Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, Слабая компактность случайных сумм независимых случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 2, 248–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 10:46:32

© 1998 г.

КРУГЛОВ В. М.*

СЛАБАЯ КОМПАКТНОСТЬ
СЛУЧАЙНЫХ СУММ
НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Исследуется сдвиг-компактность случайных сумм $S_{N_n}^{(n)}, S_k^{(n)} = X_{n,1} + \dots + X_{n,k}$, независимых случайных величин со случайным числом слагаемых N_n в предположении, что в каждой сумме слагаемые и их число независимы и что слагаемые удовлетворяют условию равномерной предельной малости:

$$\max_{1 \leq k \leq N_n} P\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$$

по вероятности для любого $\varepsilon > 0$. Приведен ряд необходимых и достаточных условий для слабой компактности случайных сумм $S_{N_n}^{(n)} - A_n$ и указан вид центрирующих постоянных A_n .

Ключевые слова и фразы: случайная величина, функция распределения, слабая сходимость, слабая компактность, сдвиг-компактность, случайная сумма.

1. Формулировки утверждений

В настоящей статье приводится ряд необходимых и достаточных условий сдвиг-компактности последовательностей случайных сумм независимых случайных величин, при условии независимости числа слагаемых и самих слагаемых в каждой сумме. Из приводимых ниже теорем видно, что слабую компактность последовательности случайных сумм равномерно предельно малых независимых случайных величин можно выразить в терминах слабой компактности последовательностей центрированных сумм тех же самых случайных величин с неслучайным числом слагаемых и случайных сумм с неслучайными слагаемыми. Таким образом, общая задача о слабой компактности последовательностей случайных сумм упрощается, так как аналогичная задача для сумм независимых равномерно малых случайных величин с неслучайным числом

*Факультет вычислительной математики и кибернетики, МГУ, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-01919, 96-01-01920 и INTAS-RFBR грант № 95-00-95.

слагаемых решена (см., например, лемму 2 настоящей статьи). Теорема 3 представляет собой аналог критерия сдвиг-компактности для последовательностей сумм независимых равномерно малых случайных величин с неслучайным числом слагаемых. В отношении случайных сумм с одинаково распределенными слагаемыми теоремы 5 и 6, по всей видимости, представляют собой наиболее законченные результаты.

Задача о сдвиг-компактности и, в частности, о слабой компактности последовательностей случайных сумм была предметом ряда специальных исследований. Например, в [4] и [8] приведены необходимые и достаточные условия для слабой компактности последовательностей случайных сумм, центрированных случайными величинами, а монография [2] и статьи [5], [7] содержат ряд критериев для слабой компактности последовательностей нецентрированных случайных сумм. Статья [6] содержит некоторые необходимые и достаточные условия для последовательностей случайных сумм, центрированных константами. Наша теорема 5 по своей форме не отличается от теоремы 2 из [7] и обе эти теоремы представляют собой обобщение теоремы 1 из [5]. В теореме 5 и теореме 2 из [7] фигурирует последовательность натуральных чисел $\{k_n\}_{n \geq 1}$, обладающая специальными свойствами. Отличие этих теорем состоит в том, что в [7] утверждается существование последовательности $\{k_n\}_{n \geq 1}$, а мы предлагаем явную конструкцию построения чисел k_n . Кроме того, доказательство теоремы 5 проще и короче, чем доказательство теоремы 2 из [7]. Наконец, незначительное изменение метода доказательства теоремы 5 позволяет доказать новую более общую теорему 6, содержащую необходимые и достаточные условия слабой компактности последовательности случайных сумм, центрированных константами.

Мы будем предполагать, что все рассматриваемые случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Условимся говорить, что последовательность случайных величин $\{W_n\}_{n \geq 1}$ слабо сходится, если последовательность функций распределения $\{F_n\}_{n \geq 1}$, $F_n(x) = \mathbf{P}\{W_n < x\}$, слабо сходится к некоторой функции распределения. Последовательность случайных величин $\{W_n\}_{n \geq 1}$ называется слабо компактной, если каждая подпоследовательность последовательности функций распределения $\{F_n\}_{n \geq 1}$ содержит свою подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой функции распределения. В соответствии с известным критерием ([1, § 9, теорема 3]) последовательность случайных величин $\{W_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_n \mathbf{P}\{|W_n| \geq x\} = 0. \quad (1)$$

Записи $F_n \Rightarrow F$ (или $\mathbf{P}\{W_n < x\} \Rightarrow F(x)$) и $W_n \xrightarrow{\mathbf{P}} W$ будут означать, что последовательность функций распределения $\{F_n\}_{n \geq 1}$ слабо сходится к функции распределения F и последовательность случайных

величин $\{W_n\}_{n \geq 1}$ сходится по вероятности к случайной величине W . Обозначение $X \stackrel{d}{=} Y$ будет использоваться, чтобы подчеркнуть, что случайные величины X и Y одинаково распределены.

Пусть для каждого $n = 1, 2, \dots$ даны независимые случайные величины $N_n, X_{n,k}, k = 1, 2, \dots$, причем N_n принимает натуральные значения. Обозначим $l_n(q)$ левую q -квантиль, $q \in (0, 1)$, случайной величины N_n , определение левой квантили дано перед формулировкой леммы 4,

$$S_k^{(n)} = X_{n,1} + X_{n,2} + \dots + X_{n,k}, \quad \alpha_{n,k} = \alpha_{n,k}(v) = \int_{|x| < v} x dP\{X_{n,k} < x\},$$

где v — произвольное положительное число.

Теорема 1. *Предположим, что выполняется условие*

$$\sup_{1 \leq k \leq N_n} P\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{P} 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Для того чтобы при некотором подборе вещественных чисел A_n последовательность случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)} - A_n\}_{n \geq 1}$ была слабо компактной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:

А) для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$ последовательности случайных величин

$$\left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} (X_{n,k} - \alpha_{n,k}) \right\}_{n \geq 1} \quad \text{и} \quad \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} - \text{med} \left(\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} \right) \right\}_{n \geq 1}$$

слабо компактны,

В) последовательности случайных величин

$$\left\{ \sum_{k=1}^{N_n} (X_{n,k} - \alpha_{n,k}) \right\}_{n \geq 1} \quad \text{и} \quad \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} - \text{med} \left(\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} \right) \right\}_{n \geq 1}$$

слабо компактны.

Постоянные A_n можно выбрать по формуле

$$A_n = C_n + \text{med} \left(\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где C_n — любые вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sup_n |C_n| < \infty$.

Возможно стоит отметить, что в следующем замечании предположение (2) о равномерной предельной малости случайных величин не используется.

З а м е ч а н и е 1. Для того чтобы при некотором подборе вещественных чисел A_n последовательность случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)} - A_n\}_{n \geq 1}$

была слабо компактной, достаточно, чтобы для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$ последовательность случайных величин

$$\left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} (X_{n,k} - \alpha_{n,k}) \right\}_{n \geq 1}$$

была слабо компактной и числовая последовательность

$$\left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} \alpha_{n,k} - \text{med} \left(\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} \right) \right\}_{n \geq 1}$$

была ограниченной.

Постоянные A_n можно выбрать по формуле, указанной в теореме 1.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для того случая, когда условие (2), означающее предельную равномерную малость случайных величин $X_{n,k}$, $1 \leq k \leq N_n$, заменяется условием предельного постоянства этих случайных величин. Обозначим $m_{n,k}$ медиану случайной величины $X_{n,k}$,

$$\beta_{n,k} = \beta_{n,k}(v) = \int_{|x| < v} x dP\{X_{n,k} - m_{n,k} < x\},$$

где v — произвольное положительное число.

Теорема 2. *Предположим, что выполняется условие*

$$\sup_{1 \leq k \leq N_n} P\{|X_{n,k} - m_{n,k}| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{P} 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Для того чтобы при некотором подборе вещественных чисел A_n последовательность случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)} - A_n\}_{n \geq 1}$ была слабо компактной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:

А) для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$ последовательности случайных величин

$$\left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} (X_{n,k} - m_{n,k} - \beta_{n,k}) \right\}_{n \geq 1} \quad \text{и} \\ \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} (m_{n,k} + \beta_{n,k}) - \text{med} \left(\sum_{k=1}^{N_n} (m_{n,k} + \beta_{n,k}) \right) \right\}_{n \geq 1}$$

слабо компактны,

В) последовательности случайных величин

$$\left\{ \sum_{k=1}^{N_n} (X_{n,k} - m_{n,k} - \beta_{n,k}) \right\}_{n \geq 1} \quad \text{и} \quad \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} (m_{n,k} + \beta_{n,k}) - \text{med} \left(\sum_{k=1}^{N_n} (m_{n,k} + \beta_{n,k}) \right) \right\}_{n \geq 1}$$

слабо компактны.

Постоянные A_n можно выбрать по формуле

$$A_n = C_n + \text{med} \left(\sum_{k=1}^{N_n} (m_{n,k} + \beta_{n,k}) \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где C_n — любые вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sup_n |C_n| < \infty$.

З а м е ч а н и е 2. Теоремы 1 и 2 останутся справедливыми также в том случае, когда центрирующие постоянные A_n равны нулю, если участвующие в формулировках теорем величины

$$\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} - \text{med} \left(\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} \right) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{N_n} (m_{n,k} + \beta_{n,k}) - \text{med} \left(\sum_{k=1}^{N_n} (m_{n,k} + \beta_{n,k}) \right)$$

заменить на величины

$$\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{N_n} (m_{n,k} + \beta_{n,k}).$$

Теорема 3. Предположим, что выполняется условие (2). Для того чтобы при некотором подборе вещественных чисел A_n последовательность случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)} - A_n\}_{n \geq 1}$ была слабо компактной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{А)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sup_n \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{P} \{ |X_{n,k}| \geq x \} \geq \varepsilon \right\} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$,

В) последовательности случайных величин

$$\left\{ \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{E} \left(\frac{X_{n,k} - \alpha_{n,k}}{1 + (X_{n,k} - \alpha_{n,k})^2} \right) \right\}_{n \geq 1}, \quad \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} - \text{med} \left(\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} \right) \right\}_{n \geq 1}$$

слабо компактны, где $\alpha_{n,k} = \alpha_{n,k}(v)$ определены перед теоремой 1.

Постоянные A_n можно выбрать по формуле, указанной в теореме 1.

Предположим дополнительно, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ случайные величины $X_{n,k}, k = 1, 2, \dots$, одинаково распределены. Обозначим

$$\alpha_n = \alpha_n(v) = \int_{|x| < v} x dP\{X_{n,1} < x\},$$

$$d_n = d_n(v) = E\left(\frac{(X_{n,1} - \alpha_n)^2}{1 + (X_{n,1} - \alpha_n)^2}\right),$$

где v — произвольное положительное число.

Теорема 4. Предположим, что $N_n \rightarrow \infty$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$ и для каждого $n = 1, 2, \dots$ случайные величины $X_{n,k}, k = 1, 2, \dots$, одинаково распределены. Для того чтобы последовательность случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ была слабо-компактной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:

А) для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$ последовательность случайных величин $\{S_{l_n(q)}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ слабо компактна,

В) для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$ последовательность случайных величин $\{\sum_{k=1}^{l_n(q)} (X_{n,k} - \alpha_n)\}_{n \geq 1}$ слабо компактна и числовая последовательность $\{l_n(q) |\alpha_n|\}_{n \geq 1}$ ограничена.

Обозначим $\delta_n = L(R_n, \mathcal{E})$ расстояние Леви (см. [1, § 9, теорема 1]) между функцией распределения $R_n(x) = P\{N_n(d_n + |\alpha_n|) < x\}$, и функцией распределения $\mathcal{E}$ случайной величины, тождественно равной нулю,

$$k_n = \begin{cases} l_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), & \text{если } d_n + |\alpha_n| = 0, \\ \left[\frac{1}{|\alpha_n|}\right], & \text{если } d_n = 0 \text{ и } |\alpha_n| > 0, \\ \left[\frac{2\delta_n}{d_n + |\alpha_n|}\right] + 1, & \text{если } d_n > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа, заключенного в них, $\alpha_n = \alpha_n(v)$ и $d_n = d_n(v)$ определены перед формулировкой теоремы 4.

Теорема 5. Предположим, что $N_n \rightarrow \infty$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$ и для каждого $n = 1, 2, \dots$ случайные величины $X_{n,k}, k = 1, 2, \dots$, одинаково распределены. Для того чтобы последовательность случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ была слабо компактной, необходимо и достаточно, чтобы последовательности случайных величин $\{N_n/k_n\}_{n \geq 1}$ и $\{S_{k_n}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ были слабо компактными, где числа k_n определены в (3).

Обратимся к задаче, решенной в [5]. Следуя автору статьи [5], назовем последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ стохастически отделимой от нуля, если из нее нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся по вероятности к нулю.

З а м е ч а н и е 3. Определим $\alpha_n = \alpha_n(v)$ и $d_n = d_n(v)$, как указано перед формулировкой теоремы 4, и предположим, что $d_n > 0$ для всех n . Для того чтобы стохастически отделимая от нуля последовательность случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ была слабо компактной, необходимо и достаточно, чтобы последовательности случайных величин $\{N_n/k_n\}_{n \geq 1}$ и $\{S_{k_n}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ были слабокомпактными, где $k_n = [1/(d_n + |\alpha_n|)]$ — целая часть числа $1/(d_n + |\alpha_n|)$.

Это утверждение представляет собой некоторую конкретизацию теоремы Д. Сааса (см. доказательство теоремы 1 в [5]), в которой числа k_n не строятся, как в замечании 3, а утверждается существование последовательности натуральных чисел $\{k_n\}_{n \geq 1}$, для которой последовательности $\{N_n/k_n\}_{n \geq 1}$ и $\{S_{k_n}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ слабо компактны.

Естественно поставить вопрос об аналоге теоремы 5 в отношении центрированных сумм. Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме, доказательство которой, как будет показано, состоит в комбинации теорем 2 и 5. Обозначим m_n медиану случайной величины $X_{n,1}$,

$$\begin{aligned} \beta_n &= \int_{|x| < v} x dP\{X_{n,1} - m_n < x\}, \\ \gamma_n &= \int_{|x| < v} x dP\{X_{n,1} - m_n - \beta_n < x\}, \\ \Delta_n &= \Delta_n(v) = E\left(\frac{(X_{n,1} - m_n - \beta_n - \gamma_n)^2}{1 + (X_{n,1} - m_n - \beta_n - \gamma_n)^2}\right), \\ k_n &= \begin{cases} l_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), & \text{если } \Delta_n + |\gamma_n| = 0, \\ \left[\frac{1}{|\gamma_n|}\right], & \text{если } \Delta_n = 0 \text{ и } |\gamma_n| > 0, \\ \left[\frac{2\varepsilon_n}{\Delta_n + |\gamma_n|}\right] + 1, & \text{если } \Delta_n > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

где ε_n обозначает расстояние Леви между функциями распределения $\mathcal{E}(x)$ и $P\{N_n(\Delta_n + |\gamma_n|) < x\}$, v — произвольное положительное число.

Теорема 6. Предположим, что $N_n \rightarrow \infty$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$ и для каждого $n = 1, 2, \dots$ случайные величины $X_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots$, одинаково распределены. Для того чтобы при некотором подборе вещественных чисел A_n последовательность случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)} - A_n\}_{n \geq 1}$ была слабо компактной, необходимо и достаточно, чтобы последовательности случайных величин $\{N_n/k_n\}_{n \geq 1}$, $\{N_n(m_n + \beta_n) - \text{med}(N_n(m_n + \beta_n))\}_{n \geq 1}$ и $\{S_{k_n}^{(n)} - k_n(m_n + \beta_n)\}_{n \geq 1}$ были слабо компактными, где числа k_n определены в (4).

Постоянные A_n можно выбрать по формуле

$$A_n = C_n + \text{med}(N_n(m_n + \beta_n)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где C_n — любые вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sup_n |C_n| < \infty$.

З а м е ч а н и е 4. Теорема 6 останется справедливой также в том случае, когда центрирующие постоянные A_n равны нулю, если условие слабой компактности последовательности $\{N_n(m_n + \beta_n) - \text{med}(N_n(m_n + \beta_n))\}_{n \geq 1}$ заменить на условие слабой компактности последовательности $\{N_n(m_n + \beta_n)\}_{n \geq 1}$.

Доказательства теорем будут основаны на вспомогательных утверждениях, которые приведены в следующем разделе.

2. Леммы

Нам понадобится понятие безгранично делимой функции распределения, которое мы считаем известным. В соответствии с классическим результатом [1, § 18, теорема 1] функция распределения F является безгранично делимой тогда и только тогда, когда ее характеристическая функция f допускает следующее представление, называемое представлением Леви–Хинчина,

$$f(t) = \exp \left\{ i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \right\}, \quad (5)$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, γ — вещественное число, а G — неубывающая, непрерывная слева функция, причем $G(-\infty) = 0$ и $G(\infty) < \infty$.

Лемма 1. Пусть дана последовательность серий $X_{n,k}$, $1 \leq k \leq k_n$, $n = 1, 2, \dots$, независимых в каждой серии случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Пусть характеристическая функция f безгранично делимой функции распределения F имеет представление (5). Для того чтобы при некотором подборе вещественных постоянных A_n выполнялось соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k} - A_n < x\right\} \Rightarrow F(x) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы

1) в точках непрерывности x , $x \neq 0$, функции G

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}\{X_{n,k} < x\} &= \int_{-\infty}^x \frac{1+y^2}{y^2} dG(y), \quad x < 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}\{X_{n,k} \geq x\} &= \int_x^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y), \quad x > 0, \end{aligned}$$

$$2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_n(\varepsilon) = G(0+) - G(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_n(\varepsilon),$$

$$\mathcal{D}_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x| < \varepsilon} x^2 dP\{X_{n,k} < x\} - \left(\int_{|x| < \varepsilon} x dP\{X_{n,k} < x\} \right)^2 \right\}.$$

Постоянные A_n можно выбрать по формуле

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| < \tau} x dP\{X_{n,k} < x\} - \gamma(\tau),$$

где

$$\gamma(\tau) = \gamma + \int_{|x| < \tau} x dG(x) - \int_{|x| \geq \tau} \frac{1}{x} dG(x),$$

а число $\tau > 0$ выбрано так, что $\pm\tau$ являются точками непрерывности функции G .

Доказательство. См. [1, § 25, теорема 4].

Следующая лемма представляет собой критерий сдвиг-компактности последовательности сумм независимых случайных величин, удовлетворяющих условию равномерной малости. Едва ли эта лемма является новой, но нам не удалось найти источник, на который можно было бы сослаться.

Лемма 2. Пусть дана последовательность серий $X_{n,k}$, $1 \leq k \leq k_n$, $n = 1, 2, \dots$, независимых в каждой серии случайных величин, удовлетворяющих условию (6). Для того чтобы при некотором подборе вещественных чисел A_n последовательность случайных величин $\{S_{k_n} - A_n\}_{n \geq 1}$, $S_{k_n} = X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$, была слабо компактной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_n \sum_{k=1}^{k_n} P\{|X_{n,k}| \geq x\} = 0, \quad (7)$$

$$\sup_n \sum_{k=1}^{k_n} E \left(\frac{X_{n,k} - \alpha_{n,k}}{1 + (X_{n,k} - \alpha_{n,k})^2} \right)^2 < \infty. \quad (8)$$

Постоянные A_n можно выбрать по формуле

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n} \alpha_{n,k}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\alpha_{n,k} = \alpha_{n,k}(v)$ определены перед формулировкой теоремы 1.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что (7) не имеет места. В этом случае будет выполняться неравенство

$$\sum_{k=1}^{k_n} P\{|X_{n,k}| \geq x_n\} \geq \alpha$$

для некоторого числа $\alpha > 0$ и некоторой числовой последовательности $\{x_n\}$, $n \in \mathcal{N}$, сходящейся к бесконечности. Выберем подпоследовательность функций распределения $\{F_n\}$, $n \in \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$, $F_n(x) = P\{S_{k_n} - A_n < x\}$, которая слабо сходится к некоторой функции распределения F . По теореме Хинчина [1, § 24, теорема 2] функция распределения F безгранично делима. К последовательности $\{S_{k_n} - A_n\}$, $n \in \mathcal{N}_1$, применима лемма 1, по которой

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathcal{N}_1} \sum_{k=1}^{k_n} P\{|X_{n,k}| \geq x\} = 0$$

в противоречие нашему предположению. Условие (7) доказано. Обозначим J_n сумму величин, стоящих в (8) под знаком точной верхней грани. Утверждение (8) представляет собой незначительное обобщение известного утверждения [1, § 23, теорема 2], согласно которому оно выполняется, если последовательность $\{S_{k_n} - A_n\}_{n \geq 1}$ слабо сходится. Действительно, предположим, что (8) не имеет места. В этом случае найдется последовательность натуральных чисел $\mathcal{N}$, что $J_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}$. Выберем подпоследовательность $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$ таким образом, чтобы последовательность случайных величин $\{S_{k_n} - A_n\}$, $n \in \mathcal{N}_1$, слабо сходилась. По упомянутому утверждению из монографии [1] мы имеем, что $\sup\{J_n: n \in \mathcal{N}_1\} < \infty$, в противоречие предположению. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Из условия (6) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} |\alpha_{n,k}| = 0.$$

Поэтому наряду с (7) выполняется следующее соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_n \sum_{k=1}^{k_n} P\{|X_{n,k} - \alpha_{n,k}| \geq x\} = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_n \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|u| \geq x} \frac{u^2}{1+u^2} dP\{X_{n,k} - \alpha_{n,k} < u\} = 0.$$

Это соотношение и условие (8) являются необходимыми и достаточными условиями для вполне компактности последовательность функций $\{G_n\}_{n \geq 1}$,

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^x \frac{u^2}{1+u^2} dP\{X_{n,k} - \alpha_{n,k} < u\}.$$

Другими словами (см. [3, с. 191]), какова бы ни была последовательность натуральных чисел $\mathcal{N}$, найдется подпоследовательность $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$,

такая, что последовательность функций $\{G_n\}$, $n \in \mathcal{N}_1$, слабо сходится к некоторой функции G и $G_n(\pm\infty) \rightarrow G(\pm\infty)$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$. В соответствии с известным утверждением (см. [1, § 25, с. 128, примечание]) найдется безгранично делимая функция распределения F , такая, что

$$P\{S_{k_n} - B_n < x\} \Rightarrow F(x) \quad (9)$$

при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$, где B_n — некоторые вещественные числа. Характеристическую функцию, соответствующую функции распределения F , можно записать в виде (5). По лемме 1 в качестве чисел B_n можно взять

$$B_n = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| < \tau} x dP\{X_{n,k} < x\}, \quad n \in \mathcal{N}_1.$$

Пусть величина A_n определена, как указано в формулировке леммы. Из (9) следует, что последовательность $\{S_{k_n} - A_n\}$, $n \in \mathcal{N}_1$, слабо компактна, если числовая последовательность $\{|D_n|\}$, $n \in \mathcal{N}_1$, ограничена, где

$$D_n = \sum_{k=1}^{k_n} \left(\int_{|x| < \tau} x dP\{X_{n,k} < x\} - \int_{|x| < v} x dP\{X_{n,k} < x\} \right).$$

Величина $|D_n|$ удовлетворяет неравенству

$$|D_n| \leq d \sum_{k=1}^{k_n} (P\{c \leq X_{n,k} \leq d\} + P\{-d \leq X_{n,k} \leq -c\}),$$

где $c = \min\{v, \tau\}$, $d = \max\{v, \tau\}$. Из этого неравенства и условия 1) леммы 1, которое выполняется при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$, следует, что последовательность $\{|D_n|\}$, $n \in \mathcal{N}_1$, ограничена. Таким образом доказано, что из любой последовательности $\{S_{k_n} - A_n\}$, $n \in \mathcal{N}$, можно выделить подпоследовательность, которая слабо сходится. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть дана последовательность серий $X_{n,k}$, $1 \leq k \leq k_n$, $n = 1, 2, \dots$, независимых в каждой серии случайных величин, удовлетворяющих условию (6). Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} E \left(\frac{(X_{n,k} - \alpha_{n,k})^2}{1 + (X_{n,k} - \alpha_{n,k})^2} \right) = 0,$$

где величины $\alpha_{n,k} = \alpha_{n,k}(v)$ определены перед формулировкой теоремы 1, то

$$\sum_{k=1}^{k_n} (X_{n,k} - \alpha_{n,k}) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Эта лемма представляет собой непосредственное следствие леммы 1. Действительно, из условия леммы и леммы 1 следует (см. [1, § 25, с. 128, примечание]), что

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k} - A_n \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

при некотором выборе постоянных A_n . Характеристическая функция случайной величины, равной нулю, имеет представление (5), где $\gamma = 0$ и $G(x) = 0$ для всех x . Точка $x = v > 0$ является точкой непрерывности функции G и, следовательно, по лемме 1 центрирующие постоянные A_n можно выбрать, как указано в лемме 2. Лемма доказана.

Назовем левой (соответственно правой) q -квантилью, $q \in (0, 1)$, случайной величины X (функции распределения $F(x) = P\{X < x\}$) число

$$l(q) = \inf \{x: F(x) \geq q\} \quad \left(\text{соответственно } r(q) = \sup \{x: F(x) \leq q\} \right).$$

Лемма 4. Пусть даны функции распределения $F, F_n, n = 1, 2, \dots$. Обозначим $l(q)$ и $r(q)$ (соответственно $l_n(q)$ и $r_n(q)$) левые и правые q -квантили функции распределения F (соответственно F_n). Последовательность $\{F_n\}_{n \geq 1}$ слабо сходится к F тогда и только тогда, когда

$$l(q) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} l_n(q) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n(q) \leq r(q)$$

для всех $q \in (0, 1)$. Более того, $l(q) = r(q)$ почти всюду по мере Лебега.

Доказательство. См. [2, теорема 1.1.1] или [9].

Лемма 5. Пусть даны случайные величины X и λ , причем λ равномерно распределена на $(0, 1)$. Обозначим $l(q)$ левую q -квантиль X . Случайные величины X и $l(\lambda)$ одинаково распределены.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из определения понятия левой q -квантили.

Лемма 6. Пусть даны последовательности случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}, \{Y_n\}_{n \geq 1}, \{Z_n\}_{n \geq 1}$. Предположим, что $Z_n = X_n + Y_n, n = 1, 2, \dots$. Если любые две последовательности из этих трех слабо компактны, тогда третья последовательность также слабо компактна.

Доказательство. Утверждение следует из критерия (1).

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Докажем сначала, что условие В) является следствием условия А). Для каждого $n = 1, 2, \dots$ построим независимые случайные величины $\lambda, N'_n, X'_{n,k}, k = 1, 2, \dots$, на некотором вероятностном пространстве $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ таким образом, чтобы λ была равномерно распределена на $(0, 1)$, $N'_n \stackrel{d}{=}$

$N_n, X'_{n,k} \stackrel{d}{=} X_{n,k}$. Такие случайные величины можно построить по известной теореме Колмогорова [3, с. 103]. Без ограничения общности можно считать, что вероятностные пространства $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ и $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ совпадают и $N'_n = N_n, X'_{n,k} = X_{n,k}$. По лемме 5 случайные величины N_n и $l_n(\lambda)$ одинаково распределены и, следовательно, этим свойством также обладают случайные величины V_n и $V_n(\lambda)$, где

$$V_n = \sum_{k=1}^{N_n} (X_{n,k} - \alpha_{n,k}), \quad V_n(q) = \sum_{k=1}^{l_n(q)} (X_{n,k} - \alpha_{n,k}), \quad q \in (0, 1).$$

Из равенств

$$P\{|V_n| \geq x\} = P\{|V_n(\lambda)| \geq x\} = \int_0^1 P\{|V_n(q)| \geq x\} dq \quad (10)$$

следует, что

$$\sup_n P\{|V_n| \geq x\} \leq \int_0^1 \sup_n P\{|V_n(q)| \geq x\} dq \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow \infty$, так как для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_n P\{|V_n(q)| \geq x\} = 0$$

по критерию (1) в силу условия А). По критерию (1) последовательность случайных величин $\{V_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна.

Докажем, что выполнено условие А). Для каждого $n = 1, 2, \dots$ построим независимые случайные величины $N'_n, X'_{n,k}, X''_{n,k}, k = 1, 2, \dots$, на некотором вероятностном пространстве $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения $N'_n \stackrel{d}{=} N_n, X'_{n,k} \stackrel{d}{=} X_{n,k}, X''_{n,k} \stackrel{d}{=} X_{n,k}$. Без ограничения общности можно считать, что вероятностные пространства $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ и $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ совпадают и $N'_n = N_n, X''_{n,k} = X_{n,k}$. Заметим, что случайные величины $Z_n = S_{N_n}^{(n)} - A_n$ и $Z'_n = \sum_{k=1}^{N_n} X'_{n,k} - A_n$ одинаково распределены. По формуле полной вероятности мы имеем

$$\begin{aligned} P\{|Z_n - Z'_n| \geq x\} &= \sum_{r=1}^{\infty} P\{N_n = r\} P\left\{\left|\sum_{k=1}^r (X_{n,k} - X'_{n,k})\right| \geq x\right\} \\ &\geq \sum_{r=l_n(q)}^{\infty} P\{N_n = r\} P\left\{\left|\sum_{k=1}^r (X_{n,k} - X'_{n,k})\right| \geq x\right\}. \end{aligned}$$

Для упрощения последующих записей обозначим

$$W_n(q) = S_{l_n(q)}^{(n)} = \sum_{k=1}^{l_n(q)} X_{n,k}, \quad W'_n(q) = \sum_{k=1}^{l_n(q)} X'_{n,k}.$$

По неравенству Леви [3, с. 261] для симметричных случайных величин мы имеем

$$\mathbf{P}\left\{|W_n(q) - W'_n(q)| \geq x\right\} \leq 2\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^r (X_{n,k} - X'_{n,k})\right| \geq x\right\}$$

для всех $r = l_n(q), l_n(q) + 1, \dots$. Поэтому

$$\frac{1-q}{2} \mathbf{P}\left\{|W_n(q) - W'_n(q)| \geq x\right\} \leq \mathbf{P}\{|Z_n - Z'_n| \geq x\}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{|W_n(q) - W'_n(q)| \geq x\right\} \leq \frac{4}{1-q} \mathbf{P}\left\{|Z_n| \geq \frac{x}{2}\right\}, \quad (11)$$

так как $\mathbf{P}\{|Z_n - Z'_n| \geq x\} \leq 2\mathbf{P}\{|Z_n| \geq x/2\}$. В силу неравенства симметризации [3, с. 259]

$$\mathbf{P}\left\{|W_n(q) - \text{med } W_n(q)| \geq x\right\} \leq 2\mathbf{P}\left\{|W_n(q) - W'_n(q)| \geq x\right\},$$

и (11) мы имеем, что

$$\mathbf{P}\left\{|W_n(q) - \text{med } W_n(q)| \geq x\right\} \leq \frac{8}{1-q} \mathbf{P}\left\{|Z_n| \geq \frac{x}{2}\right\}. \quad (12)$$

По критерию (1) из (12) следует, что последовательность случайных величин $\{W_n(q) - \text{med } W_n(q)\}_{n \geq 1}$, $q \in (0, 1)$, слабо компактна. Докажем, что последовательность $\{V_n(q)\}_{n \geq 1}$, $V_n(q) = W_n(q) - \sum_{k=1}^{l_n(q)} \alpha_{n,k}$, также слабо компактна. Действительно, можно доказать (см. [2, с. 43]), что условие (2) равносильно условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq l_n(q)} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ и } q \in (0, 1).$$

По лемме 2 вместо центрирующих постоянных $\text{med } W_n(q)$ можно взять величины $\alpha_{n,1} + \alpha_{n,2} + \dots + \alpha_{n,l_n(q)}$.

Выше было доказано, что слабая компактность последовательности случайных величин $\{V_n(q)\}_{n \geq 1}$ для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$ влечет слабую компактность последовательности $\{V_n\}_{n \geq 1}$. Из равенства

$$S_{N_n}^{(n)} - A_n = V_n + \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} - A_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и неравенства симметризации [3, с. 259]

$$\mathbf{P}\{|U_n| \geq x\} \leq 2\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} - A_n\right| \geq \frac{x}{2}\right\},$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k} - \text{med}\left(\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k}\right),$$

следует, что

$$\mathbf{P}\{|U_n| \geq x\} \leq 2\mathbf{P}\left\{|S_{N_n}^{(n)} - A_n| \geq \frac{x}{4}\right\} + 2\mathbf{P}\left\{|V_n| \geq \frac{x}{4}\right\}$$

и, следовательно, последовательность случайных величин $\{U_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна. Необходимость доказана.

Достаточность. При доказательстве необходимости было установлено, что условие А) влечет условие В). Достаточность условия В) вытекает из равенства

$$S_{N_n}^{(n)} - \text{med}\left(\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k}\right) = V_n + U_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

и леммы 6. Достаточность доказана.

Нам осталось оправдать законность выбора центрирующих постоянных по указанной формуле. Если при некотором выборе A_n последовательность случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)} - A_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна, то из условия В) следует, что последовательность случайных сумм, стоящих слева в равенстве (13), также слабо компактна. Поэтому числовая последовательность $\{|C_n|\}_{n \geq 1}$,

$$C_n = A_n - B_n = (S_{N_n}^{(n)} - B_n) - (S_{N_n}^{(n)} - A_n),$$

$$B_n = \text{med}\left(\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

ограничена. Теорема доказана.

Доказательство замечания 1. Замечание, фактически, было доказано попутно при доказательстве теоремы 1. Действительно, из равенства

$$S_{l_n(q)}^{(n)} - B_n = V_n(q) + \sum_{k=1}^{l_n(q)} \alpha_{n,k} - B_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

и леммы 6 следует, что последовательность случайных величин, стоящих слева в (14), слабо компактна для почти всех по мере Лебега

$q \in (0, 1)$ и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_n \mathbf{P}\{|S_{l_n(q)}^{(n)} - B_n| \geq x\} = 0$. Из равенства

$$\mathbf{P}\{|S_{N_n}^{(n)} - B_n| \geq x\} = \int_0^1 \mathbf{P}\{|S_{l_n(q)}^{(n)} - B_n| \geq x\} dq,$$

которое можно доказать так же, как было доказано (10), следует, что

$$\sup_n \mathbf{P}\{|S_{N_n}^{(n)} - B_n| \geq x\} \leq \int_0^1 \sup_n \mathbf{P}\{|S_{l_n(q)}^{(n)} - B_n| \geq x\} dq \rightarrow 0 \quad (15)$$

при $x \rightarrow \infty$. Замечание доказано.

Доказательство теоремы 2 не приводится, так как оно почти буквально совпадает с доказательством теоремы 1.

Доказательство замечания 2. Оно состоит в формальном повторении доказательств теорем 1 и 2. Например, если последовательность случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ слабо компактна, то по теореме 1 последовательность $\{V_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна. Так как

$$S_{N_n}^{(n)} = V_n + U'_n, \quad U'_n = \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{n,k},$$

то по лемме 6 последовательность случайных величин $\{U'_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна. Замечание доказано.

Доказательство теоремы 3. Необходимость. По условию В) теоремы 1 вторая из двух перечисленных последовательностей в условии В) слабо компактна. По условию А) теоремы 1 последовательность $\{\sum_{k=1}^{l_n(q)} (X_{n,k} - \alpha_{n,k})\}_{n \geq 1}$ слабо компактна для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$. По лемме 2 для таких $q \in (0, 1)$ выполняются следующие соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_n \sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| \geq x\} = 0, \quad (16)$$

$$\sup_n \sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{E} \left(\frac{X_{n,k} - \alpha_{n,k}}{1 + (X_{n,k} - \alpha_{n,k})^2} \right)^2 = C(q) < \infty. \quad (17)$$

Докажем, что условие А) является следствием (16). Для любых чисел $x > 0$ и $\varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| \geq x\} \geq \varepsilon \right\} = \int_0^1 \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| \geq x\} \geq \varepsilon \right\} dq,$$

которое можно доказать так же, как было доказано (10). Из этого равенства и (16) следует, что

$$\begin{aligned} & \sup_n \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{P} \{ |X_{n,k}| \geq x \} \geq \varepsilon \right\} \\ & \leq \int_0^1 \mathbf{P} \left\{ \sup_n \sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{P} \{ |X_{n,k}| \geq x \} \geq \varepsilon \right\} dq \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $x \rightarrow \infty$. Аналогично, из равенства

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{E} \left(\frac{(X_{n,k} - \alpha_{n,k})^2}{1 + (X_{n,k} - \alpha_{n,k})^2} \right) \geq x \right\} \\ & = \int_0^1 \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{E} \left(\frac{(X_{n,k} - \alpha_{n,k})^2}{1 + (X_{n,k} - \alpha_{n,k})^2} \right) \geq x \right\} dq \end{aligned}$$

и (17) следует, что первая из двух последовательностей в условии В) слабо компактна. Необходимость доказана.

Достаточность. Докажем, что для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$ выполняются соотношения (16) и (17). По формуле полной вероятности мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{P} \{ |X_{n,k}| \geq x \} \geq \varepsilon \right\} &= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ N_n = r \} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^r \mathbf{P} \{ |X_{n,k}| \geq x \} \geq \varepsilon \right\} \\ &\geq \sum_{r=l_n(q)}^{\infty} \mathbf{P} \{ N_n = r \} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^r \mathbf{P} \{ |X_{n,k}| \geq x \} \geq \varepsilon \right\} \\ &\geq (1 - q) \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{P} \{ |X_{n,k}| \geq x \} \geq \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Привлекая условие А), мы видим, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_n \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{P} \{ |X_{n,k}| \geq x \} \geq \varepsilon \right\} = 0,$$

откуда следует (16). Аналогично докажем (17). Условия (16) и (17) по лемме 2 влекут слабую компактность последовательности случайных величин $\{V_n(q)\}_{n \geq 1}$ для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$. Привлекая условие В), мы видим, что выполнено условие А) теоремы 1. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Необходимость. Докажем сначала, что

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N_n} P\{|X_{n,k} - m_n| \geq \varepsilon\} \\ &= P\{|X_{n,1} - m_n| \geq \varepsilon\} \longrightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Предположим противное. В этом случае будет выполняться неравенство $P\{|X_{n,1} - m_n| \geq \varepsilon\} \geq \gamma$ для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ и всех n из некоторой последовательности $\mathcal{N}$ натуральных чисел. По критерию (1) из неравенства (11), где в определении случайной величины Z_n нужно положить $A_n = 0$, следует, что последовательность функций распределения случайных величин $W_n(q) - W'_n(q)$, $q \in (0, 1)$, $n = 1, 2, \dots$, слабо компактна. Поэтому некоторая ее подпоследовательность с индексами $n \in \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$ слабо сходится к некоторой функции распределения F . Обозначим f_n и f характеристические функции случайной величины $X_{n,1}$ и функции распределения F . По теореме непрерывности [1, § 13, теорема 1] выполняется соотношение

$$|f_n(t)|^{2l_n(q)} \longrightarrow f(t) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_1, \quad (19)$$

для каждого вещественного числа t . Заметим, что $l_n(q) \rightarrow \infty$, так как по предположению $N_n \xrightarrow{P} \infty$. Отсюда следует (см. [1, § 14, теорема 4]), что

$$P\{|X_{n,1} - X'_{n,1}| \geq \varepsilon\} \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_1.$$

Это ведет к противоречию с нашим предположением, так как по неравенству симметризации [3, с. 259]

$$P\{|X_{n,1} - m_n| \geq \varepsilon\} \leq 2P\{|X_{n,1} - X'_{n,1}| \geq \varepsilon\}.$$

Докажем условие А). По теореме 2 (см. замечание 2) последовательность случайных величин $\{N_n(m_n + \beta_n)\}_{n \geq 1}$ слабо компактна. Пусть $\tilde{l}_n(q)$ обозначает левую q -квантиль случайной величины $N_n|m_n + \beta_n|$. Из леммы 3 вытекает, что для любого $q \in (0, 1)$ числовая последовательность $\{\tilde{l}_n(q)\}_{n \geq 1}$ ограничена. Действительно, пусть $\tilde{l}_n(q) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}$, для некоторого $q \in (0, 1)$ и некоторой последовательности натуральных чисел $\mathcal{N}$. Выберем слабо сходящуюся последовательность случайных величин $\{N_n(m_n + \beta_n)\}$, $n \in \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$. По лемме 4 подпоследовательность $\{\tilde{l}_n(q)\}$, $n \in \mathcal{N}_1$, ограничена, что противоречит нашему предположению. Привлекая очевидное неравенство $l_n(q)|m_n + \beta_n| \leq \tilde{l}_n(q)$, мы видим, что для каждого $q \in (0, 1)$ числовая последовательность $\{l_n(q)|m_n + \beta_n|\}_{n \geq 1}$ ограничена. По условию А) теоремы 2 для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$ последовательность $\{\bar{V}_n(q)\}_{n \geq 1}$, где $\bar{V}_n(q) = \sum_{k=1}^{l_n(q)} (X_{n,k} - m_n - \beta_n)$, слабо компактна и, сле-

довательно, последовательность $\{S_{l_n(q)}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ также обладает этим свойством, так как

$$S_{l_n(q)}^{(n)} = \bar{V}_n(q) + l_n(q)(m_n + \beta_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказательство условия В). Докажем, что

$$\max_{1 \leq k \leq N_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\} = \mathbf{P}\{|X_{n,1}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Доказательство (20) аналогично доказательству соотношения (18). Предположим противное, т. е. что выполняется неравенство $\mathbf{P}\{|X_{n,1}| \geq \varepsilon\} \geq \gamma$ для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ и всех n из некоторой последовательности $\mathcal{N}$ натуральных чисел. С помощью рассуждений, которые привели нас к (18), мы придем к противоречию. Изменения в рассуждениях сводятся к замене величин $W_n(q) - W'_n(q)$ на величины $S_{l_n(q)}^{(n)}$ и соотношения (19) на соотношение

$$f_n(t)^{l_n(q)} \rightarrow f(t) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}.$$

Соотношение (20) позволяет воспользоваться теоремой 1, по которой для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$ последовательности случайных величин

$$\left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} (X_{n,k} - \alpha_n) \right\}_{n \geq 1} \quad \text{и} \quad \{N_n \alpha_n\}_{n \geq 1}$$

слабо компактны. По лемме 4 для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$ числовая последовательность $\{l_n(q) |\alpha_n|\}_{n \geq 1}$ ограничена.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Условие В) влечет условие А), так как

$$S_{l_n(q)}^{(n)} = \sum_{k=1}^{l_n(q)} (X_{n,k} - \alpha_n) + l_n(q) \alpha_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Достаточность условия А) следует из соотношения (15), в котором нужно положить $B_n = 0$. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5. Н е о б х о д и м о с т ь. По теореме 1 (см. замечание 2) последовательность $\{N_n |\alpha_n|\}_{n \geq 1}$ слабо компактна. По теореме 3 последовательность $\{N_n d_n\}_{n \geq 1}$ также слабо компактна и, следовательно, этим свойством обладает последовательность $\{N_n(d_n + |\alpha_n|)\}_{n \geq 1}$. По теореме 4 последовательность случайных величин $\{S_{l_n(q)}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ слабо компактна для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$. Для таких $q \in (0, 1)$ по лемме 2 выполняется соотношение

$$\sup_n l_n(q) d_n = D(q) < \infty. \quad (21)$$

Докажем, что последовательность чисел из (3) обладает требуемыми свойствами. Разделим все натуральные числа на три непересекающихся множества

$$J_1 = \{n: d_n + |\alpha_n| = 0\}, \quad J_2 = \{n: d_n = 0, |\alpha_n| > 0\}, \\ J_3 = \{n: d_n > 0\}.$$

Если $n \in J_1$, то

$$S_{k_n}^{(n)} = k_n \alpha_n = 0, \quad P\left\{\frac{N_n}{k_n} > 2\right\} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Если $n \in J_2$, то $|S_{k_n}^{(n)}| \leq 1$, $N_n/k_n \leq N_n|\alpha_n|$ и, следовательно, последовательности $\{N_n/k_n\}$ и $\{S_{k_n}^{(n)}\}$, $n \in J_1 \cup J_2$, слабо компактны. Для завершения доказательства необходимости требуется доказать, что последовательности случайных величин $\{N_n/k_n\}$ и $\{S_{k_n}^{(n)}\}$, $n \in J_3$, слабо компактны. Пусть $\mathcal{N}$ — произвольная последовательность натуральных чисел. Выберем подпоследовательность $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$ такую, чтобы $\delta_n \rightarrow \delta$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$. Возможны два случая: 1) $\delta = 0$ и 2) $\delta > 0$.

Пусть имеет место случай 1). По определению метрики Леви (см. [1, § 9, теорема 1]) выполняется неравенство

$$\mathcal{E}\left(x - \frac{3\delta_n}{2}\right) - \frac{3\delta_n}{2} \leq R_n(x) = P\{N_n(d_n + |\alpha_n|) < x\} \leq \mathcal{E}\left(x + \frac{3\delta_n}{2}\right) + \frac{3\delta_n}{2}$$

для всех x и, следовательно,

$$P\left\{\frac{N_n}{k_n} \geq 1\right\} \leq P\{N_n(d_n + |\alpha_n|) \geq 2\delta_n\} \leq \frac{3\delta_n}{2} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$. Отсюда следует, что последовательность $\{N_n/k_n\}$, $n \in \mathcal{N}_1$, слабо компактна. Поэтому найдутся последовательность натуральных чисел $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_1$ и функция распределения R , такие, что

$$\bar{R}_n(x) = P\left\{\frac{N_n}{k_n} < x\right\} \Rightarrow R(x) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_2. \quad (22)$$

Далее заметим, что $d_n \rightarrow 0$ в силу (21), так как $l_n(q) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Из определения чисел k_n следует, что

$$k_n d_n \leq \left(\frac{2\delta_n}{d_n + |\alpha_n|} + 1\right) d_n \leq 2\delta_n + d_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_2.$$

По лемме 3 последовательность случайных величин $\{S_{k_n}^{(n)} - k_n \alpha_n\}$, $n \in \mathcal{N}_2$, сходится по вероятности к нулю. В силу (20) выполняется соотношение $|\alpha_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Принимая в внимание соотношения

$$k_n |\alpha_n| \leq \left(\frac{2\delta_n}{d_n + |\alpha_n|} + 1\right) |\alpha_n| \leq 2\delta_n + |\alpha_n| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_2,$$

мы видим, что последовательность $\{S_{k_n}^{(n)}\}$, $n \in \mathcal{N}_2$, слабо сходится по вероятности к нулю.

Пусть теперь имеет место случай 2). Из неравенства

$$\frac{N_n}{k_n} \leq \frac{N_n(d_n + |\alpha_n|)}{2\delta_n}, \quad n \in \mathcal{N}_1,$$

и слабой компактности последовательности $\{N_n(d_n + |\alpha_n|)\}_{n \geq 1}$ следует, что последовательность $\{N_n/k_n\}$, $n \in \mathcal{N}$, также слабо компактна. Поэтому выполняется (22) для некоторой последовательности натуральных чисел $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_1$. Расстояние Леви между функциями распределения R и $\mathcal{E}$ равно числу δ , так как $L(\bar{R}_n, \mathcal{E}) \rightarrow L(R, \mathcal{E})$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_2$ и, следовательно, $R \neq \mathcal{E}$. Поэтому левая q -квантиль $l(q)$ функции распределения R положительна на некотором множестве положительной меры Лебега. По лемме 4 найдется множество $Q \subset (0, 1)$ положительной меры Лебега, такое, что

$$\frac{l_n(q)}{k_n} \rightarrow l(q) > 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_1, \quad q \in Q. \quad (23)$$

По теореме 4 для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$ последовательность $\{S_{l_n(q)}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ слабо компактна. Выберем $q \in Q$ и $\mathcal{N}_3 \subset \mathcal{N}_2$ такие, чтобы последовательность функций распределения $\{P\{S_{l_n(q)}^{(n)} < x\}\}$, $n \in \mathcal{N}_3$, слабо сходилась к некоторой функции распределения F . По теореме непрерывности

$$E \exp \left\{ it S_{l_n(q)}^{(n)} \right\} = f_n^{l_n(q)}(t) \rightarrow f(t) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_3,$$

для всех вещественных чисел t , где f — характеристическая функция F . По теореме Хинчина [1, § 24, теорема 2] f является безгранично делимой характеристической функцией. Поэтому любая положительная степень ее также является характеристической функцией. Привлекая (23), мы получим

$$f_n^{k_n}(t) = (f_n^{l_n}(t))^{k_n/l_n} \rightarrow f^{1/l}(t), \quad l_n = l_n(q), \quad l = l(q).$$

По теореме непрерывности последовательность случайных величин $\{S_{k_n}^{(n)}\}$, слабо сходится. Таким образом доказано, что произвольные последовательности случайных величин $\{N_n/k_n\}$ и $\{S_{k_n}^{(n)}\}$, $n \in \mathcal{N} \subset J_3$, содержат слабо сходящиеся подпоследовательности. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Из леммы 4 и предположения о слабой компактности последовательности $\{N_n/k_n\}_{n \geq 1}$ следует, что для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$ выполняется соотношение

$$\sup_n \frac{l_n(q)}{k_n} = E(q) < \infty$$

и, следовательно, для тех же самых $q \in (0, 1)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_n \mathbf{P} \left\{ \left| S_{l_n(q)}^{(n)} \right| \geq x \right\} = 0. \quad (24)$$

Действительно, соотношение (24) имеет место, если последовательность случайных величин $\{S_{l_n(q)}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ слабо компактна. Докажем это. Пусть $\mathcal{N}$ — произвольная последовательность натуральных чисел. Выберем подпоследовательность $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$ такую, чтобы $l_n(q)/k_n \rightarrow l(q)$ и последовательность функций распределения $\{\mathbf{P}\{S_{k_n}^{(n)} < x\}\}$, $n \in \mathcal{N}_2$, слабо сходилась к некоторой функции распределения F . По теореме Хинчина [1, § 24, теорема 2] функция распределения F безгранично делима. По теореме непрерывности

$$\mathbf{E} \exp\{itS_{k_n}^{(n)}\} = f_n^{l_n(q)}(t) \rightarrow f(t) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_2,$$

для всех вещественных чисел t , где f — характеристическая функция F . Из этих соотношений следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\{itS_{l_n(q)}^{(n)}\} &= f_n^{l_n(q)}(t) \\ &= (f_n^{k_n}(t))^{l_n(q)/k_n} \rightarrow f^{l(q)}(t) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_1 \end{aligned}$$

и, следовательно, последовательность случайных величин $\{S_{l_n(q)}^{(n)}\}$, $n \in \mathcal{N}_1$, слабо сходится. Соотношение (24) доказано. Из (24) и равенства

$$\mathbf{P}\{|S_{N_n}^{(n)}| \geq x\} = \int_0^1 \mathbf{P}\{|S_{l_n(q)}^{(n)}| \geq x\} dq,$$

которое можно доказать так же, как было доказано (10), следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_n \mathbf{P}\{|S_{N_n}^{(n)}| \geq x\} = 0.$$

По критерию (1) последовательность случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ слабо компактна. Теорема доказана.

Доказательство замечания 3. Необходимость. Пусть числа k_n определены, как указано в (3). Докажем, что последовательность случайных величин $\{N_n(d_n + |\alpha_n|)\}_{n \geq 1}$ стохастически отделима от нуля. Предположим противное. Тогда некоторая ее подпоследовательность $\{N_n(d_n + |\alpha_n|)\}$, $n \in \mathcal{N}$, слабо сходится по вероятности к нулю и, следовательно,

$$\delta_n = L(R_n, \mathcal{E}) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N},$$

где $R_n(x) = \mathbf{P}\{N_n(d_n + |\alpha_n|) < x\}$. Отсюда следует (см. доказательство теоремы 5), что последовательность случайных величин $\{S_{k_n}^{(n)}\}$, $n \in \mathcal{N}$,

слабо сходится к нулю и, следовательно (см. также [5, лемму 4]), последовательность случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)}\}$, $n \in \mathcal{N}$, также сходится по вероятности к нулю, чего по предположению не может быть.

Обозначим $m_n = [1/(d_n + |\alpha_n|)]$ и заметим, что последовательность случайных величин $\{N_n/m_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна. Докажем, что последовательность случайных величин $\{S_{m_n}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ слабо компактна. Возьмем произвольную последовательность натуральных чисел $\mathcal{N}$. Выберем подпоследовательность $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$, такую, чтобы $\delta_n \rightarrow \delta$ и $R_n \Rightarrow R$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$. Функция распределения R отлична от вырожденной функции распределения $\mathcal{E}$ и, следовательно, $\delta > 0$, так как $\delta_n = L(R_n, \mathcal{E}) \rightarrow L(R, \mathcal{E})$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$. Поэтому

$$\frac{k_n}{m_n} \rightarrow 2\delta \quad \text{при } n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_1.$$

По теореме 5 последовательность случайных величин $\{S_{k_n}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ слабо компактна и, следовательно, последовательность $\{S_{m_n}^{(n)}\}$, $n \in \mathcal{N}_1$, также слабо компактна. Таким образом доказано, что каждая последовательность $\{S_{m_n}^{(n)}\}$, $n \in \mathcal{N}$, содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Необходимость доказана. Доказательство достаточности можно осуществить так же, как доказательство достаточности в теореме 5. Замечание доказано.

Доказательство теоремы 6. Необходимость. Заметим, что (18) выполняется. По теореме 2 для слабой компактности последовательности случайных сумм $\{S_{N_n}^{(n)} - A_n\}_{n \geq 1}$ необходимо и достаточно, чтобы последовательности случайных величин

$$\left\{ \sum_{k=1}^{N_n} (X_{n,k} - m_n - \beta_n) \right\}_{n \geq 1} \quad \text{и} \quad \left\{ N_n(m_n + \beta_n) - \text{med}(N_n(m_n + \beta_n)) \right\}_{n \geq 1}$$

были слабо компактными. По теореме 5 первая из этих двух последовательностей слабо компактна тогда и только тогда, когда слабо компактны последовательности $\{N_n/k_n\}_{n \geq 1}$ и $\{S_{k_n}^{(n)} - k_n(m_n + \beta_n)\}_{n \geq 1}$, где числа k_n определены в (4). Необходимость доказана.

Достаточность. По теореме 5 слабая компактность последовательностей $\{N_n/k_n\}_{n \geq 1}$ и $\{S_{k_n}^{(n)} - k_n(m_n + \beta_n)\}_{n \geq 1}$, влечет слабую компактность последовательности $\{S_{N_n}^{(n)} - N_n(m_n + \beta_n)\}_{n \geq 1}$. По условию последовательность $\{N_n(m_n + \beta_n) - \text{med}(N_n(m_n + \beta_n))\}_{n \geq 1}$ слабо компактна. Применение леммы 6 завершает доказательство теоремы.

Доказательство замечания 4. Оно состоит в формальном повторении доказательства теоремы 6. См. также доказательство замечания 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.- Л.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
2. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: изд-во МГУ, 1990, 269 с.
3. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
4. Зигель Г. Компактность последовательности сумм независимых величин со значениями в гильбертовом пространстве. — Литов. матем. сб., 1981, т. 21, № 4, с. 123–136.
5. Саас Д. О классах предельных распределений для сумм случайного числа одинаково распределенных случайных величин. — Теория вероятн. и ее применен., 1972, т. XVII, в. 3, с. 424–439.
6. Korolev V. Yu., Kruglov V. M. Limit theorems for random sums of independent random variables. — Lecture Notes Math., 1993, v. 1546, p. 100–120.
7. Rosinski J. Weak compactness of laws of random sums of identically distributed random vectors in Banach spaces: — Colloquium Mathem., 1976, v. 35, p. 313–325.
8. Rosinski J. Shift compactness, concentration function and random sums of random vectors. — Bulletin De L'Academie Pol. Sci. Serie math. astr., 1976, v. 24, № 11, p. 1029–1033.
9. Szász D. Limit theorems for the distributions of the sums of a random number of random variables. — Ann. Math. Stat., 1972, v. 43, № 6, p. 1902–1913.

Поступила в редакцию
25.VI.1996