Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Веретенников, О больших отклонениях для стохастических дифференциальных уравнений с малой диффузией и усреднением, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 2, 349–351

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:02:29

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 1998 г.

ВЕРЕТЕННИКОВ А. Ю.*

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ
СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С МАЛОЙ ДИФфуЗИЕЙ И УСРЕДНЕНИЕМ¹⁾

Установлен принцип больших уклонений для системы стохастических дифференциальных уравнений с «быстрыми» и «медленными» переменными и малой диффузией в «медленной» компоненте.

Ключевые слова и фразы: большие уклонения, усреднение, стохастическое дифференциальное уравнение.

1. Введение. Рассматривается система стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) размерности $d + \ell$

$$\begin{aligned} dX_t^\varepsilon &= f(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) dt + \varepsilon (\sigma_1(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) dw_t^1 + \sigma_3(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) dw_t^3), & X_0^\varepsilon &= x, \\ dY_t^\varepsilon &= \varepsilon^{-2} B(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) dt + \varepsilon^{-1} (C_1(Y_t^\varepsilon) dw_t^1 + C_2(Y_t^\varepsilon) dw_t^2), & Y_0 &= y, \end{aligned} \quad (1)$$

при $0 \leq t \leq 1$. Здесь (w^1, w^2, w^3) — винеровский процесс размерности $3d$; ε — малый параметр; $f, \sigma_1, \sigma_3, B, C_1, C_2$ — борелевские векторные и матричнозначные функции, соответственно, размерностей $d, d \times d, d \times d, \ell, \ell \times d, \ell \times d$; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ограничены; σ_1 и σ_3 непрерывны по x при каждом y , f и $C_{1,2}$ ограничены; B непрерывна по x при всяком y ; выполнены условия линейного роста и условие Липшица

$$|B(x, y)| \leq L(1 + |y|),$$

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leq L(|x - x'| + |y - y'|),$$

матрица $C = (C_1, C_2)$ такова, что CC^* локально невырождена и непрерывна. Кроме того, либо матрица $(\sigma_1, \sigma_3)(\sigma_1, \sigma_3)^*$ невырождена и непрерывна, либо все коэффициенты системы удовлетворяют условию Липшица. При этих условиях, во всяком случае, определено решение системы (1), единственное в смысле закона распределения.

Рассматривается задача о больших уклонениях для «медленной» компоненты X^ε в пространстве траекторий $C([0, 1]; \mathbf{R}^d)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Без аддитивной малой диффузии, т.е. при $\sigma_1 = \sigma_3 \equiv 0$, такая задача при различных предположениях исследовалась в

*Институт проблем передачи информации, Б. Каретный, 19, 101447 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 95-01-01074 и 98-01-00062.

[2], [3], [8], [9] и др. При ее наличии и с независимыми винеровскими процессами w^1, w^2 (без w^3) в медленной и быстрой компонентах (т.е. при $C_1 = \sigma_3 \equiv 0$) результаты о больших отклонениях установлены в [7], [10]. Наконец, при одинаковых винеровских процессах (только w^1) в медленной и быстрой компонентах, единичных C_1 и σ_1 и когда быстрая компонента принимает значения на торе (т.е. все коэффициенты периодичны по y), принцип больших отклонений установлен в [5].

Здесь не предполагается периодическая зависимость коэффициентов. Взамен, ввиду некомпактности фазового пространства $\mathbf{R}^d$ процесса Y^ε , предполагается выполненным следующее условие устойчивости быстрой компоненты: для всякого $a > 0$

$$\limsup_{|y| \rightarrow \infty} \sup_{|\beta| < a} \sup_x \|CC^*(y)\|^{-1} \left\langle B(x, y) + C_1(y) \sigma_1^*(x, y) \beta, \frac{y}{|y|} \right\rangle = -\infty. \quad (2)$$

Если матрица CC^* постоянна, то равенство (2) при всех β эквивалентно равенству (2) лишь при $\beta = 0$. В свою очередь, это условие при $\beta = 0$ использовалось в [8], [9], и оно же близко к условию из работы [1], в которой применялся совсем иной подход.

1. Основной результат. Обозначим через $y_t^{x, \beta}$ решение СДУ

$$dy_t = (B(x, y_t) + C_1(y_t) \sigma_1^*(x, y_t) \beta) dt + (C_1(y_t) dw_t^1 + C_2(y_t) dw_t^2), \quad y_0 = y. \quad (3)$$

Условие (2) обеспечивает (с очень большим запасом) существование конечной инвариантной меры $\mu^x(dy)$ марковского процесса $y_t^{x, 0}$. Эта мера единственна в силу непрерывности и локальной невырожденности матрицы диффузии C .

Говорят, что семейство процессов X^ε удовлетворяет принципу больших отклонений в $C([0, 1]; \mathbf{R}^d)$ с нормировочным множителем ε^{-2} и функционалом действия $S(\varphi)$, если справедливы три условия:

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbf{P}_x \{X^\varepsilon \in F\} \leq -\inf_F S(\varphi) \quad \text{для любого замкнутого } F, \quad (4)$$

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbf{P}_x \{X^\varepsilon \in G\} \geq -\inf_G S(\varphi) \quad \text{для любого открытого } G, \quad (5)$$

и множество

$$\Phi(s) := \left\{ \varphi \in C([0, 1]; \mathbf{R}^d) : S(\varphi) \leq s, \varphi(0) = x \right\}$$

компактно в $C([0, 1]; \mathbf{R}^d)$ для всякого $s \geq 0$.

Теорема 1. Пусть выполнены все упомянутые выше условия. Тогда семейство процессов X^ε удовлетворяет принципу больших отклонений в пространстве траекторий $C([0, 1]; \mathbf{R}^d)$ с нормировочным множителем ε^{-2} и функционалом действия

$$\begin{aligned} S(\varphi) &= \int_0^1 L(\varphi_t, \dot{\varphi}_t) dt, \\ L(x, \alpha) &= \inf_{\beta} (\alpha \beta - H(x, \beta)), \\ H(x, \beta) &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \mathbf{E} \exp \left(\int_0^t \left(\beta f(x, y_s^{x, \beta}) + \frac{1}{2} (|C_1 \sigma_1^*(x, y_s^{x, \beta}) \beta|^2 + |C_1 \sigma_3^*(x, y_s^{x, \beta}) \beta|^2) \right) ds \right). \end{aligned}$$

Последний предел существует, функции H и L выпуклы, L неотрицательна, H дифференцируема по переменной β в нуле.

З а м е ч а н и е. $S(\varphi) = 0$ тогда и только тогда, когда φ — решение уравнения $\varphi_t = x + \int_0^t f(\varphi_s) ds$, где $\bar{f}(x) = \int f(x, y) \mu^x(dy)$. Можно показать, что функция

$\bar{f}$ непрерывна и ограничена, и, стало быть, решения этого уравнения существуют. Однако, их может быть много. В последнем случае функционал действия равен нулю на любом решении, а принцип больших отклонений описывает, в частности, отклонения от множества всех решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Существование предела в (5) следует из комбинации рассуждений в [8] с формулой Гирсанова. Для некомпактного фазового пространства важно, чтобы условие устойчивости (2) выполнялось при добавлении к сносу B вектора $C_1 \sigma_1^* \beta$.

2. Далее рассуждения следуют схеме [8]: дискретизация траектории X и сведение принципа больших отклонений к таковому для конечномерных векторов, затем регуляризация положительной полугруппы с помощью моментов останова, использование теоремы Фробениуса для аппроксимирующей полугруппы и обратный переход к исходной полугруппе благодаря сверхэкспоненциальной скорости аппроксимаций, которая обеспечивается условием (2). Это дает оценку снизу (5). Отметим, что для перехода к дискретизованной задаче не требуется условие Липшица на функцию $\bar{f}$ (ср. с [3], [8]).

3. Оценка сверху (4) получается из экспоненциальной плотности мер X^ε и оценки снизу аналогично теореме 7.4.1 в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, IV. — Comm. Pure Appl. Math., 1983, v. 36, p. 183–212.
2. Фрейдлин М. И. Принцип усреднения и теоремы о больших отклонениях. Успехи матем. наук, 1978, т. 33, № 5, с. 107–160.
3. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
4. Gulinsky O. V., Veretennikov A. Yu. Large deviations for discrete-time processes with averaging. Utrecht: VSP, 1993, 186 p.
5. Kleptsyna M. L., Piatnitskii A. L., Veretennikov A. Yu. On large deviation asymptotics for homogenized SDEs with a small diffusion. — Abstracts of the Symposium in the Memory of Professor Serguei Kozlov «Homogenization and Random Media» (24–28 June 1996, CIRM, Marseille, France). Publ. CIRM, № 16-96.
6. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985.
7. Liptser R. Sh. Large deviations for two scaled diffusions. — Probab. Theory Relat. Fields, 1996, v. 106, p. 71–104.
8. Veretennikov A. Yu. Large deviations in averaging principle for stochastic differential equation systems (noncompact case). — Stochastics Stochastics Reports, 1994, v. 48, p. 83–96.
9. Veretennikov A. Yu. On large deviations for SDE systems without bounded coefficient derivatives. — Proceedings of the Fifth Gregynog Symposium on Stochastic Analysis and Applications (Gregynog, Powys, 9–14 July 1995). Singapore: World Scientific, 1996, p. 471–478.
10. Veretennikov A. Yu. Lower bound for large deviations for an averaged SDE with a small diffusion. — Russian J. Math. Phys., 1997, v. 5, № 1, p. 99–104.

Поступила в редакцию
20.XI.1997