Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Лазакович, С. П. Сташуленок, Т. В. Стемковская,
Ассоциированные решения уравнений в дифференциалах
в прямом произведении алгебр обобщенных случайных про-
цессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, вы-
пуск 2, 272–293

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1465>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразу-
мевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:37:21

© 1998 г. ЛАЗАКОВИЧ Н. В.^{*}, СТАШУЛЕНКО С. П.^{*},
СТЕМКОВСКАЯ Т. В.^{*}

**АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ
В ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ АЛГЕБР
ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ¹⁾**

В прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов рассматриваются уравнения в дифференциалах и исследуются их ассоциированные решения. Доказывается, что в одних случаях они являются решениями соответствующих стохастических дифференциальных уравнений Ито, в других — решениями уравнений Стратоновича. В терминах алгебр обобщенных случайных процессов дается описание областей применимости стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича.

Ключевые слова и фразы: стохастические дифференциальные уравнения Ито и Стратоновича, прямое произведение алгебр обобщенных случайных процессов, обобщенные дифференциалы Ито и Стратоновича, ассоциированные решения уравнений в дифференциалах.

Известно, что при изучении дифференциальных уравнений со случайными функциями различают два случая. В первом из них случайные функции, входящие в дифференциальное уравнение, достаточно регулярны, и большинство вопросов, связанных с исследованием свойств решения уравнения, можно решить классическими методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Во втором случае приходится рассматривать дифференциальные уравнения, содержащие обобщенные случайные процессы типа «белого шума». К таким уравнениям неприменимы классические методы. Для них разработана специальная теория стохастических дифференциальных уравнений. Однако и в этом случае многие авторы не отказались от попыток исследования решений классическими методами, правда, на аппроксимационном уровне. В работах [1]–[6] исследуется задача аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений

^{*}Белорусский государственный университет, механико-математический факультет, пр. Ф. Скорины, 4, 220080 Минск, Республика Беларусь.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь и Международной Соросовской программы образования в области точных наук.

решениями либо конечно-разностных, либо обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что решениями конечно-разностных уравнений, как правило, «приближаются» решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, а решениями обыкновенных дифференциальных уравнений — решения стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича. И только для обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием при некоторых аппроксимациях броуновского движения с помощью полигонального метода [7], [8] можно добиться и аппроксимации решения стохастического дифференциального уравнения Ито [9].

Естественно, при этом встает задача разделения областей применимости стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича [10].

Настоящая статья — продолжение работы [11]. Она состоит из двух частей. В первой установлено, что решения многомерного стохастического дифференциального уравнения как Ито, так и Стратоновича, могут быть аппроксимированы решениями соответствующего конечно-разностного уравнения с осреднением. Рассмотрен также смешанный случай и даны описания «областей» Ито и Стратоновича.

Во второй части приводятся теоремы существования и единственности решений уравнений в дифференциалах в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов и исследуются ассоциированные решения этих уравнений.

Введение

Приведем некоторые понятия из работы [11], которые мы будем использовать в дальнейшем.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $T = [0, a] \subset \mathbf{R}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ — стандартный поток σ -алгебр, $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{A}$.

Рассмотрим множество последовательностей функций

$$f_n(t, \omega): \mathbf{N} \times T \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R},$$

таких, что $f_n(t, \omega)$ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ для любого $t \in T$ и $n \in \mathbf{N}$.

Элементы $F = (f_n)$ и $G = (g_n)$ данного множества назовем эквивалентными, если существует такое n_0 , что $f_n(t, \omega) = g_n(t, \omega)$ для любых $t \in T$, почти всех $\omega \in \Omega$ и $\forall n > n_0$.

Множество классов эквивалентных последовательностей такого вида обозначим $\mathcal{G}_L(T, \Omega)$, если для любых $n \in \mathbf{N}$ функции $f_n(t, \omega)$ являются бесконечно дифференцируемыми на T в смысле $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ для всех $p \geq 1$, и $\mathcal{G}(T, \Omega)$, если для любых $n \in \mathbf{N}$ $f_n(t, \omega) \in C^\infty(T)$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Несложно видеть, что $\mathcal{G}_L(T, \Omega)$ и $\mathcal{G}(T, \Omega)$ являются алгебрами с покоординатными операциями сложения и умножения. Далее, пусть $\tilde{T} = \{\tilde{t} = [(t_n)] \in \tilde{\mathbf{R}}: \forall (t_n) \in \tilde{t}, 0 \leq t_n \leq a, n = 1, 2, \dots\}$, где $\tilde{\mathbf{R}}$ — расширенная прямая из [12]. Через $\mathcal{G}_L(\tilde{T}, \Omega)$ (соответственно, $(\mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega))$) обозначим алгебру обобщенных случайных процессов $\tilde{F}(\tilde{t}, \omega)$ вида:

$$\tilde{F}(\tilde{t}, \omega) = \left[(f_n(t_n, \omega)) \right],$$

где $\tilde{t} = [(t_n)] \in \tilde{T}$, а $[(f_n(t, \omega))] \in \mathcal{G}_L(T, \Omega)$ (соответственно, $[(f_n(t, \omega))] \in \mathcal{G}(T, \Omega)$).

Введем на $\tilde{\mathbf{R}}$ множество

$$H = \left\{ \tilde{h} = [(h_n)] \in \tilde{\mathbf{R}}_+ \setminus \tilde{0} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \right\}$$

и для $\forall \tilde{F} = [(f_n)]$ из $\mathcal{G}_L(\tilde{T}, \Omega)$ или $\mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)$ положим по определению

$$d_{\tilde{h}} \tilde{F}(\tilde{t}, \omega) = \left[(f_n(t + h_n, \omega) - f_n(t, \omega)) \right],$$

где $\tilde{t} = [(t)] \in \tilde{T}$, $\tilde{h} \in H$, $\tilde{t} + \tilde{h} \in \tilde{T}$.

Выделим в H подмножества

$$I = \{ \tilde{h} \in H \mid n^{-1} = o(h_n) \ \forall (h_n) \in \tilde{h} \},$$

$$S = \{ \tilde{h} \in H \mid h_n = o(n^{-1}) \ \forall (h_n) \in \tilde{h} \}.$$

Напомним, что $d_{\tilde{h}} \tilde{F}$, $\tilde{h} \in S$, называется обобщенным дифференциалом Стратоновича, а $d_{\tilde{h}} \tilde{F}$, $\tilde{h} \in I$, — обобщенным дифференциалом Ито.

Через $\mathcal{G}_L(T, \Omega)^r$, $\mathcal{G}_L(\tilde{T}, \Omega)^r$, $\mathcal{G}(T, \Omega)^r$, $\mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)^r$ обозначим прямое произведение алгебр $\mathcal{G}_L(T, \Omega)$, $\mathcal{G}_L(\tilde{T}, \Omega)$, $\mathcal{G}(T, \Omega)$ и $\mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)$ соответственно, $r \in \mathbf{N}$; $B(t, \omega) = (B^1(t, \omega), \dots, B^r(t, \omega))$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, есть r -мерный стандартный процесс $\mathcal{F}_t$ -броуновского движения [13, с. 48–49].

Будем говорить, что обобщенный случайный процесс

$$F(t, \omega) = \left[(f_n(t, \omega)) \right] \in \mathcal{G}(T, \Omega) \quad (\mathcal{G}_L(T, \Omega))$$

ассоциирует классический случайный процесс, если для любых представителей $(f_n) \in F$ последовательность $f_n(t, \omega)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к данному процессу почти всюду (в $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$) и равномерно по $t \in T$.

В многомерном случае рассматриваем покоординатное ассоциирование.

Обобщенным случайным процессом броуновского движения назовем элемент пространства алгебр $\mathcal{G}_L(T, \Omega)^r$ ($\mathcal{G}(T, \Omega)^r$), ассоциирующий r -мерный процесс $\mathcal{F}_t$ -броуновского движения B .

1. Конечно-разностные аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений

В этом разделе исследуется задача аппроксимации решения системы стохастических дифференциальных уравнений решениями конечно-разностных уравнений с осреднением. Аналогичные аппроксимационные подходы в детерминистическом случае применялись в работах [14], [15]. Доказывается, что как решения стохастического дифференциального уравнения Ито, так и решения Стратоновича могут быть аппроксимированы решениями конечно-разностного уравнения. Параллельно, в терминах множеств S и I дается описание «областей» Стратоновича и Ито.

1.1. Аппроксимация решений стохастических дифференциальных уравнений Ито решениями конечно-разностных уравнений с запаздыванием. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} X^i(t, \omega) = x^i + \sum_{j=1}^r (I) \int_0^t \sigma^{ij}(X(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \\ + \int_0^t a^i(X(s, \omega)) ds, \quad i = \overline{1, d}, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $X(t, \omega) = (X^1(t, \omega), \dots, X^d(t, \omega))$, $x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbf{R}^d$, $a^i \in C_B^1(\mathbf{R}^d)$, $\sigma^{ij} \in C_B^2(\mathbf{R}^d)$, $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, r}$, стохастический интеграл в правой части (1.1) — стохастический интеграл Ито [13, с. 53], $C_B^l(\mathbf{R}^d)$, $l = 1, 2$, — множество действительных l раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbf{R}^d$ функций, ограниченных вместе со своими частными производными до порядка l включительно.

Существование и единственность решения системы (1.1) доказаны в [13, с. 233].

Пусть

$$\begin{aligned} B_n^j(t, \omega) = (B^j * \rho_n)(t, \omega) = \int_0^{1/n} B^j(t+s, \omega) \rho_n(s) ds, \quad j = \overline{1, r}, \\ \rho_n(s) = n\rho(ns), \quad s \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \rho \in C^\infty(\mathbf{R}), \quad \rho \geq 0, \quad \text{supp } \rho \subset [0, 1], \\ \int_0^1 \rho(s) ds = 1; \quad \sigma_n^{ij}(u) = (\sigma^{ij} * \bar{\rho}_n)(u), \quad a_n^i(u) = (a^i * \bar{\rho}_n)(u), \\ u \in \mathbf{R}^d, \quad i = \overline{1, d}, \quad j = \overline{1, r}, \quad \bar{\rho}_n(u) = n^d \bar{\rho}(nu), \quad \bar{\rho} \in C^\infty(\mathbf{R}^d), \\ \text{supp } \bar{\rho} \subset [0, 1]^d, \quad \bar{\rho} \geq 0, \quad \int_{[0,1]^d} \bar{\rho}(u) du = 1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbf{R}^d$.

Исследуем задачу аппроксимации решения системы (1.1) решениями конечно-разностных уравнений с запаздыванием

$$\left\{ \begin{array}{l} X_n^i(t + h_n, \omega) - X_n^i(t, \omega) \\ = \sum_{j=1}^r \sigma_n^{ij}(X_n(t - h_n, \omega)) [B_n^j(t + h_n, \omega) - B_n^j(t, \omega)] \\ + a_n^i(X_n(t, \omega)) h_n, \quad t \in T, \\ X_n^i|_{[-h_n, h_n)} = X_{0n}^i(t, \omega), \quad i = \overline{1, d}, \end{array} \right. \quad (1.3)$$

где случайный процесс $X_{0n}(t, \omega) = (X_{0n}^1(t, \omega), \dots, X_{0n}^d(t, \omega))$ согласован с потоком σ -алгебр $\mathcal{F}_{t+1/n}$, $t \in [0, h_n)$, и принадлежит классу C^∞ в смысле $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ (по определению полагаем, что $X_n^i(t, \omega) = X_n^i(0, \omega)$, $t < 0$).

Теорема 1. Пусть $X(t, \omega)$, $X_n(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, — решения задач (1.1) и (1.3) соответственно, $\sigma^{ij} \in C_B^2(\mathbf{R}^d)$, $a^i \in C_B^1(\mathbf{R}^d)$, $i = \overline{1, d}$, $i = \overline{1, r}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in T} \mathbf{E} \|X(t, \omega) - X_n(t, \omega)\|^2 \\ & \leq C \sup_{t \in [0, h_n)} \mathbf{E} \|x - X_{0n}(t, \omega)\|^2 + Ch_n + \frac{C}{nh_n}, \quad \frac{1}{n} < h_n. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть τ — произвольная точка из T . Тогда найдутся такие $t_\tau \in [0, h_n)$ и $k_\tau = 0, 1, 2, \dots$, что $\tau = t_\tau + k_\tau h_n$.

Поэтому решение задачи Коши (1.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} X_n^i(\tau, \omega) &= X_{0n}^i(t_\tau, \omega) + \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{k_\tau} \sigma_n^{ij}(X_n(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)) \\ & \quad \times [B_n^j(t_\tau + lh_n, \omega) - B_n^j(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)] \\ & + \sum_{l=1}^{k_\tau} a_n^i(X_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)) h_n, \quad i = \overline{1, d}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \|X(\tau, \omega) - X_n(\tau, \omega)\| \leq \|x - X_{0n}(t_\tau, \omega)\| \\ & + \left\| \sum_{j=1}^r (I) \int_0^\tau \sigma^j(X(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{k_\tau} \sigma_n^j(X_n(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[B_n^j(t_\tau + lh_n, \omega) - B_n^j(t_\tau + (l-1)h_n, \omega) \right] \Big\| \\
& + \left\| \int_0^\tau a(X(s, \omega)) ds - \sum_{l=1}^{k_\tau} a_n(X_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)) h_n \right\| \\
& = I_1(\tau, \omega) + I_2(\tau, \omega) + I_3(\tau, \omega).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Рассмотрим $I_2(\tau, \omega)$. Несложно убедиться в том, что

$$I_2(\tau, \omega) \leq I_{21}(\tau, \omega) + I_{22}(\tau, \omega) + I_{23}(\tau, \omega) + I_{24}(\tau, \omega) + I_{25}(\tau, \omega), \tag{1.5}$$

где

$$\begin{aligned}
I_{21}(\tau, \omega) &= \left\| \sum_{j=1}^r (I) \int_0^\tau \sigma^j(X(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^r (I) \int_0^\tau \sigma_n^j(X(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \right\|, \\
I_{22}(\tau, \omega) &= \left\| \sum_{j=1}^r (I) \int_0^\tau \sigma_n^j(X(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \right. \\
&\quad - \sum_{j=1}^r \sigma_n^j(X(0, \omega)) [B^j(t_\tau, \omega) - B^j(0, \omega)] \\
&\quad - \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{k_\tau} \sigma_n^j(X(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)) \\
&\quad \times [B^j(t_\tau + lh_n, \omega) - B^j(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)] \Big\|, \\
I_{23}(\tau, \omega) &= \left\| \sum_{j=1}^r \sigma_n^j(X(0, \omega)) [B^j(t_\tau, \omega) - B^j(0, \omega)] \right\|, \\
I_{24}(\tau, \omega) &= \left\| \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{k_\tau} \sigma_n^j(X(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)) \right. \\
&\quad \times [B^j(t_\tau + lh_n, \omega) - B^j(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)] \\
&\quad - \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{k_\tau} \sigma_n^j(X_n(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)) \\
&\quad \times [B^j(t_\tau + lh_n, \omega) - B^j(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)] \Big\|,
\end{aligned}$$

$$I_{25}(\tau, \omega) = \left\| \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{k_\tau} \sigma_n^j(X_n(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)) \times \left[B^j(t_\tau + lh_n, \omega) - B^j(t_\tau + (l-1)h_n, \omega) \right] - \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{k_\tau} \sigma_n^j(X_n(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)) \times \left[B_n^j(t_\tau + lh_n, \omega) - B_n^j(t_\tau + (l-1)h_n, \omega) \right] \right\|.$$

Из представления σ_n^{ij} , неравенства Гёльдера и теоремы Лагранжа вытекает, что

$$\mathbf{E}[I_{21}(\tau, \omega)]^2 \leq Cn^{-2}. \quad (1.6)$$

Пусть $\bar{X}(t, \omega) = X(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)$ для $t \in [t_\tau + (l-1)h_n, t_\tau + lh_n]$, $l = \overline{2, k_\tau}$ и $\bar{X}(t, \omega) = X(0, \omega)$ для $t \in [0, t_\tau + h_n]$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sigma_n^{ij}(X(0, \omega)) [B^j(t_\tau, \omega) - B^j(0, \omega)] - \sum_{l=1}^{k_\tau} \sigma_n^{ij}(X(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)) \\ & \times [B^j(t_\tau + lh_n, \omega) - B^j(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)] \\ & = (I) \int_0^\tau \sigma_n^{ij}(\bar{X}(s, \omega)) dB^j(s, \omega). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Поэтому, используя свойства интеграла Ито, теорему Лагранжа, то, что $\sigma^{ij} \in C_B^2(\mathbf{R}^d)$, соотношение (1.7), а также уравнение (1.1), получим

$$\mathbf{E}[I_{22}(\tau, \omega)]^2 \leq Ch_n, \quad \mathbf{E}[I_{23}(\tau, \omega)]^2 \leq Ch_n, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[I_{24}(\tau, \omega)]^2 & \leq \sum_{i=1}^d r \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{k_\tau} \mathbf{E} \left\{ \left[\sigma_n^{ij}(X(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sigma_n^{ij}(X_n(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)) \right] \right. \\ & \quad \left. \times \left[B^j(t_\tau + lh_n, \omega) - B^j(t_\tau + (l-1)h_n, \omega) \right] \right\}^2 \\ & \leq Ch_n \sum_{l=1}^{k_\tau} \mathbf{E} \left\| X(t_\tau + (l-2)h_n, \omega) \right. \\ & \quad \left. - X_n(t_\tau + (l-2)h_n, \omega) \right\|^2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Учитывая то, что математические ожидания удвоенных произведений вида

$$2 [B^j(t_\tau + lh_n, \omega) - B_n^j(t_\tau + lh_n, \omega)] [B^j(t_\tau + mh_n, \omega) - B_n^j(t_\tau + mh_n, \omega)]$$

равны нулю для $l < m$, имеем

$$\mathbf{E}[I_{25}(\tau, \omega)]^2 \leq C \sum_{l=1}^{k_\tau} \frac{1}{n} \int_0^1 y \rho_n^2(y) dy \leq \frac{Ck_a}{n}. \quad (1.10)$$

В итоге из соотношений (1.5), (1.6), (1.8)–(1.10) для $I_2(\tau, \omega)$ получим следующую оценку сверху:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[I_2(\tau, \omega)]^2 &\leq \frac{C}{n^2} + \frac{Ck_a}{n} \\ &+ Ch_n \sum_{l=2}^{k_\tau} \mathbf{E} \left\| X(t_\tau + (l-2)h_n, \omega) - X_n(t_\tau + (l-2)h_n, \omega) \right\|^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Исследуем $I_3(\tau, \omega)$. Используя оценки (1.8), неравенство Гёльдера, теоремы Лагранжа и Фубини, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[I_3(\tau, \omega)]^2 &\leq Ch_n \\ &+ Ch_n \sum_{l=1}^{k_\tau} \mathbf{E} \left\| X(t_\tau + (l-1)h_n, \omega) - X_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega) \right\|^2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Таким образом, из соотношений (1.4), (1.11), (1.12) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\| X(\tau, \omega) - X_n(\tau, \omega) \right\|^2 &\leq C \sup_{t \in [-h_n, h_n]} \mathbf{E} \left\| x - X_{0n}(t, \omega) \right\|^2 \\ &+ \frac{C}{n^2} + \frac{Ck_a}{n} + Ch_n + Ch_n \sum_{l=1}^{k_\tau} \mathbf{E} \left\| X(t_\tau + (l-1)h_n, \omega) \right. \\ &\left. - X_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega) \right\|^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Методом математической индукции можно доказать, что,

$$\text{если } x_k \leq a + b \sum_{l=1}^k x_{l-1}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \text{ то } x_k \leq (b+1)^{k-1} (a + bx_0). \quad (1.14)$$

Воспользовавшись утверждением (1.14), получаем, что из неравенства (1.13) следует утверждение теоремы.

Следствие 1. Пусть $\sigma^{ij} \in C_B^2(\mathbf{R}^d)$, $a^i \in C_B^1(\mathbf{R}^d)$, $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, r}$, и $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что

$$n^{-1} = o(h_n), \quad (1.15)$$

$$\sup_{t \in [0, h_n]} \mathbf{E} \left\| x - X_{0n}(t, \omega) \right\|^2 \longrightarrow 0.$$

Тогда

$$\sup_{t \in T} \mathbf{E} \|X(t, \omega) - X_n(t, \omega)\|^2 \rightarrow 0,$$

где $X(t, \omega)$ и $X_n(t, \omega)$ — решения задач (1.1) и (1.3) соответственно.

З а м е ч а н и е 1. Несложно видеть, что условие (1.15) эквивалентно тому, что $\tilde{h} = [(h_n)] \in I$.

З а м е ч а н и е 2. Результаты следствия 1 остаются справедливыми и для запаздывания $1/n$.

1.2. Аппроксимация решений стохастических дифференциальных уравнений Ито решениями конечно-разностных уравнений. Исследуем теперь задачу аппроксимации решений системы (1.1) решениями конечно-разностных уравнений с осреднением

$$\begin{cases} Y_n^i(t + h_n, \omega) - Y_n^i(t, \omega) \\ = \sum_{j=1}^r \sigma_n^{ij}(Y_n(t, \omega)) [B_n^j(t + h_n, \omega) - B_n^j(t, \omega)] \\ + a_n^i(Y_n(t, \omega)) h_n, \\ Y_n^i|_{[0, h_n)} = X_{0n}^i(t, \omega), \quad i = \overline{1, d}, j = \overline{1, r}, t \in T, \end{cases} \quad (1.16)$$

где случайный процесс

$$X_{0n}(t, \omega) = (X_{0n}^1(t, \omega), \dots, X_{0n}^d(t, \omega))$$

согласован с потоком σ -алгебр $\mathcal{F}_{t+1/n}$, $t \in [0, h_n)$, и принадлежит классу C^∞ в смысле $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Теорема 2. Пусть $\sigma^{ij} \in C_B^2(\mathbf{R}^d)$, $a^i \in C_B^1(\mathbf{R}^d)$, $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, r}$. Тогда

$$\sup_{t \in T} \mathbf{E} \|Y_n(t, \omega) - X(t, \omega)\|^2 \leq C \sup_{t \in [0, h_n)} \mathbf{E} \|x - X_{0n}(t, \omega)\|^2 + Ch_n + \frac{C}{nh_n^2},$$

где $X(t, \omega)$, $Y_n(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbf{N}$, — решения задач (1.1) и (1.16) соответственно, $1/n < h_n^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение (1.16) запишем в виде

$$\begin{aligned} Y_n^i(\tau, \omega) &= X_{0n}^i(t_\tau, \omega) + \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{k_\tau} \sigma_n^{ij}(Y_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)) \\ &\quad \times [B_n^j(t_\tau + lh_n, \omega) - B_n^j(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)] \\ &\quad + \sum_{l=1}^{k_\tau} a_n^i(Y_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)) h_n, \quad i = \overline{1, d}. \end{aligned}$$

Пусть $X(t, \omega)$ и $X_n(t, \omega)$ — решения задач (1.1) и (1.3) соответственно, тогда

$$\begin{aligned} \|X(\tau, \omega) - Y_n(\tau, \omega)\| &\leq \|X(\tau, \omega) - X_n(\tau, \omega)\| \\ &+ \|X_n(\tau, \omega) - Y_n(\tau, \omega)\|, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} &\|X_n(\tau, \omega) - Y_n(\tau, \omega)\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{k_\tau} \left[\sigma_n^j(X_n(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)) - \sigma_n^j(Y_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)) \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[B_n^i(t_\tau + lh_n, \omega) - B_n^j(t_\tau + (l-1)h_n, \omega) \right] \right\| \\ &+ \left\| \sum_{l=1}^{k_\tau} \left[a_n(X_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)) - a_n(Y_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)) \right] h_n \right\| \\ &= J_1(\tau, \omega) + J_2(\tau, \omega). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Для оценки $J_1(\tau, \omega)$ используем методику оценивания неравенства (1.5) и мартингальное неравенство [13, с. 41]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [J_1(\tau, \omega)]^2 &\leq \frac{Ck_a}{n} + \frac{Ck_a^2}{n} + Ch_n \\ &+ Ch_n \sum_{l=2}^{k_\tau} \mathbf{E} \|X_n(t_\tau + (l-2)h_n, \omega) - Y_n(t_\tau + (l-2)h_n, \omega)\|^2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Для $J_2(\tau, \omega)$ получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [J_2(\tau, \omega)]^2 &\leq Ch_n \sum_{l=1}^{k_\tau} \mathbf{E} \|X_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega) \\ &\quad - Y_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)\|^2, \end{aligned} \quad (1.20)$$

а из (1.18)–(1.20) вытекает

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \|X_n(\tau, \omega) - Y_n(\tau, \omega)\|^2 \\ &\leq Ch_n \sum_{l=1}^{k_\tau} \mathbf{E} \|X_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega) - Y_n(t_\tau + (l-1)h_n, \omega)\|^2 \\ &\quad + \frac{Ck_a^2}{n} + Ch_n. \end{aligned} \quad (1.21)$$

К неравенству (1.21) применим утверждение (1.14). Тогда

$$\mathbf{E} \|X_n(\tau, \omega) - Y_n(\tau, \omega)\|^2 \leq \frac{Ck_a^2}{n} + Ch_n. \quad (1.22)$$

Из (1.17), (1.22) и теоремы 1 следует утверждение теоремы 2.

Аналогично доказывается

Теорема 3. При выполнении условий теоремы 2 имеет место следующее неравенство:

$$\sup_{t \in T} \mathbf{E} \|Y_n(t, \omega) - X(t, \omega)\|^2 \leq C \sup_{t \in [0, h_n]} \mathbf{E} \|x - X_{0n}(t, \omega)\|^2 + Ch_n^{1/5} + \frac{C}{nh_n},$$

где $X(t, \omega)$, $Y_n(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbf{N}$, — решения уравнений (1.1) и (1.16) соответственно, $1/n < h_n$.

З а м е ч а н и е 3. Сравним результаты теорем 2 и 3. Несложно видеть, что в теореме 2 $Y_n(t, \omega)$ сходится к $X(t, \omega)$ равномерно по $t \in T$, если $1/n = o(h_n^2)$, $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$, а в теореме 3 подобный результат достигается, если $1/n = o(h_n)$ (см. следствие 2). Таким образом, теорема 3 расширяет «область» Ито до оптимального размера. С другой стороны, в правой части неравенства из теоремы 3 стоит слагаемое $Ch_n^{1/5}$, а в теореме 2 аналогичное слагаемое имеет вид Ch_n , т.е. при соответствующем выборе связи между $1/n$ и h_n (например, $1/n \sim h_n^3$) оценка в теореме 2 будет лучше, нежели та, которую дает теорема 3.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 2. Пусть $\sigma^{ij} \in C_B^2(\mathbf{R}^d)$, $a^i \in C_B^1(\mathbf{R}^d)$, $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, r}$, и $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что

$$n^{-1} = o(h_n), \quad (1.23)$$

$$\sup_{t \in [0, h_n]} \mathbf{E} \|x - X_{0n}(t, \omega)\|^2 \rightarrow 0.$$

Тогда $\sup_{t \in T} \mathbf{E} \|Y_n(t, \omega) - X(t, \omega)\|^2 \rightarrow 0$, где $X(t, \omega)$ и $Y_n(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbf{N}$, — решения задач (1.1) и (1.16) соответственно.

1.3. Аппроксимация решений стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича решениями конечно-разностных уравнений с осреднением. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} X^i(t, \omega) = x^i + \sum_{j=1}^r (S) \int_0^t \sigma^{ij}(X(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \\ + \int_0^t a^i(X(s, \omega)) ds, \quad i = \overline{1, d}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где x, σ^{ij}, a^i , $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, r}$, задаются так же, как и в системе (1.1), а интеграл в правой части (1.24) — стохастический интеграл Стратоновича [13, с. 109].

Существование и единственность решения (1.24) доказаны в [13, с. 233].

Пусть $B_n^j(t, \omega)$, $j = \overline{1, r}$, — выражение из соотношений (1.2). Тогда справедлива

Лемма ([11]). Для достаточно больших n и $h_n < 1/n$ выполняются следующие оценки ($k \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, r}$):

$$\text{а) } \mathbf{E} [B_n^j(kh_n, \omega) - B_n^j((k-1)h_n, \omega)]^2 \leq Cnh_n^2,$$

$$\text{б) } \mathbf{E} [B_n^j(kh_n, \omega) - B_n^j((k-1)h_n, \omega)]^4 \leq Cn^2h_n^4,$$

$$\text{в) } \mathbf{E} [B_n^j(kh_n, \omega) - B_n^j((k-1)h_n, \omega)]^8 \leq Cn^4h_n^8.$$

Теорема 4. Пусть $\sigma^{ij} \in C_B^2(\mathbb{R}^d)$, $a^i \in C_B^1(\mathbb{R}^d)$, $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, r}$.

Тогда

$$\sup_{t \in T} \mathbf{E} \|X(t, \omega) - Y_n(t, \omega)\|^2 \leq Cn^{-1/5} + Cn^2h_n^2 + C \sup_{t \in [0, h_n]} \mathbf{E} \|X_{0n}(t, \omega) - x\|^2,$$

где $X(t, \omega)$ и $Y_n(t, \omega)$ — решения задач (1.24) и (1.16) соответственно, $h_n < 1/n$.

Доказательство. Пусть по определению $\tilde{\delta} = lh_n$, $l \in \mathbb{N}$, и $1/n = o(\tilde{\delta})$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого $\tau \in T$ найдутся такие $t_\tau \in [0, h_n]$ и $t'_\tau \in [\tilde{\delta}, 2\tilde{\delta})$, а также $k_\tau \in \mathbb{Z}_+$ и $m_\tau \in \mathbb{N}$, что, с одной стороны, $\tau = t_\tau + k_\tau h_n$, а с другой, $\tau = t'_\tau + m_\tau \tilde{\delta}$, где $t'_\tau = t_\tau + k'_\tau h_n$ и $k'_\tau \in \mathbb{N}$, $k'_\tau < 2l$.

Из уравнения (1.16) методом конечных шагов получаем

$$\begin{aligned} Y_n^i(\tau, \omega) &= \left\{ X_{0n}^i(t_\tau, \omega) + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{k'_\tau} \sigma_n^{ij} \left(Y_n(t_\tau + (k-1)h_n, \omega) \right) \right. \\ &\quad \times \left[B_n^j(t_\tau + kh_n, \omega) - B_n^j(t_\tau + (k-1)h_n, \omega) \right] \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{k'_\tau} a_n^i \left(Y_n(t_\tau + (k-1)h_n, \omega) \right) h_n \right\} \\ &+ \left\{ \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{p=1}^l \sigma_n^{ij} \left(Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right) \right. \\ &\quad \times \left[B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + ph_n, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right] \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{p=1}^l a_n^i \left(Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right) h_n \right\} \\ &= S_1^i(\tau, \omega) + S_2^i(\tau, \omega). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Из монографии [13, с. 394] известно, что интегралы Ито и Стратоновича связаны соотношением

$$\begin{aligned} (S) \int_0^\tau \sigma^{ij}(X(s, \omega)) dB^j(s, \omega) &= (I) \int_0^\tau \sigma^{ij}(X(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d \int_0^\tau (\sigma^{\alpha j} \partial_\alpha \sigma^{ij})(X(s, \omega)) ds. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Используя соотношения (1.25), (1.26), введем следующие обозначения: для $i = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned} H_1^i(\tau, \omega) &= Y_n^i(t'_\tau, \omega) - X^i(t'_\tau, \omega) \\ &= S_1^i(\tau, \omega) - x^i - \sum_{j=1}^r (I) \int_0^{t'_\tau} \sigma^{ij}(X(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{\alpha=1}^d \int_0^{t'_\tau} (\sigma^{\alpha j} \partial_\alpha \sigma^{ij})(X(s, \omega)) ds - \int_0^{t'_\tau} a^i(X(s, \omega)) ds, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} H_2^i(\tau, \omega) &= S_2^i(\tau, \omega) - \sum_{j=1}^r (I) \int_{t'_\tau}^\tau \sigma^{ij}(X(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{\alpha=1}^d \int_{t'_\tau}^\tau (\sigma^{\alpha j} \partial_\alpha \sigma^{ij})(X(s, \omega)) ds - \int_{t'_\tau}^\tau a^i(X(s, \omega)) ds. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Начнем наши исследования с $H_2^i(\tau, \omega)$, где i — произвольное, но фиксированное натуральное число. Очевидно следующее равенство:

$$H_2^i(\tau, \omega) = I_0(\tau, \omega) + I_1(\tau, \omega) + I_2(\tau, \omega) + I_3(\tau, \omega) + I_4(\tau, \omega), \quad (1.29)$$

где

$$\begin{aligned} I_0(\tau, \omega) &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{p=1}^l \left[\sigma_n^{ij} \left(Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right) \right. \\ &\quad \left. - \sigma^{ij} \left(Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right) \right] \\ &\quad \times \left[B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + ph_n, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1(\tau, \omega) &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sigma^{ij} \left(Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta} - \delta_1, \omega) \right) \\ &\quad \times \left[B^j(t'_\tau + (k+1)\tilde{\delta}, \omega) - B^j(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^r (I) \int_{t'_\tau}^\tau \sigma^{ij}(X(s, \omega)) dB^j(s, \omega), \end{aligned}$$

$$\delta_1 = \lambda h_n, \quad \lambda = \left[\frac{1/n + h_n}{h_n} \right] \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} I_2(\tau, \omega) &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{p=1}^l \left[\sigma_n^{ij} \left(Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right) \right. \\ &\quad \left. - \sigma^{ij} \left(Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \right) \right] \\ &\quad \times \left[B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + ph_n, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{\alpha=1}^d \int_{t'_\tau}^\tau (\sigma^{\alpha j} \partial_\alpha \sigma^{ij}) (X(s, \omega)) ds, \\
I_3(\tau, \omega) = & \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sigma^{ij} (Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)) \\
& \times [B_n^j(t'_\tau + (k+1)\tilde{\delta}, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)] \\
& - \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sigma^{ij} (Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta} - \delta_1, \omega)) \\
& \times [B^j(t'_\tau + (k+1)\tilde{\delta}, \omega) - B^j(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)], \\
I_4(\tau, \omega) = & \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{p=1}^l a_n^i (Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega)) h_n \\
& - \int_{t'_\tau}^\tau a^i(X(s, \omega)) ds.
\end{aligned}$$

Оценим $I_0(\tau, \omega)$. Воспользовавшись неравенством Гёльдера, результатами леммы и представлением σ_n^{ij} , получим

$$\mathbf{E}\{I_0(\tau, \omega)\}^2 \leq Cn^{-1}. \quad (1.30)$$

При оценивании $I_3(\tau, \omega)$ учитываем независимость сомножителей под знаком суммы и ограниченность функции σ^{ij} , $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, r}$. В результате имеем

$$\mathbf{E}\{I_3(\tau, \omega)\}^2 \leq C(n\tilde{\delta})^{-1}. \quad (1.31)$$

Рассмотрим $I_4(\tau, \omega)$. При оценивании воспользуемся видом a_n^i , неравенством Гёльдера, многомерной формулой Лагранжа и тем, что первая сумма в представлении Y_n^α , $\alpha = \overline{1, d}$, мажорирует вторую:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{I_4(\tau, \omega)\}^2 \leq & \frac{C}{n} + C\tilde{\delta} + Cn\tilde{\delta}^2 + C\tilde{\delta} \\
& \times \sum_{\alpha=1}^d \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \mathbf{E} \left| Y_n^\alpha(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) - X^\alpha(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \right|^2. \quad (1.32)
\end{aligned}$$

Перейдем к исследованию $I_2(\tau, \omega)$. Прежде всего, перепишем исходное выражение следующим образом:

$$\begin{aligned}
I_2(\tau, \omega) = & \left\{ \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{p=1}^l \left[\sigma^{ij} (Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \sigma^{ij} (Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + ph_n, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{\alpha=1}^d (\sigma^{\alpha j} \partial_\alpha \sigma^{ij}) (Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)) \\
& \times \left[B_n^j(t'_\tau + (k+1)\tilde{\delta}, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \Big\} \\
& + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{\alpha=1}^d (\sigma^{\alpha j} \partial_\alpha \sigma^{ij}) (Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)) \right. \\
& \times \left[B_n^j(t'_\tau + (k+1)\tilde{\delta}, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \\
& \left. - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{\alpha=1}^d \int_{t'_\tau}^\tau (\sigma^{\alpha j} \partial_\alpha \sigma^{ij}) (X(s, \omega)) ds \right\} \\
& = I_{21}(\tau, \omega) + \frac{1}{2} I_{22}(\tau, \omega). \tag{1.33}
\end{aligned}$$

Пользуясь неравенством Гёльдера, результатами леммы, представлением $X^\alpha(s, \omega)$, $\alpha = \overline{1, d}$, многомерной формулой Лагранжа, свойствами интеграла Ито и тем, что $\sigma^{ij} \in C_B^2(\mathbf{R}^d)$, $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, r}$, можно доказать справедливость неравенства

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{I_{22}(\tau, \omega)\}^2 & \leq \frac{C}{n\tilde{\delta}} + C\Delta + \frac{C}{n} \\
& + C\tilde{\delta} \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{\alpha=1}^d \mathbf{E}|Y_n^\alpha(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) - X^\alpha(t'_\tau + k\tilde{\delta})|^2, \tag{1.34}
\end{aligned}$$

где $\Delta = b\tilde{\delta}$, $b \in \mathbf{N}$ и $\tau = t'_\tau + a_\tau \Delta$.

Приступим к оценке $I_{21}(\tau, \omega)$. Выпишем очевидную оценку сверху для этого выражения в $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$:

$$\mathbf{E}\{I_{21}(\tau, \omega)\}^2 \leq I_{21}^1(\tau) + I_{21}^2(\tau), \tag{1.35}$$

где

$$\begin{aligned}
I_{21}^1(\tau) & = C\mathbf{E} \left\{ \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{p=1}^l \left[\sigma^{ij} \left(Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \sigma^{ij} (Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)) \right] \right. \\
& \times \left[B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + ph_n, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right] \\
& \left. - \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{p=1}^l \sum_{\alpha=1}^d (\sigma^{\alpha j} \partial_\alpha \sigma^{ij}) (Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \right] \\
 & \times \left[B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + ph_n, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right] \Bigg\}^2, \\
 I_{21}^2(\tau) = & CE \left\{ \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{p=1}^l \sum_{\alpha=1}^d (\sigma^{\alpha j} \partial_\alpha \sigma^{ij}) (Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)) \right. \\
 & \times \left[B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \right] \\
 & \times \left[B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + ph_n, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right] \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{\alpha=1}^d (\sigma^{\alpha j} \partial_\alpha \sigma^{ij}) (Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \phi)) \\
 & \times \left[B_n^j(t'_\tau + (k+1)\tilde{\delta}, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \Bigg\}^2.
 \end{aligned}$$

Исследуем $I_{21}^1(\tau)$. Используя ту же методику, что и при доказательстве неравенства (1.34), получим

$$I_{21}^1(\tau) \leq Cn^3\tilde{\delta}^4 + Cn\tilde{\delta}^2 + C\tilde{\delta}. \quad (1.36)$$

Оценим $I_{21}^2(\tau)$. Прежде всего выпишем тождество, которое мы будем использовать в дальнейшем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=1}^l \left[B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \right] \\
 & \times \left[B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + ph_n, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right] \\
 & = \frac{1}{2} \left[B_n^j(t'_\tau + (k+1)\tilde{\delta}, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^l \left[B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + ph_n, \omega) - B_n^j(t'_\tau + k\tilde{\delta} + (p-1)h_n, \omega) \right]^2.
 \end{aligned}$$

Из данного тождества и леммы вытекает, что

$$I_{21}^2(\tau) \leq Cn^2h_n^2. \quad (1.37)$$

Из соотношений (1.35)–(1.37) следует

$$E\{I_{21}(\tau, \omega)\}^2 \leq Cn^3\tilde{\delta}^4 + Cn\tilde{\delta}^2 + C\tilde{\delta} + Cn^2h_n^2, \quad (1.38)$$

а из соотношений (1.33), (1.34), (1.38) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{I_2(\tau, \omega)\}^2 &\leq Cn^3\tilde{\delta}^4 + Cn\tilde{\delta}^2 \\ &\quad + C\tilde{\delta} \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{\alpha=1}^d \mathbf{E}|Y_n^\alpha(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) - X^\alpha(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)|^2 \\ &\quad + Cn^2h_n^2 + \frac{C}{n\tilde{\delta}} + C\Delta + \frac{C}{n}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Исследуем $I_1(\tau, \omega)$. Очевидно следующее представление:

$$\begin{aligned} I_1(\tau, \omega) &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \left[\sigma^{ij}(Y_n(t'_\tau + k\tilde{\delta} - \delta_1, \omega)) - \sigma^{ij}(X(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)) \right] \\ &\quad \times \left[B^j(t'_\tau + (k+1)\tilde{\delta}, \omega) - B^j(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \right] \\ &\quad + \left\{ \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sigma^{ij}(X(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)) \right. \\ &\quad \times \left[B^j(t'_\tau + (k+1)\tilde{\delta}, \omega) - B^j(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \right] \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^r (I) \int_{t'_\tau}^\tau \sigma^{ij}(X(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \right\} \\ &= I_{11}(\tau, \omega) + I_{12}(\tau, \omega). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Оценим $I_{11}(\tau, \omega)$ в $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Для этого воспользуемся независимостью сомножителей в этом выражении, видом Y_n^α , $\alpha = \overline{1, d}$, и формулой Лагранжа. В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{I_{11}(\tau, \omega)\}^2 &\leq \frac{C}{n} + C\tilde{\delta} \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{\alpha=1}^d \mathbf{E}|Y_n^\alpha(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) \\ &\quad - X^\alpha(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)|^2. \end{aligned} \quad (1.41)$$

При оценивании $I_{12}(\tau, \omega)$ будем пользоваться определением интеграла Ито и видом $X(\tau, \omega)$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{I_{12}(\tau, \omega)\}^2 &= \mathbf{E} \left\{ \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_\tau-1} (I) \int_{t'_\tau + k\tilde{\delta}}^{t'_\tau + (k+1)\tilde{\delta}} \left[\sigma^{ij}(X(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sigma^{ij}(X(s, \omega)) \right] dB^j(s, \omega) \right\}^2 \leq C\tilde{\delta}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Из соотношений (1.40)–(1.42) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{I_1(\tau, \omega)\}^2 &\leq \frac{C}{n} + C\tilde{\delta} \\ &+ C\tilde{\delta} \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{\alpha=1}^d \mathbf{E}|Y_n^\alpha(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) - X^\alpha(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)|^2, \end{aligned} \quad (1.43)$$

а из соотношений (1.28)–(1.32), (1.39), (1.43) получаем для $i = \overline{1, d}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{H_2^i(\tau, \omega)\}^2 &\leq \frac{C}{n} + \frac{C}{n\tilde{\delta}} + Cn\tilde{\delta}^2 + Cn^3\tilde{\delta}^4 + Cn^2h_n^4 + C\Delta \\ &+ C\tilde{\delta} \sum_{k=0}^{m_\tau-1} \sum_{\alpha=1}^d \mathbf{E}|Y_n^\alpha(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega) - X^\alpha(t'_\tau + k\tilde{\delta}, \omega)|^2. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Далее воспользуемся утверждением: если $x_k \leq a + b \sum_{j=0}^{k-1} x_j$, то $x_k \leq (b+1)^{k-1}(a + bx_0)$.

Применив это утверждение к неравенству (1.44), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\|Y_n(t'_\tau + m_\tau\tilde{\delta}, \omega) - X(t'_\tau + m_\tau\tilde{\delta}, \omega)\|^2 &\leq C \sum_{i=1}^d \mathbf{E}\{H_1^i(\tau, \omega)\}^2 + \frac{C}{n} + \frac{C}{n\tilde{\delta}} + Cn\tilde{\delta}^2 + Cn^3\tilde{\delta}^4 + Cn^2h_n^2 + C\Delta \\ &+ C\tilde{\delta} \sum_{i=1}^d \mathbf{E}|Y_n^i(t'_\tau, \omega) - X^i(t'_\tau, \omega)|^2. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Оценим $H_1^i(\tau, \omega)$ из (1.27). С учетом леммы получаем, что

$$\mathbf{E}\{H_1^i(\tau, \omega)\}^2 \leq C \sup_{t \in [0, h_n)} \mathbf{E}|X_{0n}^i(t, \omega) - x^i|^2 + Cn\tilde{\delta}^2 + C\tilde{\delta}. \quad (1.46)$$

Из неравенств (1.45), (1.46) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sup_{t \in T} \mathbf{E}\|Y_n(t, \omega) - X(t, \omega)\|^2 &\leq \frac{C}{n} + \frac{C}{n\tilde{\delta}} + Cn\tilde{\delta}^2 + Cn^3\tilde{\delta}^4 + Cn^2h_n^2 + C\Delta \\ &+ C \sup_{t \in [0, h_n)} \mathbf{E}\|X_{0n}(t, \omega) - x\|^2. \end{aligned}$$

Учитывая вид $\tilde{\delta}$ и Δ , окончательно приходим к утверждению теоремы.

Следствие 3. Пусть $\sigma^{ij} \in C_B^2(\mathbf{R}^d)$, $a^i \in C_B^1(\mathbf{R}^d)$, $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, r}$, и $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что

$$h_n = o(n^{-1}), \quad (1.47)$$

$$\sup_{t \in [0, h_n]} \mathbf{E} \|X_{0n}(t, \omega) - x\|^2 \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\sup_{t \in T} \mathbf{E} \|X(t, \omega) - Y_n(t, \omega)\|^2 \rightarrow 0,$$

где $X(t, \omega)$ и $X_n(t, \omega)$ — решения задач (1.24) и (1.16) соответственно.

З а м е ч а н и е 4. Несложно видеть, что условие (1.47) эквивалентно тому, что $\tilde{h} = [(h_n)] \in S$.

1.4. Смешанный случай. В этом пункте исследуем предельное поведение решений следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} X_n^i(t + h_n, \omega) - X_n^i(t, \omega) \\ = \sigma_n^{i1}(X_n(t, \omega)) [B_n^1(t + h_n, \omega) - B_n^1(t, \omega)] \\ + \sigma_n^{i2}(X_n(t, \omega)) [B_n^2(t + h_n, \omega) - B_n^2(t, \omega)] \\ + a_n^i(X_n(t, \omega)) h_n, \quad t \in T, \\ X_n^i|_{[0, h_n]} = X_{0n}^i(t, \omega), \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (1.48)$$

где $B_n(t, \omega) = (B_n^1(t, \omega), B_n^2(t, \omega))$, $X_{0n} = (X_{0n}^1, X_{0n}^2)$, $B_n^1(t, \omega) = (B^1 * \rho_n)(t, \omega)$, ρ_n определено в (1.2), $B_n^2(t, \omega) = (B^2 * \rho_n^1)(t, \omega)$, $\rho_n^1(t) = \varphi(n) \rho(\varphi(n)t)$, $\varphi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ — монотонно неубывающая функция, а ρ — из соотношений (1.2), $B = (B^1, B^2)$ — двумерный стандартный процесс $\mathcal{F}_t$ -броуновского движения; σ_n^{ij} , a_n^i задаются так же, как и в (1.2), для $i, j = 1, 2$.

Пусть

$$X(t, \omega) = (X^1(t, \omega), X^2(t, \omega))$$

— решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} X^i(t, \omega) = x^i + (S) \int_0^t \sigma^{i1}(X(s, \omega)) dB^1(s, \omega) \\ + (I) \int_0^t \sigma^{i2}(X(s, \omega)) dB^2(s, \omega) + \int_0^t a^i(X(s, \omega)) ds, \end{aligned}$$

$i = 1, 2$, $t \in T$, $x = (x^1, x^2) \in \mathbf{R}^2$.

Теорема 5. Пусть $\sigma^{ij} \in C_B^2(\mathbf{R}^2)$, $a^i \in C_B^1(\mathbf{R}^2)$, $i, j = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{t \in T} \mathbf{E} \|X(t, \omega) - X_n(t, \omega)\|^2 \leq C \sup_{t \in [0, h_n]} \mathbf{E} \|x - X_{0n}(t, \omega)\|^2 \\ + C n^2 h_n^2 + \frac{C}{\varphi(n) h_n} + \frac{C}{n^{8/7} h_n} + C n^{-6/7 + \alpha}, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbf{R}^2$, $X_n(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbf{N}$, —

решение задачи Коши (1.48), а α — сколь угодно малое положительное число, $h_n < 1/n$, $1/\varphi(n) < h_n$.

Доказательство теоремы 5 проводится методами доказательства теорем 2 и 4.

2. Ассоциированные в смысле Ито и Стратоновича решения уравнений в дифференциалах в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов

В прямом произведении алгебр $\mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)^d$ ($\mathcal{G}_L(\tilde{T}, \Omega)^d$) рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}} \tilde{X}^i(\tilde{t}, \omega) = \sum_{j=1}^r \tilde{\sigma}^{ij}(\tilde{X}(\tilde{t}, \omega)) d_{\tilde{h}} \tilde{B}^j(\tilde{t}, \omega) + \tilde{a}^i(\tilde{X}(\tilde{t}, \omega)) d_{\tilde{h}} \tilde{t}, \\ \tilde{X}^i|_{[\tilde{0}, \tilde{h}]} = \tilde{X}_0^i(\tilde{t}, \omega), \quad i = \overline{1, d}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\tilde{\sigma}^{ij} = [(\sigma_n^{ij})] \in \mathcal{G}(\tilde{\mathbf{R}}^d)$, $\tilde{B}^j = [(B_n^j)] \in \mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)$ ($\mathcal{G}_L(\tilde{T}, \Omega)$) — обобщенные случайные процессы броуновского движения, $\tilde{a}^i = [(a_n^i)] \in \mathcal{G}(\tilde{\mathbf{R}}^d)$, $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, r}$; $\tilde{t} = [(t)] \in \tilde{T}$, $\tilde{h} = [(h_n)] \in H$, $\tilde{t} + \tilde{h} \in \tilde{T}$, $\tilde{X}_0^i = [(X_{0n}^i)] \in \mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)$ ($\mathcal{G}_L(\tilde{T}, \Omega)$), $i = \overline{1, d}$, $\tilde{X} = (\tilde{X}^1, \dots, \tilde{X}^d)$, $\tilde{X}_0 = (\tilde{X}_0^1, \dots, \tilde{X}_0^d)$.

В этом параграфе исследуем предельное при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ поведение решений задачи (2.1) в прямом произведении алгебр $\mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)^d$ ($\mathcal{G}_L(\tilde{T}, \Omega)^d$).

2.1. Теоремы существования и единственности.

Теорема 6. Для того чтобы в прямом произведении алгебр $\mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)^d$ решение задачи Коши (2.1) существовало и было единственным, необходимо и достаточно, чтобы для любых представителей (σ_n^{ij}) , (a_n^i) , (X_{0n}^i) , (B_n^j) , (h_n) , $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, r}$, выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} & \frac{d^l}{dt^l} X_{0n}^i(h_n - s, \omega) - \frac{d^l}{dt^l} X_{0n}^i(s, \omega) \\ & - \sum_{j=1}^r \frac{d^l}{dt^l} \left\{ \sigma_n^{ij}(X_{0n}(s, \omega)) [B_n^j(h_n + s, \omega) - B_n^j(s, \omega)] \right\} \\ & - \frac{d^l}{dt^l} a_n^i(X_{0n}(s, \omega)) h_n \xrightarrow{s \rightarrow +0} 0, \quad i = \overline{1, d}, \end{aligned}$$

для почти всех $\omega \in \Omega$ и любых $l = 0, 1, 2, \dots$.

Здесь $(d^l/dt^l) X(t, \omega)$, $l = 1, 2, \dots$, есть l -я производная случайного процесса $X(t, \omega)$ в смысле сходимости почти всюду по $\omega \in \Omega$.

Теорема 7. Пусть для любых представителей (σ_n^{ij}) , (a_n^i) , (X_{0n}^i) , (B_n^j) , (h_n) , $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, r}$, выполняются условия

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_d} x_d} \sigma_n^{ij} \in C_B(\mathbf{R}^d), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_d} x_d} a_n^i \in C_B(\mathbf{R}^d) \quad (2.3)$$

для всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, и

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\{ \frac{d^l}{dt^l} X_{0n}^i(h_s - s, \omega) - \frac{d^l}{dt^l} X_{0n}^i(s, \omega) \right. \\ & \quad - \sum_{j=1}^r \frac{d^l}{dt^l} \left(\sigma_n^{ij}(X_{0n}(s, \omega)) [B_n^j(h_s + s, \omega) - B_n^j(s, \omega)] \right) \\ & \quad \left. - \frac{d^l}{dt^l} a_n^i(X_{0n}(s, \omega)) h_n \right\} \xrightarrow{s \rightarrow +0} 0, \quad i = \overline{1, d}, p \geq 1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

для любых $l = 0, 1, 2, \dots$. Тогда решение задачи Коши (2.1) в прямом произведении алгебр $\mathcal{G}_L(\tilde{T}, \Omega)^d$ существует и единственно.

Здесь $(d^l/dt^l)X(t, \omega)$, $l = 1, 2, \dots$, есть l -я производная случайного процесса $X(t, \omega)$ в смысле $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, $p \geq 1$.

Доказательства теорем 6 и 7 проводятся методом математической индукции.

2.2. Ассоциированные решения уравнений в дифференциалах в $\mathcal{G}_L(\tilde{T}, \Omega)^d$. Пусть $\tilde{X}(t, \omega) = [(X_n(t, \omega))]$ — решение задачи Коши (2.1). Случайный процесс $X(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, назовем ассоциированным в смысле Ито (Стратоновича) решением данной задачи, если при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $\tilde{h} \in I$ ($\tilde{h} \in S$), для любого $(X_n) \in \tilde{X}$ $X_n(t, \omega)$ сходится к $X(t, \omega)$ в $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ или почти всюду по $\omega \in \Omega$ и равномерно по $t \in T$.

Из следствия 2 и теоремы 7 вытекает

Теорема 8. Пусть выполняются условия (1.23), (2.2)–(2.4) и обобщенный случайный процесс $\tilde{X}_0$ ассоциирует $x \in \mathbf{R}^d$. Тогда ассоциированное в смысле Ито решение задачи Коши (2.1) в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов $\mathcal{G}_L(\tilde{T}, \Omega)^d$ является решением стохастического дифференциального уравнения (1.1).

Из следствия 3 и теоремы 7 вытекает

Теорема 9. Пусть выполняются условия (1.47), (2.2)–(2.4) и обобщенный случайный процесс $\tilde{X}_0$ ассоциирует $x \in \mathbf{R}^d$. Тогда ассоциированное в смысле Стратоновича решение задачи Коши (2.1) в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов $\mathcal{G}_L(\tilde{T}, \Omega)^d$ является решением стохастического дифференциального уравнения (1.24).

В теоремах 8 и 9 в качестве обобщенных случайных процессов броуновского движения рассматриваются обобщенные случайные процессы вида (1.2).

Аналогичные результаты справедливы и в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов $\mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)^d$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wong E., Zakai M. On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 5, p. 1560–1564.
2. Sussman H. J. On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations. — Ann. Probab., 1978, v. 6, № 1, p. 19–41.
3. Мацкявичюс В. S^p -устойчивость решений симметрических стохастических дифференциальных уравнений. — Литов. матем. сб., 1985, т. 25, в. 4, с. 72–84.
4. Юрачковский А. П. Предельная теорема для стохастических разностных схем без запаздывания. — Докл. АН УССР, 1986, сер. А, № 7, с. 24–26.
5. Карабаш М. А. Об аппроксимациях решений стохастических уравнений с монотонными коэффициентами. — Теория случайных процессов (Киев), 1986, № 14, с. 25–28.
6. Гилман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968, 354 с.
7. Itô K., Nisio M. On stationary solutions of a stochastic differential equation. — J. Math. Kyoto Univ., 1964, v. 4, № 1, p. 1–75.
8. Maruyama G. Continuous Markov processes and stochastic equations. — Rend. Circ. Mat. Palermo, 1955, v. 4, № 2, p. 48–90.
9. Мацкявичюс В. Некоторые аппроксимации стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений. — Литов. матем. сб., 1978, т. 18, № 3, с. 101–108.
10. Хорстземке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987, 400 с.
11. Лазакович Н. В., Сташуленок С. П. Аппроксимация стохастических интегралов Ито и Стратоновича элементами прямого произведения алгебр обобщенных случайных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 785–809.
12. Егоров Ю. В. К теории обобщенных функций. — Успехи матем. наук, 1990, т. 45, в. 5, с. 3–40.
13. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 448 с.
14. Рождественский Б. Л. Новый метод решения задачи Коши в целом для квазилинейных уравнений. — Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 2, с. 309–312.
15. Кузнецов Н. Н. О применении метода сглаживания к некоторым системам гиперболических квазилинейных уравнений. — Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1973, т. 13, № 1, с. 92–102.

Поступила в редакцию
22.II.1996