|^2 \rho(x) dx \\ &\leq c \|\rho\|_{L_\infty(D)} \|W_\varepsilon\|_{Y^1} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

по теореме 3.1 ($c > 0$ — некоторая константа). Лемма 6.1 доказана.

Доказательство теоремы 6.1. прямо следует из леммы 6.1 и из (6.2)–(6.4).

В случае стационарных коэффициентов выведем аналог формулы Танаки (см. [1], [2], [11], [12]).

Теорема 6.2. Пусть $\rho \in L_\infty(D)$, $\beta(x, t) \equiv \beta(x)$, $f(x, t) \equiv f(x)$, $\Gamma(t) \equiv \Gamma$ не зависят от времени, функция $\beta(x)$ непрерывна. Пусть $F(x)$ — решение задачи $\mathcal{A}F = g$, $F|_{\partial D} = 0$ в классе H^1 . Тогда $F \in C(D)$ и (п.н.)

$$\hat{t}(T) = F(y(\tau_D \wedge T)) - F(a) - \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_D \wedge T} \frac{\partial F}{\partial x}(y(t)) \beta_j(y(t)) dw_j(t). \quad (6.5)$$

Здесь под $\partial F/\partial x$ понимаем измеримую по Борелю функцию, являющуюся представителем класса эквивалентности $\partial F/\partial x \in L_2(D)$. Функции

$$\hat{\xi}_j(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(y(t)) \beta_j(y(t))$$

таковы, что $\mathbf{E} \int_0^T |\hat{\xi}_j(t)|^2 dt < +\infty$ ($\forall j$) и $\mathbf{E} \int_0^T |\hat{\xi}_{j, \varepsilon}(t) - \hat{\xi}_j(t)|^2 dt \rightarrow 0$ для некоторой последовательности функций $\hat{\xi}_{j, \varepsilon}(t)$, $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$, прогрессивно измеримых по отношению к потоку $\mathcal{F}_t$ и таких, что

$$\sup_\varepsilon \mathbf{E} \int_0^T |\hat{\xi}_{j, \varepsilon}(t)|^2 dt < +\infty \quad (\forall j).$$

Доказательство. Пусть F_ε — решение задачи $\mathcal{A}F_\varepsilon = g_\varepsilon$, $F_\varepsilon|_{\partial D} = 0$ в классе H^1 . Для g выполнено (4.1), (4.2). По теореме III.14.1 [6], $F \in C(D)$, $F_\varepsilon \in C(D)$ и

$$\|F_\varepsilon - F\|_{C(D)} \rightarrow 0, \quad \|F_\varepsilon - F\|_{H^1} \rightarrow 0. \quad (6.6)$$

Пусть $V_\varepsilon = L(0)g$, $U_\varepsilon = V_\varepsilon + F_\varepsilon$. Имеем

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}(x, t) + \mathcal{A}U_\varepsilon(x, t) = 0, \quad U_\varepsilon(x, t)|_{x \in \partial D} = 0, \quad U_\varepsilon(T, x) = F(x). \quad (6.7)$$

Обозначим

$$\hat{\xi}_{j,\varepsilon}(t) = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x}(y(t), t) \beta_j(y(t)), \quad \hat{\xi}_{j,\varepsilon}(t) = \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x}(y(t)) \beta_j(y(t)). \quad (6.8)$$

По лемме 6.1

$$\ell_\varepsilon(T) = U_\varepsilon(a, 0) - F_\varepsilon(a) + \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_D \wedge T} \xi_{j,\varepsilon}(t) dw_j(t). \quad (6.9)$$

Имеем

$$\xi_{j,\varepsilon}(t) = \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}(y(t), t) \beta_j(y(t)) - \hat{\xi}_{j,\varepsilon}(t), \quad (6.10)$$

$$F_\varepsilon(y(\tau_D \wedge T)) = U_\varepsilon(y(\tau_D \wedge T), \tau_D \wedge T). \quad (6.11)$$

По формуле Ито § II.10 [8] и (6.7), имеем

$$U_\varepsilon(y(\tau_D \wedge T), \tau_D \wedge T) = U_\varepsilon(a, 0) + \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_D \wedge T} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}(y(t), t) \beta_j(y(t)) dw_j(t). \quad (6.12)$$

Из (6.6)–(6.12) получаем доказательство теоремы 6.2.

З а м е ч а н и е 6.1. Аналог теоремы 6.2 можно получить для $D = \mathbf{R}^n$. В этом случае (6.5) выполнено для функции F , являющейся решением уравнения $\mathcal{A}F = g$ в классе функций полиномиального порядка роста. Известную формулу Танаки для броуновского локального времени можно записать в виде (6.5), где $n = 1$, $D = \mathbf{R}$, $y(t) = a + w(t)$, $\Gamma = \{0\}$, $F(x) = 2x^+$.

7. Непрерывность локального времени.

Теорема 7.1. Пусть выполнены предположения теоремы 6.1 и сохранены обозначения этой теоремы. Пусть имеется набор гиперповерхностей $\{\Gamma(t)\} = \{\Gamma_h(t)\}$, $\Gamma_h(t) = \Gamma_0(t) + h$, $h \in \Delta$, где $\Delta \subset \mathbf{R}^n$ есть некоторое открытое множество, $\Gamma_h(t) \subset D$ ($\forall h$), $0 \in \Delta$. Пусть $\hat{t}(T) = \hat{t}(T, h)$ — соответствующие величины для $\Gamma(t) = \Gamma_h(t)$, $h \in \Delta$. Тогда $\mathbf{E}|\hat{t}(T, h) - \hat{t}(T, 0)|^2 \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Доказательство. Пусть $g(t) = g^h(t)$, $G_j^h(x, t)$ — соответствующие функции (4.2), $V^h = L(0)g^h$, $W^h = V^h - V^0$. Имеем

$$g^h(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial G_j^h}{\partial x_j}(x, t).$$

Очевидно, $G_j^h(x, t) \equiv G_j^0(x - h, t)$, $\|G_j^h - G_j^0\|_{L_2(Q)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $j = 1, \dots, n$, тогда $\|g^h - g^0\|_{X^{-1}} \rightarrow 0$. По теоремам 3.1, 6.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |\hat{t}(T, h) - \hat{t}(T, 0)|^2 &\leq c \mathbf{E} |V^h(a, 0) - V^0(a, 0)|^2 \\ &+ c \mathbf{E} \int_0^{\tau_D \wedge T} \left| \frac{\partial W^h}{\partial x}(y(t), t) \right|^2 dt \\ &\leq c \int_D \|W^h(x, 0)\|^2 \rho(x) dx + c \int_Q \left| \frac{\partial W^h}{\partial x}(x, t) \right|^2 p(x, t) dx dt \\ &\leq c \|p\|_{L_\infty(Q)} \|W^h\|_{Y^1} \leq c \|p\|_{L_\infty(Q)} \|g^h - g^0\|_{X^{-1}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

для некоторой константы $c > 0$. Теорема 7.1 доказана.

Теорема 7.2. Пусть сохраняются предположения и обозначения теоремы 6.1. Пусть $T_0 \in [0, T]$, $T_1 \in [0, T]$. Тогда $\mathbf{E} |\hat{t}(T_1) - \hat{t}(T_0)|^2 \rightarrow 0$ при $T_1 \rightarrow T_0$.

Доказательство. Пусть $\varphi_0 \in X^{-1}$, $\varphi_1 \in X^{-1}$, $\varphi_i(t) = g(t)$ для $t \leq T_i$, $\varphi_i(t) = 0$ для $t > T_i$, $i = 0, 1$. Пусть $V_i = L(0)\varphi_i$, $W = V_1 - V_0$. Очевидно, $\|\varphi_1 - \varphi_0\|_{X^{-1}} \rightarrow 0$. По теореме 3.1, $\|W\|_{Y^1} \rightarrow 0$. Далее доказательство теоремы 7.2 аналогично доказательству теоремы 7.1.

Теорема 7.3. Пусть выполнены предположения теоремы 6.2. Тогда существует вариант $\hat{t}(T)$, п.н. непрерывный по T .

Доказательство является прямым следствием (6.5).

8. Вырождение диффузии. В работах автора [7], [13] изучен ряд вопросов, связанных с предельными свойствами процессов при вырождении диффузии (включая распределения функционалов от негладких функций [13] и от моментов первого выхода из области [7]). Здесь подход [7], [13] применен к предельным свойствам локального времени в случае стремящейся к нулю диффузии. Установлено, что локальное время случайных траекторий в некотором смысле стремится к локальному времени предельной гладкой функции после усреднения по начальным значениям (хотя траектории все время остаются стохастически негладкими и по винеровскому процессу усреднение не ведется).

Рассмотрим набор коэффициентов диффузии

$$\beta = \beta_\delta, \quad \beta_\delta(x, t) \equiv \sqrt{\delta} B(x, t), \quad (8.1)$$

где число $\delta \geq 0$, $B(x, t): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ — такая матричная функция,

что $B(x, t) B(x, t)^T \geq I$. Полагаем, что при $\delta > 0$ выполнены все предположения п. 1, $D = \mathbf{R}^n$, производные $\partial^m f(x, t)/\partial x^m$, $\partial^m \beta(x, t)/\partial x^m$ ограничены, $m = 1, 2, 3, 4$, случайный начальный вектор a имеет плотность распределения $\rho \in L_\infty(\mathbf{R}^n)$, $B(x, t)$ — непрерывная функция. Полагаем, что гиперповерхность $\Gamma(t) \subset \mathbf{R}^n$ зависит от времени и для нее выполнены предположения теоремы 5.1, $g(t)$ — тот же элемент $\mathcal{W}^*$, что в теореме 4.1, $g \in X^{-1}$.

Для $\delta > 0$ через $\hat{t}_\delta(T)$ обозначаем величину, введенную в теореме 6.1; используем обозначения $y_\delta(t)$, $L_\delta(0)$, $\mathcal{M}_\delta(0)$ для соответствующих процессов $y(t)$ и введенных в п. 3, п. 6 операторов $L(0)$, $\mathcal{M}(0)$.

В частности, оператор $\mathcal{M}_\delta(0): X^0 \rightarrow H^0$ сопоставляет функции φ функцию $V(\cdot, 0) \in H^1$, где $V = L_\delta(0)\varphi$, $\delta > 0$. Переходя от параболических уравнений к уравнениям первого порядка, вводим аналогичные операторы для $\delta = 0$. По теореме 4.2.1 [14] (относящейся к более общим уравнениям) оператор $\mathcal{M}_0^*(0): H^1 \rightarrow X^1$ непрерывен. Определим оператор $\mathcal{M}_0(0): X^{-1} \rightarrow H^{-1}$ как сопряженный к нему.

Аналогично, по теореме 4.2.1 [14], операторы $L_\delta^*(0): X^k \rightarrow X^k$, $\mathcal{M}_\delta^*(0): H^k \rightarrow X^k$ непрерывны и их нормы ограничены по $\delta \in [0, 1]$, $k = 0, 1, 2$. Для сопряженных операторов отсюда следует

Предложение 8.1. Операторы $L_\delta(0): X^{-k} \rightarrow X^{-k}$, $\mathcal{M}_\delta(0): X^{-k} \rightarrow H^{-k}$ непрерывны и их нормы ограничены по $\delta \in [0, 1]$, $k = 0, 1, 2$.

Пусть, как и выше, $g_\varepsilon(x, t) = \text{Ind}\{x \in \Gamma(t, \varepsilon)\}$. Обозначаем

$$u_{\delta, \varepsilon} = \mathcal{M}_\delta(0) g_\varepsilon, \quad u_{\delta, 0} = \mathcal{M}_\delta(0) g. \quad (8.2)$$

Лемма 8.1. а) Нормы $\|u_{\delta, \varepsilon}\|_{H^{-1}}$ ограничены равномерно по $\varepsilon \in (0, 1]$, $\delta \in [0, 1]$.

б) Для $V_{\delta, \varepsilon} = L_\delta(0) g_\varepsilon$, $V_\delta = L_\delta(0) g$ нормы $\|V_{\delta, \varepsilon}(\cdot, t)\|_{H^{-1}}$, $\|V_\delta(\cdot, t)\|_{H^{-1}}$ ограничены равномерно по $t \in [0, T]$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $\delta \in [0, 1]$.

Доказательство. Утверждение а) и утверждение б) для фиксированного $t = 0$ следует сразу же из предложения 8.1, утверждение б) для всех t получаем заменой начального времени.

Обозначим $y_0^{x, 0}(t)$ решение уравнения (1.1)–(1.2) с $\beta \equiv 0$ и начальным условием $y(0) = x$, $x \in \mathbf{R}^n$.

Предложение 8.2. Имеет место равенство в $H^0 = L_2(\mathbf{R}^n)$:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \text{Ind}\{y_0^{x, 0}(t) \in \Gamma(\varepsilon, t)\} dt = u_{0, \varepsilon}(x) = V_{0, \varepsilon}(x, 0).$$

Кроме того, для $\delta > 0$ выполнено

$$\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E} \int_0^T \text{Ind}\{y_\delta(t) \in \Gamma(\varepsilon, t)\} dt = (\rho, u_{\delta, \varepsilon})_{H^0}.$$

(Здесь первое равенство следует из теоремы 1.1 [13], второе — из теоремы 5.3.)

Теорема 8.1. $u_{\delta,\varepsilon} \rightarrow u_{0,0}$ слабо в H^{-1} при $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$.

Из предложения 8.1 и теоремы 8.1 видно, что естественным является следующее определение.

О п р е д е л е н и е 8.1. Локальным временем пребывания на Γ до момента T для набора траекторий $\{y_0^{x,0}(t)\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ называем $u_{0,0} \in H^{-1}$.

Отметим, что если выполнено $u_{0,0} \in H^0$, то $u_{0,0} = u_{0,0}(x)$ является измеримой по Лебегу функцией от x . Приведем пример, в котором $u_{0,0} \in H^0$, локальное время задано для любого $x = y_0^{x,0}(0)$ и является не обобщенной, а ограниченной измеримой функцией от x .

П р и м е р 8.1. Пусть $n = 1, D = \mathbb{R}, \Gamma(t) \equiv \{0\}$. Полагаем, что функции $f(x, t), B(x, t)$ измеримы и ограничены вместе со всеми производными по $x, |B(x, t)| \geq 1$, число $\delta \geq 0$, функция $f(\cdot, t): [0, T] \rightarrow C^1(\mathbb{R})$ кусочно-непрерывна, $|f(0, t)| \geq c_1 (\forall t)$, где $c_1 > 0$ — некоторая константа. Тогда $u_{0,0}(x) = \sum_{k=1}^N s(\theta_k) |f(0, \theta_k)|^{-1}$, где N — число посещений нуля процессом $y_0^{x,0}(t)$ при $t \in [0, T]$, θ_k — моменты времени посещения, $k = 1, \dots, N, s(t) = 1$ при $t \in (0, T), s(0) = s(T) = \frac{1}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 8.1.

Лемма 8.2. Последовательность $u_{\delta,0}$ слабо сходится к $u_{0,0}$ при $\delta \rightarrow 0$ в пространстве H^{-1} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем множество $B^+ = \{\xi \in H^1: \xi(x) \geq 0, \|\xi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = 1\}$. Для $\xi \in B^+$ обозначим $p_\delta = \mathcal{M}_\delta^*(0)\xi$. Заметим, что функция $p_\delta(x, t)$ является плотностью распределения решения $y(t) = y_\delta(t)$ уравнения (1.1), (1.2) при условии, что вектор $y(0)$ имеет плотность распределения $\xi(x)$, с учетом (8.1). Известно, что $E \sup_t |y_\delta(t) - y_0(t)|^2 \rightarrow 0$. Отсюда получаем, что $p_\delta \rightarrow p_0$ слабо в X^0 при $\delta \rightarrow 0$. По предложению 8.1, $\|p_\delta\|_{X^1} \leq \text{const} (\forall \delta \in [0, 1])$. Значит,

$$p_\delta \rightarrow p_0 \quad \text{слабо в } X^1 \text{ при } \delta \rightarrow 0. \quad (8.3)$$

Отсюда следует, что для любого $\xi \in B^+$ выполнено

$$(u_{\delta,0} - u_{0,0}, \xi)_{H^0} = (g, p_\delta - p_0)_{X^0} \rightarrow 0. \quad (8.4)$$

Линейная оболочка B^+ плотно в H^1 ; отсюда, из леммы 8.1 и соотношения (8.4) получаем лемму 8.2.

Продолжим доказательство теоремы 8.1. В силу леммы 8.1 достаточно доказать, что $u_{\delta,\varepsilon} \rightarrow u_{0,0}$ слабо в H^{-2} при $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$. Пусть $\xi \in H^2, u_{\delta,1}, u_{\delta,0}$ заданы (8.2). Имеем

$$(u_{\delta,\varepsilon} - u_{0,0}, \xi)_{H^0} = R_1(\delta) + R_2(\delta, \varepsilon),$$

где

$$R_1(\delta) = (u_{\delta,0} - u_{0,0}, \xi)_{H^0}, \quad R_2(\delta, \varepsilon) = (u_{\delta,\varepsilon} - u_{\delta,0}, \xi)_{H^0}.$$

Имеем $R_1(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ по лемме 8.1,

$$\begin{aligned} R_2(\delta, \varepsilon) &= (\mathcal{M}_\delta(0)(g_\varepsilon - g), \xi)_{H^0} = (g_\varepsilon - g, \mathcal{M}_\delta^*(0)\xi)_{H^0} \\ &\leq \|g_\varepsilon - g\|_{X^{-1}} \|\mathcal{M}_\delta^*(0)\xi\|_{X^1} \leq \text{const} \|g_\varepsilon - g\|_{X^{-1}} \|\xi\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Теорема 8.1 доказана.

Пусть $\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_W$ суть σ -алгебры событий, порожденные соответственно начальным вектором a в (1.1) и винеровским процессом $w(s)$, $s \in [0, T]$; $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — исходное вероятностное пространство, $\Omega = \{\omega\}$.

Пусть $V_\delta = L_\delta(0)g$, $\beta_\delta^{(j)}$ — столбцы матрицы β_δ . По теореме 6.1 имеем

$$\hat{t}_\delta(T) = V_\delta(a, 0) + \sum_{j=1}^n \int_0^T \frac{\partial V_\delta}{\partial x}(y_\delta(t), t) \beta_\delta^{(j)}(y_\delta(t), t) dw_j(t). \quad (8.5)$$

Обозначим

$$\eta_\delta = \hat{t}_\delta(T) - \mathbf{E} \{ \hat{t}_\delta(T) \mid \mathcal{F}_a \}, \quad \bar{\eta}_\delta = \mathbf{E} \{ \eta_\delta \mid \mathcal{F}_W \}. \quad (8.6)$$

Имеем из (8.5)

$$\eta_\delta = \sum_{j=1}^n \int_0^T \frac{\partial V_\delta}{\partial x}(y_\delta(t), t) \beta_\delta^{(j)}(y_\delta(t), t) dw_j(t). \quad (8.7)$$

Теорема 8.2. а) Для любого $\rho \in H^1$ выполнено

$$\mathbf{E} \hat{t}_\delta(T) \rightarrow (u_{0,0}, \rho)_{H^0} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (8.8)$$

б) Пусть $\rho \in H^2$. Тогда

$$\mathbf{E} |\bar{\eta}_\delta|^2 \leq \delta \cdot \text{const}. \quad (8.9)$$

Доказательство. Соотношение (8.8) следует из (8.5) и леммы 8.2. Докажем (8.9). Пусть $p(x, t, \omega)$ — условная относительно $\mathcal{F}_W$ плотность распределения процесса $y_\delta(t)$, т.е. для любой области $G \subset \mathbf{R}^n$

$$\int_G p(x, t, \omega) dx = \mathbf{P} \{ y_\delta(t) \in G \}.$$

Напомним, что $\mathcal{C}^k = C([0, T] \rightarrow H^k)$.

Предложение 8.3. Пусть вектор $a = y_\delta(0)$ не зависит от $w(t)$ и имеет плотность распределения $\rho \in H^0$. Тогда существует условная относительно $\mathcal{F}_W$ плотность распределения процесса $y_\delta(t)$: $p = p(x, t, \omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{C}^0)$. Если $\rho \in H^k$, то $p(x, t, \omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{C}^k)$, и

$$\mathbf{E} \|p(\cdot, \omega)\|_{\mathcal{C}^2}^2 \leq \text{const} \mathbf{E} \|\rho\|_{H^k}^2, \quad k = 0, 1, 2.$$

Это предложение следует из теоремы 2.2 [10]; последняя оценка выполнена по теореме 4.2.1 [14] в силу свойств параболического уравнения для p , выведенного в теореме 5.3.1 [14].

Продолжим доказательство теоремы 8.2. Имеем

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_\delta &= \sum_{j=1}^n \int_0^T dw_j(t) \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial V_\delta}{\partial x}(x, t) \beta_\delta^{(j)}(x, t) p(x, t, \omega) dx, \\ \mathbf{E} |\bar{\eta}_\delta|^2 &= \mathbf{E} \sum_{j=1}^n \int_0^T dt \int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial V_\delta}{\partial x}(x, t) \beta_\delta^{(j)}(x, t) p(x, t, \omega) \right|^2 dx \\ &\leq \text{const } \mathbf{E} \sum_{j=1}^n \int_0^T \|V_\delta(\cdot, t)\|_{H^{-1}}^2 \|\beta_\delta^{(j)}(x, t) p(x, t, \omega)\|_{H^2}^2 dt \\ &\leq \delta \text{const } \mathbf{E} \|p(\cdot, \omega)\|_{X^2}^2 \leq \delta \text{const } \mathbf{E} \|\rho\|_{H^2}^2.\end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство выполнено в силу (8.1) и леммы 8.1а). Теорема 8.2 доказана.

З а м е ч а н и е 8.1. Пусть $\rho \in W_2^k(\mathbf{R}^n)$, $k > n/2 + 2$, $\delta > 0$ фиксировано, производные $\partial^m f / \partial x^m$, $\partial^m \beta / \partial x^m$ ограничены, $m = 1, \dots, k+2$. Применяя подход, использованный выше для теоремы 8.2, можно доказать, что существует предел при $\varepsilon \rightarrow +0$ в пространстве $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ у величин $\bar{l}_\varepsilon(x, t)$, где $x \in \mathbf{R}^n$, $t > 0$,

$$\bar{l}_\varepsilon(x, t) = \mathbf{E} \{l_\varepsilon(x, t) \mid \mathcal{F}_W\}, \quad l_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^t \text{Ind} \{ |y(r) - x| < \varepsilon \} dr.$$

(Заметим, что при $n > 1$ не существует предел величин $l_\varepsilon(x, t)$ без условного усреднения, поскольку, как известно, локальное время пребывания многомерного процесса в точке не существует.)

В заключение отметим, что на основе теоремы 3.1 в [15], [16] решались задачи управления с функционалами, зависящими от локального времени. Кроме того, теоремы 4.1, 5.1 позволяют интерпретировать задачи, решаемые в [17], как задачи управления локальным временем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Geman D., Horowitz J. Occupation density. — Ann. Probab., 1980, v. 8, № 1, p. 1–67.
2. Бородин А. Н. Броуновское локальное время. — Успехи матем. наук, 1989, т. 44, в. 2, с. 7–48.
3. Бородин А. Н., Ибрагимов И. А. Пределные теоремы для функционалов от случайных блужданий. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1994. Т. 195, 285 с.
4. Bass R. F. Occupation times of d -dimensional semimartingales. — Progr. Probab. Statist., 1983, v. 5, p. 51–96 (Seminar on Stochastic Processes, 1982).

5. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1968.
7. Докучаев Н. Г. Интегральные оценки для решений обыкновенных дифференциальных уравнений при обрыве на границе области. — Дифференц. уравнения, 1992, т. 28, № 11, с. 1890–1900.
8. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977, 399 с.
9. Докучаев Н. Г. Краевые задачи для функционалов от процессов Ито. Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 3, с. 464–481.
10. Докучаев Н. Г. Распределения процессов Ито: оценки для плотности и для условных ожиданий интегральных функционалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 4, с. 825–833.
11. Ватанабэ Ш., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.
12. Насыров Ф. С. О локальных временах для функций и случайных процессов. Ч. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 4, с. 798–812; 1996, т. 41, в. 2, с. 284–299.
13. Докучаев Н. Г. Интегральные оценки для решений обыкновенных дифференциальных уравнений и их применения к негладким задачам оптимального управления. — Дифференц. уравнения, 1991, т. 27, № 10, с. 1671–1691.
14. Розовский Б. Л. Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов. М.: Наука, 1983, 208 с.
15. Докучаев Н. Г. Стохастические задачи управления для функционалов от локального времени. — Вестн. С.-Петербург. ун-та, сер. 1, 1997, в. 2, № 8, с. 112–114.
16. Докучаев Н. Г. Уравнения для распределений локального времени пребывания диффузионного процесса на поверхности и задачи управления. — Записки научн. семин. ПОМИ, 1997, т. 244, с. 96–118.
17. Докучаев Н. Г. Параболические уравнения без граничного условия Коши и задачи управления диффузионными процессами. Ч. 2. — Дифференц. уравнения, 1995, т. 31, № 8, с. 1409–1418.

Поступила в редакцию
20.I.1997