Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Салихов, Об одном обобщении расстояния Чернова,
Теория вероятн. и ее примен., 1998, том 43, выпуск 2, 294–
314

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 09:33:29

© 1998 г.

САЛИХОВ Н. П.*

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ РАССТОЯНИЯ ЧЕРНОВА

Вводится величина $\rho(\mathbf{p}; A, B)$, характеризующая при заданном векторе $\mathbf{p}$ расстояние между конечными множествами A, B векторов вероятностей исходов в полиномиальных схемах испытаний с общим множеством исходов. В случае одноэлементных $A = \{\mathbf{a}\}$, $B = \{\mathbf{p}\}$ величина $\rho(\mathbf{p}; A, B)$ совпадает с расстоянием Чернова между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{a}$. Указан вероятностный смысл и найдены некоторые свойства обобщенного расстояния Чернова $\rho(\mathbf{p}; A, B)$. Для различения m полиномиальных распределений с параметрами $(n, \mathbf{p}_1), \dots, (n, \mathbf{p}_m)$ рассмотрено байесовское решающее правило, в котором истинное распределение указывается в $k \in \{1, \dots, m-1\}$ наиболее правдоподобных вариантах. Для этого правила найдены явные и асимптотические (при $n \rightarrow \infty$) оценки вероятностей ошибок, зависящие от не более C_{m-1}^k обобщенных расстояний Чернова, доказана его оптимальность в некотором смысле.

Ключевые слова и фразы: полиномиальная схема испытаний, расстояние Кульбака–Лейблера, расстояние Чернова, различение нескольких простых гипотез, байесовское решающее правило, оценки вероятностей ошибок.

1. Введение

Цель работы — указать «содержательный статистический смысл» (выражение из [1, § 4]) величины, которая естественным образом обобщает расстояние Чернова (см. [2]) между двумя распределениями, на примере задачи о различении нескольких полиномиальных распределений.

Уточним постановку этой задачи. Пусть натуральное $r \geq 2$,

$$\Omega = \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r): u_1 \geq 0, \dots, u_r \geq 0, u_1 + \dots + u_r = 1\},$$

$$\Omega_+ = \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r): u_1 > 0, \dots, u_r > 0, u_1 + \dots + u_r = 1\}.$$

Пусть проведено n независимых испытаний по полиномиальной схеме $H(\mathbf{p})$ с r исходами; $p_1, \dots, p_r$ — вероятности исходов, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r) \in \Omega_+$, x_k — число появлений k -го ($k = 1, \dots, r$) исхода, Ω_n — множество всех элементарных событий, $|\Omega_n| = C_{n+r-1}^{r-1}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) =$

*ФАПСИ, Б. Кисельный пер., 4, 103031 Москва, Россия.

$(x_1/n, \dots, x_r/n)$. Тогда $P_n(\underline{x}, \mathbf{p}) = (n!/(x_1! \dots x_r!)) p_1^{x_1} \dots p_r^{x_r}$ — вероятность (правдоподобие) элементарного события $\underline{x}$. Будем говорить, что гипотеза $H(\mathbf{p}, n)$ верна, если n независимых испытаний проведены по схеме $H(\mathbf{p})$.

Пусть имеются m альтернативных гипотез $H(\mathbf{p}_j, n)$, $\mathbf{p}_j = (p_{j,1}, \dots, p_{j,r})$, $j = 1, \dots, m$, где $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$ — различные элементы из Ω_+ , множество исходов одно и то же при всех m гипотезах. Известную задачу множественной классификации [3, гл. 6, § 4] или идентификации [4, § 7d] для указанных m гипотез можно сформулировать следующим образом. Требуется построить при каждом n правило, по которому статистик по наблюдению $\underline{x}$, может сделать однозначный вывод: гипотеза $H(\mathbf{p}_i, n)$ верна. Такое правило будем характеризовать вероятностями $\alpha_{t,n}$ отвергнуть истинную гипотезу $H(\mathbf{p}_t, n)$ (т.е. сделать вывод: верна одна из гипотез $H(\mathbf{p}_i, n)$, $i \neq t$).

Известно, что для любой последовательности правил

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \max_{1 \leq t \leq m} \alpha_{t,n} \geq -\rho, \quad (1)$$

где ρ — минимум $m(m-1)$ расстояний Чернова между $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, причем существует оптимальная последовательность (байесовских) правил, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \max_{1 \leq t \leq m} \alpha_{t,n} = -\rho, \quad (2)$$

(см. [5]). При малых n , получаемая из (2), оценка для $\max_{1 \leq t \leq m} \alpha_{t,n}$ может оказаться неудовлетворительной. Чтобы не отвергнуть при малом n истинную гипотезу, в данной работе предлагается вместо однозначного вывода делать по $\underline{x}$ многозначный вывод: верна одна из гипотез множества $d(\underline{x}) = \{H(\mathbf{p}_{i_1}, n), \dots, H(\mathbf{p}_{i_k}, n)\}$, $i_1, \dots, i_k$ — различные элементы множества $\{1, \dots, m\}$, $1 \leq k \leq m-1$; при $k=1$ вывод однозначный. Для такого решающего правила вероятность $\alpha_{t,n}$ — это вероятность того, что истинная гипотеза $H(\mathbf{p}_t, n)$ не входит в $d(\underline{x})$. Оказывается, что в этом случае (при $k > 1$) верно неравенство (1), а при определенных ограничениях на векторы $\mathbf{p}_t$ справедливо и равенство (2), в которых ρ заменяется на минимум не более mC_{m-1}^k обобщенных расстояний Чернова. Правила $D_B(n; k)$, для которых верно (2), задаются множествами $d(\underline{x})$, где $i_1, \dots, i_k$ — номера распределений с максимальными правдоподобиями наблюдения $\underline{x}$ (см. теорему 7, замечание 8). Для правил $D_B(n; k)$ получены также явные верхние оценки вероятностей $\alpha_{t,n} = \alpha_t(D_B(n; k))$, зависящие от обобщенных расстояний Чернова (см. теорему 6) и от расстояний Чернова (см. теорему 8).

При решении классической задачи об r -гранной игральной кости, когда $\varepsilon > 1/r$ — вероятность выпадения одной из граней (фальшивой), $\delta = (1 - \varepsilon)/(r - 1)$ — вероятность выпадения каждой из остальных граней (см. [3, гл. 6, § 4], [6, примечание к § 1]), предложенный метод (при

различении r альтернативных гипотез о фальшивой грани) дает следующие результаты (см. примеры 1, 3). Все требующиеся для вычисления ρ обобщенные расстояния Чернова одинаковы и равны

$$\rho_k^* = -\ln \left(\delta \left(r - k - 1 + (k+1) \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^{1/(k+1)} \right) \right) \quad (3)$$

(следовательно, $\rho = \rho_k^*$). При применении правила $D_B(n; k) = \{\text{фальшивая грань} \text{ — одна из } k \text{ самых часто выпавших при } n \text{ бросаниях}\}$ для вероятностей ошибок верны оценки

$$\alpha_{t,n} \leq C_{r-1}^k \exp(-n\rho_k^*), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \alpha_{t,n} = -\rho_k^* \quad (4)$$

при $t = 1, \dots, n$. Формулы (3), (4) подтверждают интуитивно ясную закономерность — чем больше k и ε , тем больше вероятность того, что фальшивая грань — одна из k самых часто выпавших при n бросаниях (ρ_k^* возрастает с ростом k и ε).

Далее используем следующие обозначения: $\chi(A)$ — индикатор события A ;

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^r u_k \ln \frac{u_k}{p_k}$$

($u_i \ln(u_i/p_i) = 0$ при $u_i = 0$) — расстояние Кульбака–Лейблера от $\mathbf{u} \in \Omega$ до $\mathbf{p} \in \Omega_+$ (см. [7, гл. 6, § 2]); $P_n(\omega, \mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{x} \in \omega \cap \Omega_n} P_n(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ для $\mathbf{p} \in \Omega_+$ и $\omega \subseteq \Omega$.

Множество Ω будем рассматривать как метрическое пространство с расстоянием $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\sum_{i=1}^r (x_i - y_i)^2)^{1/2}$ для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$. Пусть $[\omega]$ — замыкание множества $\omega \subseteq \Omega$,

$$M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r): \mathbf{u} \in \Omega, \sum_{k=1}^r u_k \ln \frac{a_k}{b_k} \geq 0 \right\},$$

$$M_+(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r): \mathbf{u} \in \Omega, \sum_{k=1}^r u_k \ln \frac{a_k}{b_k} > 0 \right\}$$

для $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega_+$. Для $J \subseteq \{1, \dots, r\}$ положим

$$\Omega(J) = \{\mathbf{u} \in \Omega: u_j > 0 \text{ для } j \in J, u_j = 0 \text{ для } j \in \{1, \dots, r\} \setminus J\}.$$

Будем использовать следующие просто доказываемые утверждения.

а) Если $\omega \subseteq \Omega$ — выпуклое множество (при $|\omega| = 1$ множество ω считается замкнутым и выпуклым), то существует единственное множество $J = J(\omega) \subseteq \{1, \dots, r\}$ такое, что $\omega \subseteq [\Omega(J)]$, $\omega \cap \Omega(J) \neq \emptyset$, $|J| = s(\omega) = \sup_{\mathbf{u} \in \omega} \sum_{k=1}^r \chi(u_k > 0) \geq 1$.

б) Если $\omega = \{\mathbf{u} \in \Omega: f_1(\mathbf{u}) > 0, \dots, f_t(\mathbf{u}) > 0\} \neq \emptyset$, $f_1(\mathbf{u}), \dots, f_t(\mathbf{u})$ — непрерывные на Ω функции, то $\omega \cap \Omega_+ \neq \emptyset$ и ω — открытое в Ω множество.

в) Если $g_1(u), \dots, g_t(u)$ — непрерывные и вогнутые на Ω функции, $\omega_+ = \{u \in \Omega: g_1(u) > 0, \dots, g_t(u) > 0\} \neq \emptyset$, то ω_+ — выпуклое множество, $[\omega_+] = \omega = \{u \in \Omega: g_1(u) \geq 0, \dots, g_t(u) \geq 0\}$.

г) Если $x_{i,n} > 0$ для $i = 1, \dots, t$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln x_{i,n} = -b_i$ для $i = 1, \dots, t$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \max_{1 \leq i \leq t} x_{i,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln(x_{1,n} + \dots + x_{t,n}) = -\min_{1 \leq i \leq t} b_i.$$

2. Обобщенное расстояние Чернова

В п. 2, 3 предполагается, что A, B — конечные, непустые подмножества множества Ω_+ , $p \in \Omega_+$.

Пусть $M(a, B) = \cap_{b \in B} M(a, b)$, $M(A, b) = \cap_{a \in A} M(a, b)$, $M(A, B) = \cap_{a \in A} M(a, B)$ и аналогично (с заменой M на M_+) определяются множества $M_+(a, B)$, $M_+(A, b)$, $M_+(A, B)$.

При $M(A, B) \neq \emptyset$ назовем величину $\rho(p; A, B) = \min_{u \in M(A, B)} I(u, p)$ обобщенным расстоянием Чернова от A до B при заданном p .

Укажем следующие очевидные свойства величины $\rho(p; A, B)$:

1) $\rho(p; A, B) \geq 0$ и $\rho(p; A, B) = 0$ только при $p \in M(A, B)$ (следствие свойств расстояния Кульбака–Лейблера, [7, гл. 6, § 2]);

2) $\rho(p; a, b) \rho(p; b, a) = 0$;

3) $\rho(p; a, B) \leq I(a, p)$;

4) $\rho(p; A, B) \geq \max_{(a,b) \in A \times B} \rho(p; a, b)$;

5) $\rho(p; C, D) \leq \rho(p; A, B)$, если $C \times D \subseteq A \times B$.

Пусть $\sigma_i = \prod_{(a,b) \in A \times B} (a_i/b_i)^{\sigma_{a,b}}$, $c_i = p_i \sigma_i / \sigma$ для $i = 1, \dots, r$, $\sigma = \sum_{i=1}^r p_i \sigma_i$, $c = (c_1, \dots, c_r)$. Легко проверить, что если все $\sigma_{a,b} \geq 0$ и $\sigma \leq 1$ (все $\sigma_{a,b} \leq 0$ и $\sigma \geq 1$), то $I(u, c) \leq I(u, p)$ ($I(u, c) \geq I(u, p)$) при любом $u \in M(A, B)$ и, следовательно, $\rho(c; A, B) \leq \rho(p; A, B)$ ($\rho(c; A, B) \geq \rho(p; A, B)$). Поэтому имеем $\rho(a; A, B) \leq \rho(p; A, B)$ при $p \in B$, $a \in A$ ($\rho(b; A, B) \geq \rho(p; A, B)$ при $p \in A$, $b \in B$).

Следующая теорема указывает вероятностный смысл величины $\rho(p; A, B)$.

Теорема 1. Если $M_+(A, B) \neq \emptyset$, $M_+(A, B) \subseteq \omega \subseteq M(A, B)$, то $P_n(\omega, p) > 0$ при всех достаточно больших n и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln P_n(\omega, p) = -\rho(p; A, B).$$

Лемма 1. Пусть $\omega \subseteq \Omega$, $\omega \cap \Omega_n \neq \emptyset$ при всех достаточно больших n и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{u \in \omega \cap \Omega_n} I(u, p) = \min_{u \in [\omega]} I(u, p). \quad (5)$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln P_n(\omega, p) = -\min_{u \in [\omega]} I(u, p)$.

Эта лемма — простое следствие оценки

$$C_r n^{-(r-1)/2} \leq P_n(\omega, p) \exp \left(n \min_{u \in \omega \cap \Omega_n} I(u, p) \right) \leq C_{n+r-1}^{r-1},$$

которая верна, с некоторой положительной константой C_r , если $n \geq r$ и $\omega \cap \Omega_n \neq \emptyset$. В [8] (см. теорему 2.1) без доказательства утверждается, что можно положить $C_r = \frac{1}{2}$. Уточняя оценку (8.86) в [9, гл. 8, § 4], можно получить значение

$$C_r = \sqrt{2\pi} \left(\frac{r}{2\pi e^{1/6}} \right)^{r/2}.$$

Для $\omega = M(a, b)$ равенство (5) следует из леммы А2 работы [8]. Из лемм 2, 3 и из того, что множество $\omega = M_+(A, B) \neq \emptyset$ открыто в Ω и $[M_+(A, B)] = M(A, B)$ (см. утверждения б), в)), следует (5) для $\omega = M_+(A, B) \neq \emptyset$, что и доказывает теорему 1.

Лемма 2. Пусть $\omega \subseteq \Omega$, $\omega \neq \emptyset$, $\min_{u \in [\omega]} I(u, p) = I(y, p)$ при некотором $y \in [\omega]$ и существует последовательность u_n , $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся к y и такая, что $u_n \in \omega \cap \Omega_n$ при всех достаточно больших n . Тогда верно равенство (5).

Доказательство. Достаточно учесть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n, p) = I(y, p) \quad \text{и} \quad \min_{u \in [\omega]} I(u, p) \leq \min_{u \in \omega \cap \Omega_n} I(u, p) \leq I(u_n, p)$$

при всех достаточно больших n .

Лемма 3. Пусть $\omega \subseteq \Omega$ — непустое открытое в Ω множество. Тогда для любой точки $y \in [\omega]$ существует последовательность u_n , $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся к y и такая, что $u_n \in \omega \cap \Omega_n$ при всех достаточно больших n .

Доказательство. Пусть $n_0 = 0$, $\delta_1, \delta_2, \dots$ — убывающая и сходящаяся к 0 последовательность положительных чисел. Для $m = 1, 2, \dots$ в δ_m -окрестности точки y найдем точку $z_m = (z_{m,1}, \dots, z_{m,r})$ множества ω . При некотором $\varepsilon_m \in (0, \delta_m)$ множество $\{u: u \in \Omega, d(z_m, u) < \varepsilon_m\} \subseteq \omega$. Пусть $v_{n,m} = (v_{n,m,1}, \dots, v_{n,m,r}) \in \Omega$, где

$$v_{n,m,t} = \left(n - \sum_{j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{t\}} [nz_{m,j}] \right) n^{-1} \quad \text{при некотором } t \in \{1, \dots, r\},$$

$$v_{n,m,j} = \frac{[nz_{m,j}]}{n} \quad \text{для } j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{t\}.$$

Тогда

$$d(z_m, v_{n,m}) < \frac{\sqrt{r(r-1)}}{n} < \varepsilon_m,$$

$$d(y, v_{n,m}) \leq d(y, z_m) + d(z_m, v_{n,m}) < \delta_m + \varepsilon_m < 2\delta_m$$

при всех $n \geq n_m = 1 + \max(n_{m-1}, [r/\varepsilon_m])$.

Для последовательности $\{u_n\}$, где $u_n = v_{n,m}$ при $n = n_m, \dots, n_{m+1} - 1$, $m = 1, 2, \dots$, верно утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Если $A \cap B \neq \emptyset$, то $M_+(A, B) = \emptyset$. Если $A \cap B = \emptyset$, $|A| = 1$, то $A \subseteq M_+(A, B)$, $M_+(A, B) \neq \emptyset$. Пусть $A \cap B = \emptyset$, $|A| > 1$, $M(A, B) \neq \emptyset$, $M_+(A, B) = \emptyset$. Тогда теорему 1 нельзя применить для $\omega \subseteq M(A, B)$, $\omega \neq \emptyset$. Однако во многих случаях оказывается, что $M(A, B) \cap \Omega_n = \emptyset$ (т.е. $P_n(\omega, p) = 0$) при всех достаточно больших n . Действительно, пусть

$$s = \sup_{u \in M(A, B)} \sum_{(a, b) \in A \times B} \chi \left(\sum_{i=1}^r u_i \ln \frac{a_i}{b_i} > 0 \right) < |A| \cdot |B|.$$

Из выпуклости $M(A, B)$ следует существование единственного множества

$$M = \left\{ (a, b) \in A \times B : \sum_{i=1}^r u_i \ln \frac{a_i}{b_i} = 0 \text{ для всех } u \in M(A, B) \right\},$$

$|M| = |A| \cdot |B| - s$, такого, что при $s \geq 1$ величина $\sum_{i=1}^r v_i \ln(a_i/b_i) > 0$ при некотором $v = (v_1, \dots, v_r) \in M(A, B)$ для всех $(a, b) \in A \times B \setminus M$. При этом $|\{a : (a, b) \in M\}| > 1$ (если a — единственный элемент в $\{a : (a, b) \in M\}$, то при малом $\varepsilon > 0$ $(v + \varepsilon a)/(1 + \varepsilon) \in M_+(A, B)$). Таким образом, условие $M(A, B) \cap \Omega_n \neq \emptyset$ при всех $n \geq n_0$ приводит к тому, что в $A \times B$ существуют две пары $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$, $a_1 \neq a_2$, для которых при каждом $n \geq n_0$ найдутся целые неотрицательные числа $x_1, \dots, x_r$, удовлетворяющие равенствам

$$x_1 + \dots + x_r = n, \quad \prod_{i=1}^r a_{j,i}^{x_i} = \prod_{i=1}^r b_{j,i}^{x_i}, \quad j = 1, 2.$$

Если координаты всех $a \in A$, $b \in B$ рациональны, то проверка последних равенств представляет собой теоретико-числовую задачу. Из этих равенств также следует (см. критерий Вороного [10, гл. 2, § 3]) несовместность (легко решаемой) системы неравенств

$$y_1 \ln \frac{a_{1,i}}{b_{1,i}} + y_2 \ln \frac{a_{2,i}}{b_{2,i}} < 0,$$

$$i \in I, \quad I = \{i \in \{1, \dots, r\} : |a_{1,i} - b_{1,i}| + |a_{2,i} - b_{2,i}| > 0\}.$$

Вероятностный смысл величины $\rho(p; A, B)$ можно дополнить неравенством $P_n(M(A, B), p) \leq \exp(-n \rho(p; A, B))$. Это неравенство получается из следующих леммы и теоремы.

Лемма 4. Пусть $\omega \subseteq \Omega$ — замкнутое выпуклое множество, $p \in \Omega_+ \setminus \omega$, $J = J(\omega)$. Тогда минимум функции $I(u, p)$ на ω достигается в такой точке $z \in \Omega(J)$, что $(1 - \varepsilon)z + \varepsilon p \notin \omega$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$.

Доказательство. Случай $|\omega| = 1$ очевиден. Пусть $|\omega| > 1$. Если $(1 - \varepsilon)\mathbf{z} + \varepsilon\mathbf{p} \in \omega$, $\varepsilon \in (0, 1)$, то (используя строгую выпуклость функции $I(\mathbf{u}, \mathbf{p})$) имеем:

$$\begin{aligned} I((1 - \varepsilon)\mathbf{z} + \varepsilon\mathbf{p}, \mathbf{p}) &< (1 - \varepsilon)I(\mathbf{z}, \mathbf{p}) + \varepsilon I(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = (1 - \varepsilon)I(\mathbf{z}, \mathbf{p}), \\ I((1 - \varepsilon)\mathbf{z} + \varepsilon\mathbf{p}, \mathbf{p}) - I(\mathbf{z}, \mathbf{p}) &< -\varepsilon I(\mathbf{z}, \mathbf{p}) < 0. \end{aligned}$$

Но тогда $\mathbf{z}$ не является точкой минимума на ω . Следовательно, $(1 - \varepsilon)\mathbf{z} + \varepsilon\mathbf{p} \notin \omega$. Существует $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r) \in \omega \cap \Omega(J)$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{z}$ (см. утверждение а)). По теореме Лагранжа

$$I((1 - \varepsilon)\mathbf{z} + \varepsilon\mathbf{w}, \mathbf{p}) - I(\mathbf{z}, \mathbf{p}) = \varepsilon \sum_{k \in J} (w_k - z_k) \ln \frac{z_k + \delta(w_k - z_k)}{p_k} \quad (6)$$

при некотором $\delta \in (0, \varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$. При $\mathbf{z} \in \omega \setminus \Omega(J)$ и при достаточно малом $\varepsilon \in (0, 1)$ правая часть в (6) отрицательна, что приводит (с учетом выпуклости ω) к противоречию:

$$(1 - \varepsilon)\mathbf{z} + \varepsilon\mathbf{w} \in \omega, \quad I((1 - \varepsilon)\mathbf{z} + \varepsilon\mathbf{w}, \mathbf{p}) < I(\mathbf{z}, \mathbf{p}). \quad (7)$$

Следовательно, $\mathbf{z} \in \Omega(J)$.

Теорема 2. При выполнении условий леммы 4

$$P_n(\omega, \mathbf{p}) \leq \exp \left(-n \min_{\mathbf{u} \in \omega} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \right).$$

Доказательство. Пусть точка $\mathbf{z}$ удовлетворяет условиям леммы 4. Тогда

$$\begin{aligned} P_n(\omega, \mathbf{p}) &= \sum_{(n_1, \dots, n_r)/n \in \omega} \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} z_1^{n_1} \dots z_r^{n_r} \exp \left(-n \sum_{k=1}^r \frac{n_k}{n} \ln \frac{z_k}{p_k} \right) \\ &\leq \exp \left(-n \min_{\mathbf{u} \in \omega} f(\mathbf{u}) \right), \end{aligned}$$

где $f(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^r u_k \ln(z_k/p_k)$. Из неравенства $f(\mathbf{u}) \leq I(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ (равносильного неравенству $I(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \geq 0$) следует, что $\min_{\mathbf{u} \in \omega} f(\mathbf{u}) \leq I(\mathbf{z}, \mathbf{p})$. Достаточно доказать, что

$$\min_{\mathbf{u} \in \omega} f(\mathbf{u}) = I(\mathbf{z}, \mathbf{p}).$$

Пусть $|\omega| > 1$ (случай $|\omega| = 1$ очевиден). Допустим противное; тогда $f(\mathbf{w}) < I(\mathbf{z}, \mathbf{p})$ при некотором $\mathbf{w} \in \omega$. По формуле Тейлора при $\varepsilon \in (0, 1)$ и некотором $\delta \in (0, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} I((1 - \varepsilon)\mathbf{z} + \varepsilon\mathbf{w}, \mathbf{p}) - I(\mathbf{z}, \mathbf{p}) \\ = \varepsilon (f(\mathbf{w}) - I(\mathbf{z}, \mathbf{p})) + 2^{-1} \varepsilon^2 \sum_{k \in J} \frac{(w_k - z_k)^2}{z_k + \delta(w_k - z_k)}. \end{aligned}$$

Эта величина при достаточно малом ε отрицательна, что приводит к противоречию (7).

Теорема 3. Пусть

$$|M(A, B)| > 1, \quad J = J(M(A, B)) \quad \text{и} \quad \mathbf{p} \in \Omega_+ \setminus M(A, B).$$

Для того чтобы $\rho(\mathbf{p}; A, B) = I(\mathbf{z}, \mathbf{p})$ при некотором $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in M(A, B)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \in \Omega(J), \quad z_t = p_t \sigma_t \left(\sum_{j \in J} p_j \sigma_j \right)^{-1} \quad \text{для } t \in J, \\ \sum_{t \in J} p_t \sigma_t \ln \sigma_t = 0, \quad \sum_{t \in J} p_t \sigma_t \ln \frac{a_t}{b_t} \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

для всех пар $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A \times B$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r)$, где

$$\sigma_t = \exp \left(\sum_{(a,b) \in A \times B} \sigma_{a,b} \ln \frac{a_t}{b_t} \right), \quad \sigma_{a,b} \geq 0$$

для всех пар $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A \times B$.

Доказательство. Так как $M(A, B) \subseteq [\Omega(J)]$, то

$$\rho(\mathbf{p}; A, B) = \min_{u \in M(A, B)} \sum_{t \in J} u_t \ln \frac{u_t}{p_t}.$$

Необходимость. По лемме 4 $\mathbf{z} \in \Omega(J)$. По критерию оптимальности в задаче выпуклого программирования с линейными ограничениями (вариант теоремы Куна-Таккера, см., например, теорему 3.5.4 из [11, гл. 3]) точка $\mathbf{z}$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \ln \frac{z_t}{p_t} + 1 = \sum_{(a,b) \in A \times B} \sigma_{a,b} \ln \frac{a_t}{b_t} + \beta, \quad t \in J, \\ \sum_{t \in J} z_t \ln \frac{a_t}{b_t} \geq 0 \quad \text{для всех } (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A \times B, \\ \sum_{(a,b) \in A \times B} \sigma_{a,b} \sum_{t \in J} z_t \ln \frac{a_t}{b_t} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

при некоторых неотрицательных $\sigma_{a,b}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A \times B$ и $\beta \in R$. Отсюда следуют условия (8).

Достаточность. Из (8) следует (9) при $\beta = 1 - \ln \sum_{t \in J} p_t \sigma_t$. По тому же критерию оптимальности

$$\min_{u \in M(A, B)} \sum_{t \in J} u_t \ln \frac{u_t}{p_t} = \sum_{t \in J} z_t \ln \frac{z_t}{p_t} = I(\mathbf{z}, \mathbf{p}) = -\ln \sum_{t \in J} p_t \sigma_t.$$

Следующий пример (полезный при решении задачи об r -гранной игральной кости) показывает, что теорема 3 иногда позволяет найти $\rho(\mathbf{p}; A, B)$ в явном виде.

Пример 1. Пусть $A \cap B = \emptyset$,

$$A \cup B \subseteq M_r(\varepsilon) = \{(\varepsilon, \delta, \dots, \delta), (\delta, \varepsilon, \delta, \dots, \delta), \dots, (\delta, \delta, \dots, \delta, \varepsilon)\},$$

$$|M_r(\varepsilon)| = r, \quad \varepsilon \in \left(\frac{1}{r}, 1\right), \quad \delta = \frac{1-\varepsilon}{r-1},$$

$$|A| = k, \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r) \in B, \quad p_j = \varepsilon,$$

$$J_A = \{i: a_i = \varepsilon \text{ при некотором } \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \in A\},$$

$$J_B = \{i: b_i = \varepsilon \text{ при некотором } \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r) \in B\}.$$

Тогда условия теоремы 3 выполняются для $M(A, B)$ при $J = \{1, \dots, r\}$.

Действительно, пусть

$$\frac{|A|}{|A| + |B|} < u < 1, \quad v > 0,$$

$$v(r - |A| - |B|) < 1 - u, \quad u_i = \frac{u}{|A|} \quad \text{для } i \in J_A,$$

$$u_i = \frac{1}{|B|} \left(1 - u - v(r - |A| - |B|)\right) \quad \text{для } i \in J_B,$$

$u_i = v$ для остальных i . Тогда точка $(u_1, \dots, u_r) \in M_+(A, B) \cap \Omega_+$. Следовательно, $s(M(A, B)) = r$, $J = J(M(A, B)) = \{1, \dots, r\}$. Нетрудно проверить, что условия (8) выполняются при следующих числах $\sigma_{a,b}$: $\sigma_{a,b} = 0$, если $a \in A$, $b \in B \setminus \{\mathbf{p}\}$ и $\sigma_{a,p} = \sigma = 1/(k+1)$, если $a \in A$. При этом $\sigma_i = (\varepsilon/\delta)^\sigma$, если $i \in J_A$, $\sigma_j = (\varepsilon/\delta)^{\sigma-1}$, $\sigma_i = 1$ для остальных $r - k - 1$ значений i . Тогда

$$\rho(\mathbf{p}; A, B) = -\ln \sum_{t \in J} p_t \sigma_t = \rho_k^*,$$

где ρ_k^* определено в (3).

Теорема 4. Пусть A, B, H — непустые конечные подмножества множества Ω_+ , $M(A, H)$, $M(B, H)$ — непустые множества, $\mathbf{p} \in \Omega_+ \setminus M(B, H)$ и $\rho(\mathbf{p}; A, H) \leq \rho(\mathbf{p}; B, H)$. Тогда при некотором $\mathbf{b} \in B$

$$M(A, \mathbf{b}) \neq \emptyset, \quad \rho(\mathbf{p}; A, \mathbf{b}) \leq \rho(\mathbf{p}; A, H).$$

Доказательство. Положим $D = M(A, H) \cap M_+(B, H)$, $C = M(A, H) \setminus M_+(B, H)$. Пусть $\rho(\mathbf{p}; A, H) = I(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ при некотором $\mathbf{w} \in M(A, H)$. Если $\mathbf{w} \in D$, то $(1 - \varepsilon)\mathbf{w} + \varepsilon\mathbf{p} \in M_+(B, H)$ при достаточно малом $\varepsilon \in (0, 1)$. По лемме 4 точка $\mathbf{w}$ не является точкой минимума $I(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ на $M(B, H)$,

$$\rho(\mathbf{p}; A, H) = I(\mathbf{w}, \mathbf{p}) > \min_{\mathbf{u} \in M(B, H)} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \rho(\mathbf{p}; B, H),$$

что противоречит условию теоремы. Следовательно,

$$w \in C, \quad w \in M(A, H) \cap M(h, b)$$

при некоторых $h \in H, b \in B$. Тогда $w \in M(A, b)$,

$$\rho(p; A, H) = I(w, p) \geq \min_{u \in M(A, b)} I(u, p) = \rho(p; A, b).$$

Следствие 1. Пусть A, H — непустые конечные подмножества множества Ω_+ , $b \in \Omega_+$, $M(A, H) \neq \emptyset$, $p \in \Omega_+ \setminus M(b, H)$ и $\rho(p; A, H) \leq \rho(p; b, H)$. Тогда $\rho(p; A, b) \leq \rho(p; A, H)$.

Следствие 2. Пусть p, a, b — три различных элемента множества Ω_+ и $\rho(p, a) \leq \rho(p, b)$. Тогда $\rho(p; a, b) \leq \rho(p, a)$.

3. Вычисление расстояния $\rho(p; a, b)$

Применение теоремы 3 при одноэлементных $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ и при $p \in \Omega_+ \setminus M(a, b)$ дает следующие равенства

$$\rho(p; a, b) = I(z, p) = -\ln \min_{x \geq 0} f(x; p, a, b) = -\ln f(\sigma; p, a, b), \quad (10)$$

где $f(x; p, a, b) = \sum_{k=1}^r p_k (a_k/b_k)^x$, $\sigma > 0$ — единственный вещественный корень уравнения $f'(x; p, a, b) = 0$, $z = (z_1, \dots, z_r)$, $z_k = p_k (a_k/b_k)^\sigma \times (f(\sigma; p, a, b))^{-1}$ для $k = 1, \dots, r$.

Теорема 5. Пусть $a \in \Omega_+$, $b \in \Omega_+$, $a \neq b$, $p \in \Omega_+ \setminus M(a, b)$, $p^* = (p_1^*, \dots, p_r^*)$, где $p_k^* = p_k (a_k/b_k)^\tau$ для $k = 1, \dots, r$, τ — единственный на (σ, ∞) корень уравнения $f(x; p, a, b) = 1$. Тогда

$$\rho(p; a, b) = \rho(p^*; b, a), \quad (11)$$

$$\rho(p; a, b) = \min_{u \in \Omega} \max(I(u, p), I(u, p^*)). \quad (12)$$

Доказательство. Из (10) следует, что $\rho(p^*; b, a) = I(z^*, p^*)$, где $z^* = (z_1^*, \dots, z_r^*)$, $z_k^* = p_k^* (b_k/a_k)^{\sigma^*} (f(\sigma^*; p^*, b, a))^{-1}$ для $k = 1, \dots, r$, $\sigma^* > 0$ — единственный вещественный корень уравнения $f'(x; p^*, b, a) = 0$. Это уравнение равносильно уравнению $f'(\tau - x; p, a, b) = 0$. Следовательно, $\sigma^* = \tau - \sigma$, $z^* = z$, $I(z^*, p^*) = I(z, p)$, что доказывает (11).

Пусть

$$\Omega_1 = \{u: u \in \Omega, I(u, p) \geq I(u, p^*)\} = M(a, b),$$

$$\Omega_2 = \{u: u \in \Omega, I(u, p) \leq I(u, p^*)\} = M(b, a).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \Omega} \max (I(u, p), I(u, p^*)) \\ &= \min \left(\min_{u \in \Omega_1} \max (I(u, p), I(u, p^*)), \min_{u \in \Omega_2} \max (I(u, p), I(u, p^*)) \right) \\ &= \min \left(\min_{u \in M(a, b)} I(u, p), \min_{u \in M(b, a)} I(u, p^*) \right) = \rho(p; a, b), \end{aligned}$$

что доказывает (12).

З а м е ч а н и е 2. Полагая $c_k = a_k/b_k$, $k = 1, \dots, r$, нетрудно доказать следующие оценки полезные при вычислении σ, τ как корней указанных выше уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma < S &= - \left(\sum_{k=1}^r p_k \ln c_k \right) \left(\sum_{k=1}^r \chi(c_k > 1) p_k (\ln c_k)^2 \right)^{-1}, \\ \tau < T &= \left(e \sum_{k=1}^r \chi(c_k > 1) p_k \ln c_k \right)^{-1}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 3. Пусть $b = p \neq a$. Тогда $p^* = a$, $0 < \sigma < 1$, $\tau = 1$, из равенств (10), (11) следует, что

$$\rho(p; a, p) = \rho(p; p, a) = \rho(p, a) = \rho(a, p),$$

где

$$\rho(p, a) = -\ln \min_{0 \leq x \leq 1} \sum_{k=1}^r p_k \left(\frac{a_k}{p_k} \right)^x$$

— расстояние Чернова между a и p (см. [2]), а из (11), (12) следуют известные выражения для расстояния Чернова:

$$\rho(p, a) = \rho(a, p) = I(z, p) = I(z, a) = \min_{u \in \Omega} \max (I(u, p), I(u, a))$$

(см. формулы (2.20), (2.21) в [7, гл. 3, § 2], (4.11) в [1, § 4], (8.22), (8.23) в [6, § 8]).

З а м е ч а н и е 4. Если $r = 2$, $p, a, b \in \Omega_+$, $a \neq b$, $p \notin M(a, b)$, то

$$\rho(p; a, b) = -\ln \left(p_1 \left(\frac{a_1}{b_1} \right)^\sigma + p_2 \left(\frac{a_2}{b_2} \right)^\sigma \right), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(\ln \frac{p_2}{p_1} + \ln \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) (\delta_1 + \delta_2)^{-1}, \\ \delta_1 &= \ln \frac{a_1}{b_1}, \quad \delta_2 = \ln \frac{b_2}{a_2}. \end{aligned}$$

С помощью (13) можно показать (на примерах), что при любой перестановке $\mathbf{p}', \mathbf{a}', \mathbf{b}'$ векторов $\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$, несовпадающей с $\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$, существуют такие $\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$, что $\rho(\mathbf{p}; \mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0$, $\rho(\mathbf{p}'; \mathbf{a}', \mathbf{b}') = 0$. Существуют также такие $\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$, что $0 < \rho(\mathbf{p}; \mathbf{a}, \mathbf{b}) < \rho(\mathbf{p}, \mathbf{a}) < \rho(\mathbf{p}, \mathbf{b})$. Далее, при $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{a}) < \rho(\mathbf{p}, \mathbf{b})$ величина $\rho(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{a})$ может быть меньше $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{a})$, больше $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{b})$, находиться между ними, а величины $\rho(\mathbf{p}; \mathbf{a}, \mathbf{h})$, $\rho(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{h})$ ($\rho(\mathbf{p}; \mathbf{h}, \mathbf{a})$, $\rho(\mathbf{p}; \mathbf{h}, \mathbf{b})$) могут удовлетворять как неравенствам $0 < \rho(\mathbf{p}; \mathbf{a}, \mathbf{h}) < \rho(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{h})$ ($0 < \rho(\mathbf{p}; \mathbf{h}, \mathbf{a}) < \rho(\mathbf{p}; \mathbf{h}, \mathbf{b})$), так и неравенствам $\rho(\mathbf{p}; \mathbf{a}, \mathbf{h}) > \rho(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{h}) > 0$ ($\rho(\mathbf{p}; \mathbf{h}, \mathbf{a}) > \rho(\mathbf{p}; \mathbf{h}, \mathbf{b}) > 0$). Эти примеры дополняют содержание следствия 2.

4. Приложение к задаче различения нескольких простых гипотез

Задачу различения нескольких простых гипотез будем решать, используя теорию статистических игр с фиксированным объемом выборки (см., например, [3, гл. 3, 6, 7]).

Пусть на конечном пространстве $E = \{E_1, \dots, E_N\}$ элементарных событий определены положительные вероятностные меры $\mu_1, \dots, \mu_m$: $\mu_i(E_j) > 0$ для $j = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, m$, $\sum_{j=1}^N \mu_i(E_j) = 1$ для $i = 1, \dots, m$, $m \geq 2$. Гипотеза H_t , $t = 1, \dots, m$, состоит в том, что событие E_v появляется с вероятностью $\mu_t(E_v)$ при каждом $v = 1, \dots, N$. Рассмотрим решающее правило $D(\mathbf{k})$, где $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$, $k_v \in \{0, 1, \dots, m\}$ для $v = 1, \dots, N$, которое каждому элементарному событию E_v , $v = 1, \dots, N$, ставит в соответствие решение

$$d(E_v, \mathbf{k}) = d(E_v) \subseteq \{H_1, \dots, H_m\}, \quad |d(E_v)| = k_v.$$

По этому правилу при появлении события E_v статистик принимает множество $d(E_v)$ гипотез, т.е. делает заключение: верна одна из гипотез $H_t \in d(E_v)$, иными словами дает ответ об истинной гипотезе в k_v вариантах, если $1 \leq k_v \leq m$; при $k_v = 0$ не принимается ни одна из гипотез $H_1, \dots, H_m$. Если $t_1, \dots, t_s$ — множество всех различных чисел среди $k_1, \dots, k_N$, то задание правила $D(\mathbf{k})$ равносильно разбиению пространства E на $C_m^{t_1} + \dots + C_m^{t_s}$ попарно непересекающихся возможно пустых областей $E(J) = \{E_v: d(E_v) = \{H_j, j \in J\}\}$ принятия множеств $\{H_j, j \in J\}$ гипотез, $J \subseteq \{1, \dots, m\}$, $|J| \in \{t_1, \dots, t_s\}$. Заметим, что числа k_v и множества $d(E_v)$ принимаемых гипотез могут не задаваться заранее, а определяться при появлении события E_v с помощью некоторого алгоритма.

Вероятность не найти истинную гипотезу H_t в принятом множестве гипотез при решающем правиле $D(\mathbf{k})$ равна

$$\alpha_t = \alpha_t(D(\mathbf{k})) = \sum_{v=1}^N \mu_t(E_v) \chi(H_t \notin d(E_v)). \quad (14)$$

З а м е ч а н и е 5. Не более $k_0 = \min_{1 \leq i \leq N} k_i$ величин $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ равны 0. (В противном случае $H_t \in \cap_{v=1}^N d(E_v)$ при более чем k_0 значениях t , т.е. $k_v > k_0$ при всех $v = 1, \dots, N$.)

З а м е ч а н и е 6. Если два правила $D(\mathbf{k}), D(\mathbf{l})$ таковы, что $d(E_v, \mathbf{k}) \subseteq d(E_v, \mathbf{l})$ при каждом $v = 1, \dots, N$, то $\alpha_t(D(\mathbf{l})) \leq \alpha_t(D(\mathbf{k}))$ для $t = 1, \dots, m$.

Рассмотрим задачу построения решающего правила $D(\mathbf{k})$, которое минимизирует величину $\alpha = \sum_{t=1}^m \lambda_t \alpha_t$ при заданных $\lambda_t > 0, t = 1, \dots, m$, удовлетворяющих условию $\sum_{t=1}^m \lambda_t = 1$ (λ_t — априорная вероятность гипотезы H_t). Так как

$$\alpha = \alpha(D(\mathbf{k})) = \sum_{v=1}^N \sum_{t=1}^m \lambda_t \mu_t(E_v) \chi(H_t \notin d(E_v)),$$

то при фиксированном $\mathbf{k}$ решающее правило, минимизирующее величину α , можно построить следующим образом. При каждом $v \in \{1, \dots, N\}$ таком, что $k_v \in \{1, \dots, m\}$, рассмотрим одно (любое) из упорядочений m величин $L_t(E_v) = \lambda_t \mu_t(E_v), t = 1, \dots, m$, в порядке невозрастания:

$$L_{t_1}(E_v) \geq \dots \geq L_{t_m}(E_v). \quad (15)$$

Положим $d(E_v) = \{H_{t_1}, \dots, H_{k_v}\}$; при $k_v = 0$ положим $d(E_v) = \emptyset$. При этом минимизируется каждая из N сумм $\sum_{t=1}^m L_t(E_v) \chi(H_t \notin d(E_v))$, $v = 1, \dots, N$, и, следовательно, величина α . Построенное таким образом при заданных $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$ с помощью неравенств (15) решающее правило назовем байесовским правилом $D_B(\lambda, \mathbf{k})$. При $\mathbf{k} = (1, \dots, 1)$ правила $D(\mathbf{k}), D_B(\lambda, \mathbf{k})$ рассматривались, например, в [12, гл. 3, § 1].

Пусть $k \in \{1, \dots, m-1\}$. При каждом $v \in \{1, \dots, N\}$ найдем с помощью неравенств (15) минимальное $\mathcal{K} \in \{k, k+1, \dots, m\}$ такое, что $L_{t_{\mathcal{K}}}(E_v) > L_{t_{\mathcal{K}+1}}(E_v)$, полагая при этом $L_{t_{m+1}}(E_v) = 0$. Если при каждом $v \in \{1, \dots, N\}$ принимается решение

$$d(E_v) = \{H_{t_1}, \dots, H_{t_k}\} \quad (d(E_v) = \{H_{t_1}, \dots, H_{t_{\mathcal{K}}}\}),$$

то получающееся при этом байесовское правило назовем байесовским правилом $D_B(\lambda, k)$ (строгим байесовским правилом $D_{sB}(\lambda, k)$). Правило $D_B(\lambda, k)$ — одно из правил $D(\mathbf{k})$, где $\mathbf{k} = (k, \dots, k)$, правило $D_{sB}(\lambda, k)$ — одно из правил $D(\mathbf{k})$, где $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N), k_v \in \{k, \dots, m\}$ при $v = 1, \dots, N$.

Пусть $E_\lambda(J), E_{s\lambda}(J)$ — области $E(J)$ для правил $D_B(\lambda, k), D_{sB}(\lambda, k)$ соответственно, $A(t, k) = \{J: |J| = k, t \notin J\}$ для $k \in \{1, \dots, m-1\}$,

$t \in \{1, \dots, m\}$, $|A(t, k)| = C_{m-1}^k$. С учетом замечания 6 из (14) следует оценка:

$$\begin{aligned} \alpha_t(D_{sB}(\lambda, k)) &= \sum_{\mathcal{K}=k}^{m-1} \sum_{J \in A(t, \mathcal{K})} \mu_t(E_{s\lambda}(J)) \\ &\leq \alpha_t(D_B(\lambda, k)) = \sum_{J \in A(t, k)} \mu_t(E_{\lambda}(J)) \end{aligned} \quad (16)$$

для $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $t \in \{1, \dots, m\}$.

Построим теперь байесовские решающие правила для различения m гипотез $H(\mathbf{p}_j, n)$, $j = 1, \dots, m$. На пространстве $E = \Omega_n$ элементарных событий $\mathbf{x}$ определим меры $\mu_j(\mathbf{x}) = P_n(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)$, $j = 1, \dots, m$. Пусть $J \subseteq \{1, \dots, m\}$, $1 \leq |J| \leq m-1$. Положим

$$\begin{aligned} A_J &= \{\mathbf{p}_j: j \in J\}, & B_J &= \{\mathbf{p}_j: j \in \{1, \dots, m\} \setminus J\}, \\ M(J) &= M(A_J, B_J), & M_+(J) &= M_+(A_J, B_J). \end{aligned}$$

При $\lambda = \theta = (1/m, \dots, 1/m)$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$ положим

$$D_B(\theta, k) = D_B(k) = D_B(n; k), \quad D_{sB}(\theta, k) = D_{sB}(k) = D_{sB}(n; k).$$

Для правил $D_B(n; k)$, $D_{sB}(n; k)$ имеем:

$$\begin{aligned} E_{\theta}(J) &\subseteq M(J) \cap \Omega_n, & E_{s\theta}(J) &= M_+(J) \cap \Omega_n, & \text{если } |J| &= k, \\ E_{s\theta}(J) &\subseteq M_+(J) \cap \Omega_n, & & \text{если } |J| > k. \end{aligned}$$

Отсюда и из (16) при любом $t \in \{1, \dots, m\}$ следуют оценки

$$\alpha_t(D_{sB}(n; k)) \leq \sum_{\mathcal{K}=k}^{m-1} \sum_{J \in A(t, \mathcal{K})} P_n(M_+(J), \mathbf{p}_t), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sum_{J \in A(t, k)} P_n(M_+(J), \mathbf{p}_t) &\leq \alpha_t(D_{sB}(n; k)) \\ &\leq \alpha_t(D_B(n; k)) \leq \sum_{J \in A(t, k)} P_n(M(J), \mathbf{p}_t). \end{aligned} \quad (18)$$

Теорема 6. Пусть $t \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$,

$$\begin{aligned} B(t, k) &= \{J \in A(t, k): M(J) \neq \emptyset\}, \\ C_+(t, k) &= \{J \in A(t, k): M_+(A_J, \mathbf{p}_t) \neq \emptyset\}, \\ \rho_{t,k} &= \min_{J \in C_+(t, k)} \rho(\mathbf{p}_t; A_J, \mathbf{p}_t) > 0, & \text{если } C_+(t, k) \neq \emptyset, \\ \bar{\rho}_{t,k} &= \min_{J \in B(t, k)} \rho(\mathbf{p}_t; A_J, B_J), & \text{если } B(t, k) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Тогда для всех $n \geq 1$

- 1) если $B(t, k) = \emptyset$, то $\alpha_t(D_{sB}(n; k)) = \alpha_t(D_B(n; k)) = 0$;
 2) если $B(t, k) \neq \emptyset$, то

$$\alpha_t(D_{sB}(n; k)) \leq \alpha_t(D_B(n; k)) \leq \sum_{J \in B(t, k)} \exp(-n\rho(\mathbf{p}_t; A_J, B_J)) \\ \leq |B(t, k)| \exp(-n\bar{\rho}_{t, k});$$

- 3) если $C_+(t, k) = \emptyset$, то $\alpha_t(D_{sB}(n; k)) = 0$.
 4) Если $C_+(t, k) \neq \emptyset$, то

$$B(t, k) \neq \emptyset, \quad \alpha_t(D_B(n; k)) \geq \alpha_t(D_{sB}(n; k)) > 0$$

для всех достаточно больших n и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \alpha_t(D_{sB}(n; k)) = -\rho_{t, k} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \alpha_t(D_B(n; k)) \\ \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \alpha_t(D_B(n; k)) \leq -\bar{\rho}_{t, k}. \quad (19)$$

Доказательство. Утверждения 1), 2) следуют из (18) и теоремы 2.

Докажем утверждение 3). Пусть

$$\mathcal{K} \in \{k, \dots, m-1\}, \quad J = (j_1, \dots, j_{\mathcal{K}}) \in A(t, \mathcal{K}), \quad I = (j_1, \dots, j_k).$$

Тогда

$$\mathbf{P}_n(M_+(J), \mathbf{p}_t) \leq \mathbf{P}_n(M_+(A_I, \mathbf{p}_t), \mathbf{p}_t), \\ \sum_{J \in A(t, \mathcal{K})} \mathbf{P}_n(M_+(J), \mathbf{p}_t) \leq \sum_{I \in A(t, k)} \mathbf{P}_n(M_+(A_I, \mathbf{p}_t), \mathbf{p}_t),$$

а при $\mathcal{K} > k$ имеем оценки

$$\sum_{J \in A(t, \mathcal{K})} \mathbf{P}_n(M_+(J), \mathbf{p}_t) \leq \sum_{I \in A(t, k)} \sum_{j_k < j_{k+1} < \dots < j_{\mathcal{K}} \leq m} \mathbf{P}_n(M_+(A_I, \mathbf{p}_t), \mathbf{p}_t) \\ = \sum_{I \in A(t, k)} C_{m-j_k}^{\mathcal{K}-k} \mathbf{P}_n(M_+(A_I, \mathbf{p}_t), \mathbf{p}_t) \\ \leq C_{m-k}^{\mathcal{K}-k} \sum_{I \in A(t, k)} \mathbf{P}_n(M_+(A_I, \mathbf{p}_t), \mathbf{p}_t).$$

Отсюда и из (17) следует оценка

$$\alpha_t(D_{sB}(n; k)) \leq (2^{m-k} - 1) \sum_{J \in C_+(t, k)} \mathbf{P}_n(M_+(A_J, \mathbf{p}_t), \mathbf{p}_t) \quad (20)$$

и утверждение 3).

Докажем утверждение 4). Пусть $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r) \in M_+(A_K, \mathbf{p}_t) \cap \Omega_n$ при некотором $K = \{i_1, \dots, i_k\} \in C_+(t, k)$ и $\gamma_i = \sum_{j=1}^r u_j \ln p_{i,j}$ для $i =$

$1, \dots, m$. Предположим, что $u \in E_{s\theta}(J)$ при некотором $J = \{j_1, \dots, j_K\}$ таком, что $t \in J$. Если $\mathcal{K} = m$, то $J = \{1, \dots, m\}$, $K \subseteq J$. Если $\mathcal{K} < m$, то для $j \notin J$ величина $\gamma_j < \gamma_t$. Следовательно, всегда

$$K \subseteq J, \quad (21)$$

$$\min_{i \in K} \gamma_i > \gamma_t \geq \gamma = \min_{j \in J} \gamma_j. \quad (22)$$

Пусть $I = \{j \in J: \gamma_j = \gamma\}$. Из (22) следует, что

$$I \subseteq J, \quad I \cap K = \emptyset. \quad (23)$$

Из (21), (23) следует, что

$$|I| + k = |I| + |K| \leq \mathcal{K}. \quad (24)$$

Из способа построения правила $D_{sB}(n; k)$ следует неравенство $|I| \geq \mathcal{K} - k + 1$, что противоречит (24). Таким образом, $t \notin J$ и

$$M_+(A_{\mathcal{K}}, \mathbf{p}_t) \cap \Omega_n \subseteq \bigcup_{\mathcal{K}=k}^{m-1} \bigcup_{J \in A(t, \mathcal{K})} E_{s\theta}(J).$$

Отсюда и из (16) следует оценка

$$\max_{J \in C_+(t, k)} \mathbf{P}_n(M_+(A_J, \mathbf{p}_t), \mathbf{p}_t) \leq \alpha_t(D_{sB}(n; k)). \quad (25)$$

Из (25) и теоремы 1 следует, что $\alpha_t(D_{sB}(n; k)) > 0$ при всех достаточно больших n , а это с учетом утверждения 1) приводит к неравенству $B(t, k) \neq \emptyset$. Из (20), (25), оценок утверждения 2) с помощью теоремы 1 и утверждения г) следует (19).

Следствие 3. Если $C_+(t, k) \neq \emptyset$ и $F(t, k) = B(t, k) \setminus C_+(t, k) = \emptyset$, то $\bar{\rho}_{t, k} = \rho_{t, k}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \alpha_t(D_{sB}(n; k)) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \alpha_t(D_B(n; k)) = -\rho_{t, k}.$$

Доказательство. Имеем

$$\bar{\rho}_{t, k} = \rho' = \min_{J \in B(t, k) \cap C_+(t, k)} \rho(\mathbf{p}_t; A_J, B_J), \quad \text{если } F(t, k) = \emptyset,$$

$$\bar{\rho}_{t, k} = \min_{J \in F(t, k)} \rho(\mathbf{p}_t; A_J, B_J), \quad \text{если } B(t, k) \cap C_+(t, k) = \emptyset,$$

$$\bar{\rho}_{t, k} = \min \left(\rho', \min_{J \in F(t, k)} \rho(\mathbf{p}_t; A_J, B_J) \right), \quad \text{если } F(t, k) \neq \emptyset \text{ и}$$

$$B(t, k) \cap C_+(t, k) \neq \emptyset.$$

Так как

$$\rho' \geq \min_{J \in C_+(t, k)} \rho(\mathbf{p}_t; A_J, B_J) \geq \min_{J \in C_+(t, k)} \rho(\mathbf{p}_t; A_J, \mathbf{p}_t) = \rho_{t, k} \geq \bar{\rho}_{t, k}$$

(см. (19)), то

$$\bar{\rho}_{t,k} = \min \left(\rho_{t,k}, \min_{J \in F(t,k)} \rho(\mathbf{p}_t; A_J, B_J) \right), \quad \text{если } F(t, k) \neq \emptyset,$$

$$\bar{\rho}_{t,k} = \rho_{t,k}, \quad \text{если } F(t, k) = \emptyset.$$

З а м е ч а н и е 7. В дополнение к множествам, введенным в теореме 6, положим $C(t, k) = \{J \in A(t, k): M(A_J, \mathbf{p}_t) \neq \emptyset\}$, $B_+(t, k) = \{J \in A(t, k): M_+(J) \neq \emptyset\}$. Так как $B_+(t, k) \subseteq C_+(t, k)$, $B(t, k) \subseteq C(t, k)$, то $F(t, k) = \emptyset$, если либо $B_+(t, k) = B(t, k)$, либо $C_+(t, k) = C(t, k)$.

Так как $\mathbf{p}_j \in M_+(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_t)$ при $j \neq t$, то

$$C_+(t, 1) = C(t, 1) = A(t, 1). \quad (26)$$

Условие $C_+(t, k) = C(t, k)$ при $k > 1$ выполняется, если верно следующее утверждение, которое не удалось доказать или опровергнуть. Если $k \geq 2$, $\mathbf{p}_i = (p_{i,1}, \dots, p_{i,r})$, $i = 1, \dots, k$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)$ — различные элементы из Ω_+ и $M(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \mathbf{p}) \neq \emptyset$, то $M_+(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \mathbf{p}) \neq \emptyset$.

Укажем простое достаточное условие неравенства

$$M_+(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \mathbf{p}) \neq \emptyset: \min_{1 \leq i \leq k} \prod_{j \in J} \left(\frac{p_{i,j}}{p_j} \right) > 1$$

при некотором $J \subseteq \{1, \dots, r\}$ (при этом условии точка $(v_1, \dots, v_r)$, в которой $v_j = 1/|J|$ для $j \in J$, $v_j = 0$ для $j \notin J$, принадлежит множеству $M_+(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \mathbf{p})$).

Теория линейных неравенств [10] дает возможность формулировать необходимые и достаточные условия для неравенств $M(A, B) \neq \emptyset$, $M_+(A, B) \neq \emptyset$. В частности, применяя к системе

$$\sum_{t=1}^r x_t \ln \frac{p_t}{p_{i,t}} \leq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

теорему 1.9 и дополнение 1 (дополнение 2) к ней из [10, гл. 1, § 6], легко сформулировать необходимые и достаточные условия для неравенства $M(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \mathbf{p}) \neq \emptyset$ (для неравенства $M(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \mathbf{p}) \cap \Omega_+ \neq \emptyset$ и, следовательно, для неравенства $M_+(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \mathbf{p}) \neq \emptyset$). (При этом используется равносильность неравенств $M_+(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \mathbf{p}) \neq \emptyset$, $M(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \mathbf{p}) \cap \Omega_+ \neq \emptyset$, следующая из утверждения б) и из того, что точка $(1 + \varepsilon)\mathbf{v} - \varepsilon\mathbf{p} \in M_+(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \mathbf{p}) \cap \Omega_+$ при малом положительном ε и $\mathbf{v} \in M(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \mathbf{p}) \cap \Omega_+$). Необходимые и достаточные условия для неравенства $M_+(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \mathbf{p}) \neq \emptyset$ можно также сформулировать, применяя теорему 1.12 из [10, гл. 1, § 7] к системе

$$\sum_{t=1}^r x_t \ln \frac{p_t}{p_{i,t}} \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad -x_t \leq 0, \quad t = 1, \dots, r.$$

Покажем, что при $k > 1$ множество $C(t, k)$ может быть пустым.

Пример 2. Пусть $m = 3$, $\mathbf{p}_1 = (p_1, \dots, p_r) \neq (q_1, \dots, q_r) = \mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3 = (a_1, \dots, a_r)$, где $a_i = c^{-1} \sqrt{p_i q_i}$ для $i = 1, \dots, r$, $c = \sum_{i=1}^r \sqrt{p_i q_i} < 1$ (неравенство Коши здесь строгое, так как не совпадающие $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ из Ω_+ неколлинеарны). Если $C(3, 2) \neq \emptyset$, то $M(\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}, \mathbf{p}_3) \neq \emptyset$. Тогда при некотором $(u_1, \dots, u_r) \in \Omega$

$$\sum_{i=1}^r u_i \ln \sqrt{\frac{p_i}{q_i}} + \ln c \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r u_i \ln \sqrt{\frac{q_i}{p_i}} + \ln c \geq 0,$$

а это приводит к противоречию: $c \geq 1$. Следовательно, $C(3, 2) = \emptyset$.

Пусть $T_k = \{t \in \{1, \dots, m\}: C_+(t, k) \neq \emptyset\}$, $S_k = \{t \in \{1, \dots, m\}: B(t, k) \neq \emptyset\}$ для $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Из утверждений 3), 4) теоремы 6 и замечания 5 следует, что $T_k \subseteq S_k$, $|T_k| \geq m - k$.

Теорема 7. Пусть

$$k \in \{1, \dots, m-1\}, \quad \mathbf{k} = (k, \dots, k), \quad \rho_k = \min_{t \in T_k} \rho_{t, k}, \quad \bar{\rho}_k = \min_{t \in S_k} \bar{\rho}_{t, k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \max_{1 \leq t \leq m} \alpha_t(D_{sB}(n; \mathbf{k})) &= -\rho_k \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \max_{1 \leq t \leq m} \alpha_t(D_B(n; \mathbf{k})) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \max_{1 \leq t \leq m} \alpha_t(D_B(n; \mathbf{k})) \leq -\bar{\rho}_k \end{aligned} \quad (27)$$

и для любой последовательности правил $D(\mathbf{k}) = D(n; \mathbf{k})$, $n = 1, 2, \dots$, верно неравенство $\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \max_{1 \leq t \leq m} \alpha_t(D(n; \mathbf{k})) \geq -\rho_k$.

Доказательство. Неравенства (27) следуют из утверждений 1), 2), 3), 4) теоремы 6 и утверждения г) п. 1. Предположим, что при некотором $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \max_{1 \leq t \leq m} \alpha_t(D(n; \mathbf{k})) \leq -\rho_k - \varepsilon.$$

Тогда для некоторой возрастающей до ∞ последовательности натуральных чисел $n_1, n_2, \dots$ имеем при достаточно большом i :

$$\begin{aligned} m^{-1} \sum_{t=1}^m \alpha_t(D(n_i; \mathbf{k})) &\leq \max_{1 \leq t \leq m} \alpha_t(D(n_i; \mathbf{k})) \\ &\leq \exp(-n_i(\rho_k + 2^{-1}\varepsilon)) < m^{-1} \max_{1 \leq t \leq m} \alpha_t(D_{sB}(n_i; \mathbf{k})) \\ &\leq m^{-1} \max_{1 \leq t \leq m} \alpha_t(D_B(n_i; \mathbf{k})) \leq m^{-1} \sum_{t=1}^m \alpha_t(D_B(n_i; \mathbf{k})). \end{aligned}$$

Итак,

$$m^{-1} \sum_{t=1}^m \alpha_t(D(n_i; \mathbf{k})) < m^{-1} \sum_{t=1}^m \alpha_t(D_B(n_i; \mathbf{k})),$$

что противоречит свойству байесовского правила $D_B(n; k)$ минимизировать величину $m^{-1} \sum_{t=1}^m \alpha_t(D(n_i; \mathbf{k}))$.

З а м е ч а н и е 8. Если $\bar{\rho}_k = \rho_k$, $\mathbf{k} = (k, \dots, k)$, то последовательность правил $D_B(n; k)$, $n = 1, 2, \dots$, оптимальна в том смысле, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \max_{1 \leq t \leq m} \alpha_t(D(n; k)) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \max_{1 \leq t \leq m} \alpha_t(D_B(n; k)) = -\rho_k.$$

Равенство $\bar{\rho}_k = \rho_k$ верно, если $B(t, k) \subseteq C_+(t, k)$ при всех $t \in T_k$, так как в этом случае $T_k = S_k$ и $\bar{\rho}_{t,k} = \rho_{t,k}$ для всех $t \in T_k$ (см. следствие 3 и замечание 7). Следствием (26) и замечания 7 является утверждение из [5]: последовательность правил $D_B(n; 1)$, $n = 1, 2, \dots$, оптимальна в указанном смысле, при этом $\bar{\rho}_1 = \rho_1 = \min_{1 \leq i < j \leq m} \rho(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$.

Из (18) можно получить менее точные (но легче вычисляемые) верхние оценки для $\alpha_t(D_B(n; k))$, чем оценка в утверждении 2) теоремы 6. Для этого достаточно заменить в (18) $M(J) = M(A_J, B_J)$ любым $M(A'_J, B'_J)$, где $A'_J \subseteq J$, $B'_J \subseteq B_J$ и затем применить теорему 2. В частности, при $B'_J = \{\mathbf{p}_t\}$ получим оценку

$$\alpha_t(D_B(n; k)) \leq \sum_{J \in B(t, k)} \exp(-n \rho(\mathbf{p}_t; A_J, \mathbf{p}_t)).$$

Рассмотрим достаточно просто вычисляемую оценку такого вида:

$$\alpha_t(D_B(n; k)) \leq \sum_{I \in A(t, k)} \exp(-n \rho(\mathbf{p}_t; \mathbf{p}_{\lambda(I)}, \mathbf{p}_{\mu(I)})), \quad (28)$$

где $\lambda(I) \in I$, $\mu(I) \in \{1, \dots, m\} \setminus I$ (при каждом I пару индексов $\lambda(I)$, $\mu(I)$ можно выбрать $k(m-k)$ способами). Задача об оптимальном выборе обобщенных расстояний Чернова в оценке (28) решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 8. Для $t \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$ лучшей из оценок (28) является оценка

$$\alpha_t(D_B(n; k)) \leq \sum_{i=k}^{m-1} C_{i-1}^{k-1} \exp(-n \rho(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_{s_i})),$$

где числа s_i , $i = k, \dots, m-1$, определяются упорядочиванием $m-1$ расстояний Чернова между $\mathbf{p}_t$ и $\mathbf{p}_j$, $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{t\}$ в неубывающем порядке:

$$\rho(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_{s_1}) \leq \dots \leq \rho(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_{s_{m-1}}).$$

Доказательство. Заметим, что

$$A(t, k) = \bigcup_{j=1}^{m-k} B_j,$$

где $B_j = \{(i_1, \dots, i_k): 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m, \text{ одно из чисел } i_1, \dots, i_k \text{ равно } s_{m-j}, \text{ остальные принадлежат множеству } \{s_1, \dots, s_{m-j-1}\}\}$, $|B_j| = C_{m-1-j}^{k-1}$ для $j = 1, \dots, m-k$; множества $B_1, \dots, B_{m-k}$ попарно не пересекаются. Разобьем сумму в (28) на $m-k$ сумм по множествам $B_1, \dots, B_{m-k}$. С учетом следствия 2 для любого $I = (i_1, \dots, i_k) \in B_j$ имеем

$$\rho(\mathbf{p}_t; \mathbf{p}_{\lambda(I)}, \mathbf{p}_{\mu(I)}) \leq \rho(\mathbf{p}_t; \mathbf{p}_{\lambda(I)}) \leq \rho(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_{s_{m-j}}).$$

Полагая же $\lambda(I) = s_{m-j}$, $\mu(I) = t$, получим

$$\rho(\mathbf{p}_t; \mathbf{p}_{\lambda(I)}, \mathbf{p}_{\mu(I)}) = \rho(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_{s_{m-j}}).$$

Следовательно, оптимальная оценка (28) такова:

$$\begin{aligned} \alpha_t((D_B(n; k))) &\leq \sum_{j=1}^{m-k} \sum_{I \in B_j} \exp(-n\rho(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_{s_{m-j}})) \\ &= \sum_{j=1}^{m-k} C_{m-1-j}^{k-1} \exp(-n\rho(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_{s_{m-j}})) = \sum_{i=k}^{m-1} C_{i-1}^{k-1} \exp(-n\rho(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_{s_i})). \end{aligned}$$

Пример 3. (Задача об r -гранной игральной кости). В [3, гл. 6, § 4] для различения гипотез $H(\mathbf{p}_i, n)$, $i = 1, \dots, r$, где $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r\} = M_r(\varepsilon)$, $M_r(\varepsilon)$ определено в примере 1, построено правило $D_B(n; 1)$. Пусть надо различить гипотезы $H(\mathbf{p}_i, n)$, $i \in J$, $J \subseteq \{1, \dots, r\}$, $|J| = m \geq 2$, по частотам $x_1, \dots, x_r$ исходов. Упорядочим частоты x_j , $j \in J$: $x_{t_1} \geq \dots \geq x_{t_m}$ ($t_1, \dots, t_m$ — перестановка элементов множества J). Тогда при $k \in \{1, \dots, m-1\}$ по правилу $D_B(n; k)$ принимается множество $\{H_{t_1}, \dots, H_{t_k}\}$, а по правилу $D_{sB}(n; k)$ — множество $\{H_{t_1}, \dots, H_{t_{\mathcal{K}}}\}$, где $\mathcal{K} = \min\{i: i \in \{k, \dots, m\}, x_{t_i} > x_{t_{i+1}}\}$ и $x_{t_{m+1}} < 0$. С помощью теоремы 6 и с учетом примера 1 получаются оценки:

$$\begin{aligned} \alpha_t(D_B(n; k)) &\leq C_{m-1}^k \exp(-n\rho_k^*), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \alpha_t(D_{sB}(n; k)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \alpha_t(D_B(n; k)) = -\rho_k^*. \end{aligned}$$

Из теоремы 8 следует оценка

$$\alpha_t(D_B(n; k)) \leq C_{m-1}^k \exp(-n\rho_1^*).$$

Автор благодарен А. М. Зубкову за замечания и указания, которые помогли улучшить стиль текста и доказать лемму 3 и теорему 2 для более широких классов множеств ω (автор сначала доказал лемму 3 для

$\omega = M_+(A, B)$, а теорему 2 для ω из утверждения в) при дополнительном условии $\max_{1 \leq i \leq t} \sup_{u \in \Omega_+} \|\text{grad} g_i(u)\| < \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозова Е. А., Ченцов Н. Н. Естественная геометрия семейств вероятностных законов. — Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, ВИНТИ, 1991 т. 83, с. 133–265.
2. Chernoff H. A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, № 4, p. 493–507.
3. Блекуэлл Д., Гиршик М. А. Теория игр и статистических решений. М.: ИЛ, 1958, 374 с.
4. Рао С. Р. Линейные статистические методы. М.: Наука, 1968, 547 с.
5. Сализов Н. П. Асимптотические свойства вероятностей ошибок критериев для различения нескольких мультиномиальных схем испытаний. — Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 1, с. 54–57.
6. Ченцов Н. Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М.: Наука, 1972, 520 с.
7. Кульбак С. Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967, 408 с.
8. Hoeffding W. Asymptotically optimal tests for multinomial distributions. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 2, p. 369–401.
9. Фано Р. Передача информации. Статистическая теория связи. М.: Мир, 1965, 438 с.
10. Черников С. Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968, 488 с.
11. Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1980, 256 с.
12. Боровков А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984, 472 с.

Поступила в редакцию
14.I.1997