Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Селиванов, Об одном обобщении классической задачи о дробинках, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 2, 315–330

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:30:28

© 1998 г.

СЕЛИВАНОВ Б. И.*

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О ДРОБИНКАХ¹⁾

В работе несколько известных предельных теорем для классической задачи о дробинках, включая локальную предельную теорему, перенесены на одно семейство условных распределений, связанных со случайными равновероятными размещениями частиц в ячейках двумерных таблиц.

Ключевые слова и фразы: случайные размещения, классическая задача о дробинках, условное распределение, двумерная таблица, закон Пуассона, нормальное распределение, локальная предельная теорема, метод перевала.

1. Введение. Классическая задача о дробинках [1, гл. 1] обобщалась многими авторами в различных направлениях. В настоящей работе, опирающейся на некоторые результаты предыдущей статьи автора [2], намечается еще одно направление обобщений этой задачи.

Пусть дана двумерная таблица T , имеющая N строк и M столбцов, $N, M \geq 1$. В ее NM клетках (ячейках) случайно независимо друг от друга размещаются частицы (дробинки) так, что вероятность попадания каждой частицы в любую из клеток таблицы T равна $(NM)^{-1}$. Назовем строку таблицы T пустой, если все M ее клеток пусты, и непустой в противном случае. Введем для каждого $n = 1, 2, \dots$ следующие события, связанные с размещением n частиц в таблице T :

$\mathcal{A}_n$ — «в каждой строке таблицы T заполнено не более одной клетки»,

$\mathcal{B}_{nk}$ — «в T имеется ровно k пустых строк»,

$\mathcal{C}_{nk}$ — «в T имеется ровно k непустых строк»,

$k = 0, 1, \dots, N$. Положим $\pi_n = \pi_n(N, M) = \mathbf{P}\{\mathcal{A}_n\}$, $\tau_{nk} = \tau_{nk}(N, M) = \mathbf{P}\{\mathcal{B}_{nk} | \mathcal{A}_n\}$ и $\pi_{nk} = \pi_{nk}(N, M) = \mathbf{P}\{\mathcal{C}_{nk} | \mathcal{A}_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, N$, и рассмотрим условные вероятности

$$\hat{\tau}_{nk} = \hat{\tau}_{nk}(N, M) = \mathbf{P}\{\mathcal{B}_{nk} | \mathcal{A}_n\} = \frac{\tau_{nk}}{\pi_n}. \quad (1.1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00531).

¹⁾Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

Для каждого $n = 1, 2, \dots$ вероятности (1.1) определяют распределение некоторой случайной величины (сл.в.) $\hat{\mu}_0 = \hat{\mu}_0(n, N, M)$, для которой $P\{\hat{\mu}_0 = k\} = \hat{\tau}_{nk}$, $k = 0, 1, \dots, N$. Если $M = 1$, то $\pi_n = 1$ для всех $n = 1, 2, \dots$ и сл.в. $\hat{\mu}_0$ есть число $\mu_0 = \mu_0(n, M)$ пустых ячеек в классической задаче о дробинках. В общем случае при $M \geq 2$ сл.в. $\hat{\mu}_0$ можно интерпретировать как число пустых строк в таблице T после размещения в ней n частиц при условии, что все непустые клетки находятся в различных строках.

В настоящей работе, предполагая, что $n, N \rightarrow \infty$, а $M \geq 2$ фиксированно, на семейство сл.в. $\hat{\mu}_0(n, N, M)$, $M = 2, 3, \dots$, перенесены несколько известных предельных теорем для сл.в. $\mu_0(n, M)$. В п. 2 в левой области изменения параметров n и N

$$\frac{n^2}{2N} \rightarrow \lambda, \quad n, N \rightarrow \infty, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad \lambda — \text{константа}, \quad (1.2)$$

доказана сходимость по распределению сл.в. $\hat{\mu}_0(n, N, M) - N + n$ к пуассоновской сл.в. с параметром λ/M . Соответствующее утверждение для сл.в. $\mu_0(n, N)$, различные доказательства которого можно найти в [1] и [3], впервые было указано в работе [4].

В п. 3 доказываются некоторые вспомогательные предложения. В частности, в центральной области изменения параметров n и N

$$\frac{n}{N} = \alpha, \quad n, N \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 < \infty, \quad \alpha_0, \alpha_1 — \text{константы}, \quad (1.3)$$

получены асимптотические оценки для вероятностей $\pi_n(N, M)$ и величин $E\hat{\mu}_0(n, N, M)$, $D\hat{\mu}_0(n, N, M)$.

В п. 4 доказан основной результат статьи — локальная предельная теорема для сл.в. $\hat{\mu}_0(n, N, M)$. При этом предполагается, что $M \geq 2$ — фиксированное число и выполняется условие (1.3). Доказательство теоремы проводится с использованием метода перевала по схеме, аналогичной разработанной Севастьяновым Б. А. и Чистяковым В. П. в [5]. Дополнительные технические трудности связаны с присутствием во всех рассуждениях корня x_0 уравнения (3.3) (см. ниже). В заключение п. 4 для сл.в. $\hat{\mu}_0(n, N, M)$ формулируется центральная предельная теорема; справедливость ее установлена при тех же условиях, при которых выполняется локальная предельная теорема.

Результаты работы могут быть использованы, например, при рассмотрении системы случайных уравнений вида

$$x_{\varepsilon_i} = \eta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

с N неизвестными $x_1, \dots, x_N$, принимающими значения $1, \dots, M$. Предположим, что индексы неизвестных ε_i и правые части η_i уравнений (1.4) — независимые сл.в. и ε_i и η_i для каждого $i = 1, \dots, n$ с равными вероятностями принимают значения $1, \dots, N$ и $1, \dots, M$ соответственно.

Тогда π_n есть вероятность совместности системы (1.4), а распределение числа неизвестных, неопределенных из системы (1.4), при условии, что система совместна, задается вероятностями (1.1) и, следовательно, совпадает с распределением сл.в. $\hat{\mu}_0$.

Автор благодарен А. М. Зубкову, замечания которого позволили улучшить изложение материалов настоящей работы.

2. Согласно [2] для производящей функции (п.ф.) вероятностей $\pi_{nk}(N, M)$

$$P_{NM}(x, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^N \pi_{nk} x^k \frac{z^n}{n!} \quad (2.1)$$

выполняется соотношение

$$P_{NM}(x, NMz) = (1 + Mx(e^z - 1))^N. \quad (2.2)$$

Разлагая в ряд по степеням x и z правую часть (2.2), найдем

$$\pi_{nk} = \frac{1}{N^n M^{n-k}} \binom{N}{k} \sum_{m=1}^k (-1)^{k-m} \binom{k}{m} m^n, \quad (2.3)$$

где $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, N$, (ясно, что $\pi_{n0} = 0$). Формула (2.3) позволяет находить также вероятности τ_{nk} , так как

$$\tau_{nk} = \pi_{n, N-k}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

По смыслу вероятностей π_n и π_{nk}

$$\pi_n = \sum_{k=0}^N \pi_{nk}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда и из (2.3) следует, что $\pi_n = 1$, если $M = 1$, и

$$\pi_n = \frac{(M-1)^N}{N^n M^n} \sum_{m=1}^N (-1)^{N-m} \binom{N}{m} \left(\frac{M}{M-1} \right)^m m^n,$$

где $n = 1, 2, \dots$, $M = 2, 3, \dots$.

Введем п.ф. вероятностей τ_{nk} :

$$T_{N,M}(x, z) = x^N + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^N \tau_{nk} x^k \frac{z^n}{n!}. \quad (2.5)$$

Из равенства (2.4) и представления (2.2) п.ф. (2.1) следует, что

$$T_{N,M}(x, z) = (x + M(e^{z/(NM)} - 1))^N. \quad (2.6)$$

С помощью формул (1.1), (2.5) и (2.6) найдем факториальные моменты $E \hat{\mu}_0^{[l]}$ сл.в. $\hat{\mu}_0(n, N, M)$ (воспользуемся обозначением $a^{[l]} = a(a-1)\dots(a-l+1)$):

$$\begin{aligned} E \hat{\mu}_0^{[l]}(n, N, M) &= \frac{n!}{\pi_n} \text{Coeff}_{z^n} \frac{\partial^l}{\partial x^l} T_{N,M}(x, z) \big|_{x=1} \\ &= \frac{n!}{\pi_n} N^{[l]} \text{Coeff}_{z^n} (1 + M(e^{z/(NM)} - 1))^{N-l}, \quad n, l = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

При $M = 1$ равенство (2.7) принимает вид

$$E \hat{\mu}_0^{[l]}(n, N) = N^{[l]} \left(1 - \frac{l}{N}\right)^n \quad (2.8)$$

(см., например, [1, с. 17]). Если же $M \geq 2$, то

$$\begin{aligned} E \hat{\mu}_0^{[l]}(n, N, M) &= \frac{N^{[l]}}{\pi_n N^n M^n} (M-1)^{N-l} \\ &\times \sum_{m=1}^{N-l} (-1)^{N-l-m} \binom{N-l}{m} \left(\frac{M}{M-1}\right)^m m^n, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $n, l = 1, 2, \dots$. В частности, при $l = 1$ из (2.8) и (2.9) получаем выражение для математического ожидания $\hat{\mu}_0(n, N, M)$: при $n = 1, 2, \dots$

$$E \hat{\mu}_0(n, N, M) = \begin{cases} N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n, & \text{если } M = 1, \\ \frac{(M-1)^{N-1}}{\pi_n(N, M) N^{n-1} M^n} \\ \times \sum_{m=1}^{N-1} (-1)^{N-m-1} \binom{N-1}{m} \left(\frac{M}{M-1}\right)^m m^n, & \text{если } M = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.10)$$

Теорема 2.1. Если при $n \rightarrow \infty$ число строк N таблицы T изменяется так, что выполняется условие (1.2), а число ее столбцов $M \geq 2$ остается фиксированным, то

$$\hat{\mu}_0(n, N, M) - N + n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \prod \left(\frac{\lambda}{M}\right), \quad (2.11)$$

где $\prod(a)$ — сл.в., распределенная по закону Пуассона с параметром a , и символ $\Rightarrow$ означает сходимость сл.в. по распределению.

Доказательство. Учитывая равенства (2.3), (2.4) и используя известную формулу

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = k\} \\ &= \binom{N}{k} \sum_{m=0}^{N-k} (-1)^m \binom{N-k}{m} \left(1 - \frac{k+m}{N}\right)^n, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

описывающую распределение числа пустых ячеек в классической задаче о дробинках, находим, что

$$\tau_{nk} = \frac{M^{N-k}}{M^n} \mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = k\}, \quad (2.12)$$

где $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Равенство (2.12) можно написать также, исходя непосредственно из определения вероятностей τ_{nk} . Заметим, что формула (2.12) корректна в том смысле, что выражение в ее правой части не превосходит единицы, так как $\mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = k\} > 0$ лишь для $k \geq N - \min(n, N)$.

Предположив, что условия теоремы выполнены и зафиксировав целое число $k \geq 0$, рассмотрим поведение при $N \rightarrow \infty$ вероятности $\mathbf{P}\{\hat{\mu}_0(n, N, M) - N + n = k\}$, которую согласно (1.1) и (2.12) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{n, N-n+k} &= \frac{1}{\pi_n} \mathbf{P}\{\hat{\mu}_0(n, N, M) = N - n + k\} \\ &= \frac{1}{\pi_n} \frac{\mathbf{P}\{\mu_0(n, N) - N + n = k\}}{M^k}, \quad (2.13) \\ n &= 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

В силу теоремы 3.1 из работы [2] находим, что имеет место сходимость

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \pi_n = \exp \left\{ - \left(1 - \frac{1}{M} \right) \lambda \right\}. \quad (2.14)$$

Учитывая, что при выполнении условий теоремы

$$\mu_0(n, N) - N + n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \Pi(\lambda),$$

из (2.13) и (2.14) получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\hat{\mu}_0(n, N, M) - N + n = k\} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{M} \right)^k e^{-\lambda/M}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и, следовательно, (2.11) доказано.

3. Для доказательства основных результатов работы, которые будут представлены в п. 4, сформулируем и докажем несколько лемм.

Лемма 3.1. Пусть $M \geq 2$ фиксированно, а величины n и N изменяются так, что выполнено условие (1.3). Тогда равномерно по $\alpha = n/N$, $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 < \infty$, для вероятностей π_n справедливо асимптотическое представление

$$\pi_n(N, M) = \left(\frac{Mx_0}{\alpha} \right)^{(1-\alpha)N} \frac{\exp\{(x_0 - \alpha)N\}}{\sqrt{1 + x_0 - \alpha}} \times \left(1 + \frac{1}{24} \left(\frac{2}{\alpha} + a \right) \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right), \quad (3.1)$$

где

$$a = \frac{3k_4}{(1 + x_0 - \alpha)^2} - \frac{5k_3^2}{(1 + x_0 - \alpha)^3},$$

$$k_3 = \alpha(1 - \alpha)(1 - 2\alpha) + 3\alpha(1 - \alpha)x_0 + \alpha x_0^2, \quad (3.2)$$

$$k_4 = \alpha - 7\alpha^2 + 12\alpha^3 - 6\alpha^4 + \alpha(7 - 18\alpha + 12\alpha^2)x_0 + \alpha(6 - 7\alpha)x_0^2 + \alpha x_0^3$$

и $x_0 > 0$ — единственный корень уравнения

$$x = \alpha(1 - \beta e^{-x}), \quad \beta = 1 - \frac{1}{M}. \quad (3.3)$$

В формуле (3.1)

$$1 + x_0 - \alpha > 0 \quad (3.4)$$

и

$$b(\alpha) = \left(\frac{Mx_0}{\alpha} \right)^{1-\alpha} e^{x_0-\alpha} < 1. \quad (3.5)$$

Доказательство. Согласно (2.2)

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \frac{z^n}{n!} = (1 + M(e^{z/(NM)} - 1))^N, \quad (3.6)$$

из (3.6) находим, что

$$\pi_n = \frac{n!}{N^n M^n} I(n, N), \quad (3.7)$$

где

$$I(n, N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} [A(z)]^N \frac{dz}{z^{n+1}}, \quad (3.8)$$

$A(z) = 1 + M(e^z - 1)$ и $\mathcal{L}$ — простой замкнутый контур, охватывающий точку $z = 0$ комплексной плоскости. Асимптотика интегралов вида (3.8)

в предположении, что n и N удовлетворяют условию (1.3), а функция $A(z)$ разлагается в окрестности точки $z = 0$ в степенной ряд с неотрицательными коэффициентами и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, описана в работах [5] (см. также [1]), [6], [7]. В частности, из результатов работы [6] после некоторых вычислений можно вывести следующее предложение.

Предложение. Пусть

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (3.9)$$

— степенной ряд с неотрицательными коэффициентами и радиусом сходимости $R > 0$, для которого выполняются следующие условия:

- 1) $a_0 > 0$;
- 2) если $\{n_k\}$ — номера всех ненулевых коэффициентов a_n ряда (3.9), $n_k \neq 0$, то числа n_k не имеют общего делителя, отличного от единицы;
- 3) $\lim_{x \rightarrow R} A(x) = +\infty$.

Тогда, если n и N удовлетворяют условию (1.3), равномерно по α , $\alpha = n/N \in [\alpha_0, \alpha_1]$, для интеграла (3.8) имеет место асимптотическое разложение

$$I(n, N) = \frac{[A(x_0)]^N}{x_0^n \sqrt{2\pi N k_2(x_0)}} \left(1 + \frac{a(x_0)}{24N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right), \quad (3.10)$$

где x_0 — единственный положительный корень уравнения

$$x \frac{A'(x)}{A(x)} = \alpha$$

и

$$\begin{aligned} a(x_0) &= 3 \frac{k_4(x_0)}{[k_2(x_0)]^2} - 5 \frac{k_3^2(x_0)}{[k_2(x_0)]^3}, \\ k_2(x_0) &= x_0^2 \frac{A''(x_0)}{A(x_0)} + \alpha(1 - \alpha), \\ k_3(x_0) &= 3(1 - \alpha) x_0^2 \frac{A''(x_0)}{A(x_0)} + x_0^3 \frac{A'''(x_0)}{A(x_0)} + \alpha(1 - \alpha)(1 - 2\alpha), \\ k_4(x_0) &= \alpha - 7\alpha^2 + 12\alpha^3 - 6\alpha^4 + (7 - 18\alpha + 12\alpha^2) x_0^2 \frac{A''(x_0)}{A(x_0)} \\ &\quad + \left[2(3 - 2\alpha) \frac{A'''(x_0)}{A(x_0)} + \frac{A^{IV}(x_0)}{A(x_0)} \right] x_0^3 - 3x_0^4 \frac{A''^2(x_0)}{A^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Используя это предложение с учетом вида нашей функции $A(z)$, указанного выше, с помощью (3.7) убедимся в справедливости разложения (3.1).

Осталось проверить справедливость неравенств (3.4) и (3.5), обеспечивающих корректность формулы (3.1). Перепишем уравнение (3.3) в виде

$$\alpha = g(x), \quad g(x) = \frac{x}{1 - \beta e^{-x}}. \quad (3.11)$$

Имеем:

$$1 + x_0 - \alpha = \frac{1 - \beta(1 + x_0)e^{-x_0}}{1 - \beta e^{-x_0}}. \quad (3.12)$$

Так как $x_0 > 0$, $\beta < 1$ и $(1 + x)e^{-x} < 1$ при $x > 0$, то правая часть (3.12) положительна и справедливо неравенство (3.4).

Очевидно, $g(0) = 0$ и для $x \geq 0$

$$g'(x) = \frac{1 - \beta(1 + x)e^{-x}}{(1 - \beta e^{-x})^2}, \quad (3.13)$$

так что $g(x)$ монотонно возрастает в промежутке $[0, \infty)$. Следовательно, в этом промежутке $g(x)$ имеет однозначную обратную функцию $x = x(\alpha)$ — корень уравнения (3.11), которая монотонно возрастает при $\alpha \geq 0$ и $x(0) = 0$. Применяя формулу Бюрмана–Лагранжа, находим, что для корня $x(\alpha) > 0$ уравнения (3.11) при $\alpha \rightarrow 0$ имеет место разложение

$$x(\alpha) = (1 - \beta)\alpha + \beta(1 - \beta)\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta(1 - \beta)(3\beta - 1)\alpha^3 + O(\alpha^4).$$

С его помощью находим, что при $\alpha \rightarrow 0$ $b(\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\beta\alpha^2 + O(\alpha^3)$, так что $b(0) = 1$ и (3.5) выполняется при малых $\alpha > 0$. Далее, для $\alpha > 0$, используя (3.13), получаем, что

$$b'(\alpha) = -b(\alpha) \ln \frac{x(\alpha)}{\alpha(1 - \beta)}.$$

Поскольку $x(\alpha) > \alpha(1 - \beta)$, то $b'(\alpha) < 0$ при $\alpha > 0$ и, следовательно, (3.5) выполняется для всех $\alpha > 0$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. В условиях леммы 3.1 равномерно по α , $\alpha = n/N$, $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1]$, для математического ожидания и дисперсии сл.в. $\hat{\mu}_0(n, N, M)$ имеют место оценки

$$E\hat{\mu}_0(n, N, M) = Nm \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right), \quad (3.14)$$

$$D\hat{\mu}_0(n, N, M) = Nb^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right), \quad (3.15)$$

где

$$m = \frac{\alpha}{Mx_0} e^{-x_0} < 1, \quad (3.16)$$

$$b^2 = m [1 - (1 + d)m] > 0, \quad d = \frac{\alpha}{1 + x_0 - \alpha} \quad (3.17)$$

и $x_0 > 0$ — корень уравнения (3.3).

З а м е ч а н и е. В формулировке леммы 3.2 предполагается, что $M \geq 2$, но формулы (3.14) и (3.15) верны и при $M = 1$. В этом случае уравнение (3.3) имеет тривиальный вид $x = \alpha$, и оценки (3.14) и (3.15) сводятся к известным в классической задаче о дробинках оценкам $E\mu_0(n, N)$ и $D\mu_0(n, N)$ в центральной области [1, с. 13].

При доказательстве предельных теорем, о которых пойдет речь в п. 4, лемма 3.2 непосредственно использоваться не будет. Роль леммы состоит в том, что она раскрывает смысл центрирования и нормирования сл.в. $\hat{\mu}_0$, указанной в этих теоремах.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3.2. Согласно (2.7)

$$E\hat{\mu}_0(n, N, M) = \frac{N}{\pi_n} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} (1 + M(e^{z/(NM)} - 1))^{N-1} \frac{dz}{z^{n+1}}, \quad (3.18)$$

где $\mathcal{L}$ — замкнутый контур, охватывающий точку $z = 0$. Учитывая оценку π_n , полученную в лемме 3.1, и используя предложение, сформулированное при доказательстве этой леммы и касающееся асимптотической оценки интегралов вида (3.8), из (3.18) выведем (3.14). При $M = 1$ оценка (3.14) есть очевидное следствие первой из формул (2.10).

Более сложным является вывод оценки (3.15). Заметив, что

$$D\hat{\mu}_0(n, N, M) = E\hat{\mu}_0^{[2]}(n, N, M) + E\hat{\mu}_0(n, N, M) - (E\hat{\mu}_0(n, N, M))^2,$$

оценим момент $E\hat{\mu}_0^{[2]}$, исходя из интегрального представления

$$E\hat{\mu}_0^{[2]}(n, N, M) = \frac{N(N-1)}{\pi_n} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} (1 + M(e^{z/(NM)} - 1))^{N-2} \frac{dz}{z^{n+1}},$$

аналогичного равенству (3.18). Как и в случае оценки $E\hat{\mu}_0$, нетрудно доказать, что

$$E\hat{\mu}_0^{[2]}(n, N, M) = N(N-1)m^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right).$$

Однако полученных оценок $E\hat{\mu}_0$ и $E\hat{\mu}_0^{[2]}$ недостаточно для вывода соотношения (3.15). Для того чтобы доказать (3.15) нужно с помощью представления (3.1) и предложения, связанного с разложением (3.11), найти

в явном виде коэффициенты a_1 и a_2 в разложениях

$$\begin{aligned} E \hat{\mu}_0 &= Nm \left(1 + \frac{a_1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right), \\ E \hat{\mu}_0^{[2]} &= N(N-1)m^2 \left(1 + \frac{a_2}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Соответствующие вычисления, приводящие в итоге к оценке (3.15), ввиду их громоздкости опущены.

Убедимся в справедливости неравенств, указанных в формулах (3.16) и (3.17). Так как $\alpha(1-\beta) < x_0$, то $m = (\alpha(1-\beta)/x_0)e^{-x_0} < 1$. Для доказательства неравенства $m[1 - (1+d)m] > 0$, которое оправдывает обозначение b^2 для его левой части, заметим, что оно выполняется тогда и только тогда, когда

$$\left(1 + \frac{\alpha}{1+x_0-\alpha} \right) \frac{\alpha}{Mx_0} e^{-x_0} < 1.$$

В силу (3.3) последнее неравенство равносильно неравенству

$$(1-\beta) \frac{(1+x_0)e^{-x_0}}{1-(1+x_0)\beta e^{-x_0}} < 1,$$

которое имеет место тогда и только тогда, когда $(1+x_0)e^{-x_0} < 1$. Так как $x_0 > 0$, то отсюда следует, что доказываемое неравенство действительно справедливо. Лемма доказана.

Как было замечено выше, если выполнено условие (1.3), то $E \mu_0(n, N) = Ne^{-\alpha}(1 + O(1/N))$. Аналогично доказательству неравенства (3.5) можно показать, что $m < e^{-\alpha}$, где m определяется формулой (3.16) и $M \geq 2$. Следовательно, для достаточно больших N будем иметь $E \mu_0(n, N) > E \hat{\mu}_0(n, N < M)$, $M \geq 2$.

Лемма 3.3. Для условных вероятностей $\hat{\tau}_{nk}(N, M)$ выполняется соотношение

$$\hat{\tau}_{nk}(N, M) = \binom{N}{k} \left(1 - \frac{k}{N} \right)^n \frac{\tau_{n0}(N-k, M)}{\pi_n(N, M)}, \quad (3.19)$$

где $n, N = 1, 2, \dots$, $M = 2, 3, \dots$, $k = 1, \dots, N-1$.

Доказательство. Пусть

$$T_{NM}(z) = T_{NM}(0, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{n0}(N, M) \frac{z^n}{n!}$$

— п.ф. вероятностей $\tau_{n0}(N, M)$. Тогда из (2.6) получаем

$$T_{NM}(Nz) = M^N (e^{z/M} - 1)^N. \quad (3.20)$$

Учитывая (2.5) и используя (2.6) и (3.20), находим, что

$$\begin{aligned} T_{NM}(x, Nz) &= x^N + \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N}{k} x^k M^{N-k} (e^{z/M} - 1)^{N-k} \\ &= x^N + \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N}{k} x^k T_{N-k, M}((N-k)z) \\ &= x^N + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N}{k} (N-k)^n \tau_{n0}(N-k, M) x^k. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения п.ф. $T_{NM}(x, z)$ следует утверждение леммы.

Лемма 3.3 является аналогом следствия 2 из работы [5] (см. также [1, с. 50]). Более того, (3.19) справедливо и при $M = 1$, так как, полагая в (3.19) $M = 1$, получим частный случай формулы (7) из [5].

Лемма 3.4. При $\alpha > 0$ корень $x_0 > 0$ уравнения (3.3) является также единственным положительным корнем уравнения

$$x = \gamma(1 - e^{-x}), \quad \gamma = \frac{\alpha}{1 - m} > 1, \quad (3.21)$$

где m определено посредством (3.16).

Доказательство. Сначала проверим, что x_0 — корень уравнения (3.21). Для этого в правую часть (3.21) подставим

$$\alpha = \frac{x_0}{1 - \beta e^{-x_0}}, \quad m = m(\alpha) = \frac{\alpha(1 - \beta)}{x_0} e^{-x_0} \quad (3.22)$$

и получим x_0 , так что x_0 действительно является корнем уравнения (3.21).

Далее, убедимся, что для любого $\alpha > 0$ выполняется неравенство $\gamma > 1$. Учитывая формулы (3.22), приходим к выводу, что это неравенство равносильно соотношению $e^{-x_0} > 1 - x_0$, справедливому при $x_0 > 0$. Наконец, положив $g_1(x) = \gamma(1 - e^{-x})$, заметим, что $g_1(0) = 0$, $g_1'(x) > 0$ для $x \geq 0$, причем $g_1'(0) = \gamma > 1$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) = \gamma$. Отсюда вытекает единственность положительного корня уравнения (3.21). Лемма доказана.

Как и лемма 3.3, лемма 3.4 также справедлива при $M = 1$.

4. Перейдем к доказательству локальной предельной теоремы в центральной области изменения n и N для сл.в. $\hat{\mu}_0(n, N, M)$, $M = 2, 3, \dots$

Теорема 4.1. Предположим, что выполняется условие (1.3) и $M \geq 2$ — фиксированное целое число. Тогда равномерно по α и k , $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$,

$$k = Nm + \sqrt{N}bu, \quad |u| \leq C, \quad C > 0 \text{ — константа}, \quad (4.1)$$

имеет место асимптотическое равенство:

$$P\{\hat{\mu}_0(n, N, M) = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}b} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right), \quad (4.2)$$

где m и b определяются формулами (3.16) и (3.17) соответственно.

Доказательство. Согласно (1.1) и лемме (3.3)

$$P\{\hat{\mu}_0(n, N, M) = k\} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \cdot \frac{(N-k)^n}{N^n} \cdot \frac{\tau_{n0}(N-k, M)}{\pi_n(N, M)}. \quad (4.3)$$

Из равенства (3.20) и определения п.ф. $T_{NM}(z)$, данного при доказательстве леммы 3.3, находим, что

$$\tau_{n0}(N-k, M) = \frac{n!M^{N-k}}{(N-k)^n M^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} (e^z - 1)^{N-k} \frac{dz}{z^{n+1}}, \quad (4.4)$$

где $\mathcal{L}$ — замкнутый контур, охватывающий точку $z = 0$ комплексной плоскости. С помощью (3.1) и (4.4) из (4.3) получаем, что

$$P\{\hat{\mu}_0(n, N, M) = k\} = X_1 X_2 X_3 X_4 \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right), \quad (4.5)$$

где

$$X_1 = \frac{N!}{k!(N-k)!}, \quad X_2 = \frac{n!}{N^n},$$

$$X_3 = \frac{1}{M^k} \left(\frac{\alpha}{x_0}\right)^{(1-\alpha)N} \frac{e^{(\alpha-x_0)N}}{\sqrt{1+x_0-\alpha}}, \quad (4.6)$$

$$X_4 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} (e^z - 1)^{N-k} \frac{dz}{z^{n+1}}. \quad (4.7)$$

Нас интересуют асимптотические оценки величин $\ln X_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Аналогично соотношению (41) из [5] можно написать оценку

$$\ln X_1 = -[m \ln m + (1-m) \ln(1-m)] N + bu[\ln(1-m) - \ln m] \sqrt{N} - \ln \sqrt{2\pi N} - \ln \sqrt{m(1-m)} - \frac{1}{2} u^2 \frac{b^2}{m(1-m)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \quad (4.8)$$

равномерную по α , $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, и k вида (4.1). С помощью формулы Стирлинга, учитывая, что $n = \alpha N$, находим, что равномерно по α , $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$,

$$X_2 = (\alpha \ln \alpha - \alpha) N + \ln \sqrt{2\pi \alpha N} + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (4.9)$$

Далее, из (4.6) следует, что

$$\ln X_3 = [m \ln(1 - \beta) + \alpha - x_0 + (1 - \alpha) \ln \alpha - (1 - \alpha) \ln x_0] N + \ln(1 - \beta) \cdot bu\sqrt{N} + \ln \sqrt{1 + x_0 - \alpha}. \quad (4.10)$$

Приступая к оцениванию $\ln X_4$, определим в правой полуплоскости функцию

$$f(z) = \ln A(z) - \alpha_k \ln z, \quad \alpha_k = \frac{n}{N - k}, \quad A(z) = e^z - 1, \quad (4.11)$$

принимая действительные значения для действительных z . Учитывая (4.1), находим, что

$$\alpha_k = a_0 + \frac{a_1}{\sqrt{N}} + \frac{a_2}{N} + O\left(\frac{1}{N\sqrt{N}}\right), \quad (4.12)$$

где

$$a_0 = \frac{\alpha}{1 - m}, \quad a_1 = \frac{\alpha b}{(1 - m)^2} u, \quad a_2 = \frac{\alpha b^2}{(1 - m)^3} u^2. \quad (4.13)$$

Рассмотрим для $x > 0$ уравнение $f'(x) = 0$; согласно определению $A(z)$ и $f(z)$ оно приводится к виду

$$x = \alpha_k(1 - e^{-x}). \quad (4.14)$$

В силу (4.12) и утверждения леммы 3.4 относительно величины $\alpha/(1 - m)$ найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $N_0 \geq 1$, что для всех $\alpha \in [\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}]$, и k вида (4.1) при $N \geq N_0$ будут справедливы неравенства

$$1 < \frac{\alpha^{(0)}}{1 - m} - \varepsilon \leq \alpha_k \leq \frac{\alpha^{(1)}}{1 - m} + \varepsilon < \infty. \quad (4.15)$$

Из (4.15) и из леммы 2 работы [5] вытекает, что при $N \geq N_0$ для указанных значений α и k уравнение (4.14) будет иметь единственное решение $x_k > 0$.

Проверим, что для тех же N , α и k выполняется соотношение

$$f''(x_k) \geq \delta > 0. \quad (4.16)$$

Во-первых, из (4.11) с учетом того, что x_k — корень уравнения (4.14), следует, что

$$f''(x_k) = (1 + x_k - \alpha_k) \frac{\alpha_k}{x_k^2}. \quad (4.17)$$

Затем найдем первые члены разложения x_k по степеням $1/\sqrt{N}$. Полагая

$$x_k = s_0 + \frac{s_1}{\sqrt{N}} + \frac{s_2}{N} + O\left(\frac{1}{N\sqrt{N}}\right) \quad (4.18)$$

и используя (4.12), из (4.14) для величин s_0 и s_1 , получим уравнения:

$$s_0 = a_0(1 - e^{-s_0}), \quad (4.19)$$

$$s_1 = a_0 s_1 e^{-s_0} + a_1(1 - e^{-s_0}). \quad (4.20)$$

Из (4.13) и леммы 3.4 заключаем, что

$$s_0 = x_0, \quad (4.21)$$

где x_0 — единственный положительный корень уравнения (3.3). Ввиду (4.21) и формул (4.13), определяющих a_0 и a_1 , из (4.20) вытекает, что

$$s_1 = \frac{x_0 b}{(1-m)H} u, \quad H = 1 + x_0 - \frac{\alpha}{1-m}. \quad (4.22)$$

Явное выражение для коэффициента s_2 из разложения (4.18), как выяснится в дальнейшем, нам не потребуется (см. (4.29) ниже). С помощью (4.12), (4.13), (4.18) и (4.21) находим, что

$$1 + x_k - \alpha_k = H + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (4.23)$$

Из неравенств (3.4) и (3.17) несложно вывести, что $H > 0$. Отсюда и из (4.17) и (4.23) следует, что при достаточно больших $N \geq N'_0$ для всех $\alpha \in [\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}]$ и k вида (4.1) выполняется неравенство (4.16).

Следовательно, можно воспользоваться теоремой 3 из [5] для асимптотической оценки интеграла (4.7). В результате убедимся, что равномерно по α , $\alpha \in [\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}]$, и k вида (4.1) для достаточно больших $N \geq \max(N_0, N'_0)$

$$X_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha N}} \cdot \frac{(e^{x_k} - 1)^{N-k}}{x_k^{\alpha N} \sqrt{1 + x_k - \alpha_k}} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right),$$

вследствие чего, учитывая (4.23), получим

$$\ln X_4 = \ln [(e^{x_k} - 1)^{N-k} x_k^{-\alpha N}] - \ln \sqrt{2\pi\alpha N} - \ln \sqrt{H} + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (4.24)$$

С помощью (4.18) нетрудно убедиться, что

$$\ln(e^{x_k} - 1) = A_0 + \frac{A_1}{\sqrt{N}} + \frac{A_2}{N} + O\left(\frac{1}{N\sqrt{N}}\right), \quad (4.25)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= x_0 + \ln x_0 + \ln \frac{1-m}{\alpha}, & A_1 &= \frac{\alpha}{(1-m)x_0} s_1, \\ A_2 &= \frac{\alpha}{(1-m)x_0} \left(s_2 + \frac{1}{2} s_1^2\right) - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{(1-m)^2 x_0^2} s_1^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Из (4.24), (4.25) и (4.1) следует, что

$$\ln(e^{x_k} - 1)^{N-k} = (1-m)A_0N + [(1-m)A_1 + buA_0]\sqrt{N} + (1-m)A_2 - buA_1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \quad (4.27)$$

где A_0, A_1 и A_2 определяются формулами (4.26).

Далее, снова используя (4.18), напишем разложение для $\ln(x_k^{-\alpha N})$:

$$\ln(x_k^{-\alpha N}) = -\alpha N \ln x_0 - \frac{\alpha}{x_0} s_1 \sqrt{N} - \frac{\alpha}{x_0} \left(s_2 - \frac{s_1^2}{2x_0} \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (4.28)$$

Из (4.27) и (4.28), приняв во внимание формулы (4.26), находим, что

$$\begin{aligned} \ln[(e^{x_k} - 1)^{N-k} x_k^{-\alpha N}] &= \left[(1-m)(x_0 + \ln x_0 + \ln(1-m) - \ln \alpha) - \alpha \ln x_0 \right] N \\ &\quad - bu[x_0 + \ln x_0 + \ln(1-m) - \ln \alpha] \sqrt{N} + \frac{\alpha}{2x_0} s_1^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 s_1^2}{(1-m)x_0^2} + \frac{\alpha s_1^2}{2x_0^2} - \frac{\alpha}{(1-m)x_0} bus_1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Теперь у нас имеется все необходимое, чтобы завершить доказательство теоремы. Суммируя с учетом (4.29) правые части равенств (4.8), (4.9), (4.10) и (4.24), из (4.5) получаем, что

$$\ln P\{\hat{\mu}_0(n, N, M) = k\} = -\ln \sqrt{2\pi N} + \ln \sqrt{\frac{1+x_0-\alpha}{m(1-m)H}} + \sigma. \quad (4.30)$$

Здесь

$$\sigma = \alpha \left(\frac{1}{2x_0} - \frac{\alpha}{2(1-m)x_0^2} + \frac{1}{2x_0^2} \right) s_1^2 - \frac{\alpha}{(1-m)x_0} bus_1 - \frac{1}{2} u^2 \frac{b^2}{m(1-m)}.$$

Учитывая определения величин b и H , а также выражение для s_1 (см. (3.17) и (4.22)), нетрудно проверить, что

$$H = \frac{1+x_0-\alpha}{m(1-m)} b^2, \quad (4.31)$$

а формула для σ упрощается и в конечном итоге приводится к виду

$$\sigma = -\frac{u^2}{2}. \quad (4.32)$$

Из (4.30), (4.31) и (4.32) вытекает справедливость равенства (4.2). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.1 было проведено по схеме, использованной в [1] и [5]. Ключевую роль в этом играет равенство (3.19).

В заключение приведем формулировку интегральной теоремы.

Теорема 4.2. *Если выполнено условие (1.3) и $M \geq 2$ — фиксированное целое число, то имеет место сходимость*

$$\frac{\hat{\mu}_0(n, N, M) - Nm}{\sqrt{Nb}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1),$$

где $\mathcal{N}(0, 1)$ — сл.в., распределенная по нормальному закону с параметрами $(0, 1)$.

Доказательство теоремы 4.2 можно получить обычным путем из локальной теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976, 223 с.
2. Селиванов Б. И. О времени ожидания в схеме случайных размещений окрашенных частиц. — Дискрет. матем., 1995, т. 7, в. 1, с. 134–144.
3. Békeşy A. On classical occupancy problem, I. — A Magyar Tudom. Akad. Matem. Kutató Intéz. Közl., 1963, ser. A, v. 8, № 1–2, p. 59–70.
4. Rényi A. Three new proofs and a generalization of a theorem of Irving Weiss. — A Magyar Tudom. Akad. Matem. Kutató Intéz. Közl., 1962, ser. A, v. 7, № 1–2, p. 203–213.
5. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Асимптотическая нормальность в классической задаче о дробинках. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 2, с. 223–237.
6. Good I. J. Saddle-points methods for the multinomial distribution. — Ann. Math. Statist., 1957, v. 28, № 4, p. 861–881.
7. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987, 544 с.

Поступила в редакцию
20.I.1997