Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Гуревич, А. А. Темпельман, Мультифрактальный анализ временных средних для непрерывных функций на пространстве конфигураций, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 1, 78–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:29:37

© 2006 г. ГУРЕВИЧ Б. М.*, ТЕМПЕЛЬМАН А. А.**

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ КОНФИГУРАЦИЙ¹⁾

Рассматривается естественное действие τ группы $\mathbf{Z}^d$ на пространстве X , состоящем из функций $x: \mathbf{Z}^d \rightarrow S$ (S -значных конфигураций на $\mathbf{Z}^d$), где S — конечное множество. Для произвольной непрерывной функции $f: X \rightarrow \mathbf{R}^m$ изучается мультифрактальный спектр ее «временных средних», отвечающих динамической системе τ и подходящей «усредняющей» последовательности конечных подмножеств решетки $\mathbf{Z}^d$. Основным инструментом исследования служит термодинамический формализм.

Ключевые слова и фразы: хаусдорфова размерность, цилиндрическая размерность, инвариантная мера, гиббсовское случайное поле, пространственное среднее, временное среднее, мультифрактальный спектр.

1. Введение. Рассмотрим вектор-функцию $f = (f_1, \dots, f_m)$ на пространстве конфигураций $X = \{x: T \rightarrow S\}$, где $T = \mathbf{Z}^d$, $d \geq 1$, и S — конечное множество. Пусть $\tau = \{\tau_t\}$ — группа преобразований $\tau_t: X \rightarrow X$, заданных равенством $(\tau_t x)(s) = x(s+t)$, $x \in X$, $s, t \in T$. Временные средние функции f определяются по отношению к динамической системе τ и некоторой усредняющей последовательности конечных множеств $\mathcal{A} = \{A_n\}$, $A_n \subset T$. Простейшую из таких последовательностей обозначим через $\mathcal{T} = \{T_n\}$, положив $T_n = [-n, n]^d \cap \mathbf{Z}^d$, $n = 1, 2, \dots$.

Для каждого вектора $\alpha \in \mathbf{R}^m$ введем множество

$$X_{f, \alpha, \mathcal{A}} = \left\{ x \in X: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|A_n|} \sum_{t \in A_n} f(\tau_t x) = \alpha \right\}. \quad (1.1)$$

Если предел в этой формуле существует, то α называется *временным средним* функции f в точке x (относительно $\mathcal{A}$). Совокупность всех

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: gurevich@mech.math.msu.ru

** Departments of Mathematics and Statistics, The Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA; e-mail: arkad@stat.psu.edu

¹⁾ Работа первого автора поддержана грантом РФФИ № 05-00-00449.

таких α обозначим через $M_{f,\mathcal{A}}$. Функция, которая ставит в соответствие каждому $\alpha \in \mathbf{R}^m$ хаусдорфову размерность множества $X_{f,\alpha,\mathcal{A}}$ (отвечающую некоторой метрике ρ на X), называется *мультифрактальным спектром* множества $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{R}^m} X_{f,\alpha,\mathcal{A}}$, а ее исследование — мультифрактальным анализом. Чтобы вычислить мультифрактальный спектр, мы вначале введем (в п. 3) более удобную в данной ситуации «цилиндрическую размерность», отвечающую ρ и $\mathcal{A}$, и сформулируем условия, при которых она совпадает с хаусдорфовой.

При изучении мультифрактального спектра естественно возникает вопрос о том, для каких α множество $X_{f,\alpha,\mathcal{A}}$ непусто. Для ответа на него мы рассмотрим множество $\mathcal{J}$, состоящее из τ -инвариантных вероятностных мер на X (однородных случайных полей на T), и множество I_f *пространственных средних* функции f , состоящее из векторов $\mu(f) := \int f d\mu \in \mathbf{R}^m$, $\mu \in \mathcal{J}$. В [15] показано, что $M_{f,\mathcal{A}} = I_f$ для $\mathcal{A} = \mathcal{J}$ и для некоторых других последовательностей $\mathcal{A}$; причина состоит в том, что для всякой меры $\mu \in \mathcal{J}$ множество μ -типичных точек $X_{\mu,\mathcal{A}}$ непусто. Если эта мера — эргодическая, то $X_{\mu,\mathcal{J}} \neq \emptyset$, так как $\mu(X_{\mu,\mathcal{J}}) = 1$. Однако в неэргодическом случае $\mu(X_{\mu,\mathcal{J}}) = 0$, и вопрос о непустоте $X_{\mu,\mathcal{J}}$ (а тем более непустоте $X_{\mu,\mathcal{A}}$ при $\mathcal{A} \neq \mathcal{J}$) перестает быть тривиальным.

В п. 4 с помощью результатов работ [11], [14] и [13] мы вычисляем хаусдорфову размерность множества $X_{\mu,\mathcal{A}}$ для всех $\mu \in \mathcal{J}$, всех подпоследовательностей $\mathcal{A}$ последовательности $\mathcal{J}$ и широкого класса метрик ρ .

Этот результат обобщает ряд утверждений, имеющих в литературе. Речь прежде всего идет о вычислении хаусдорфовой размерности множества типичных конфигураций на одномерной решетке, т.е. типичных последовательностей. По-видимому, первые общие результаты такого типа (в теоретико-числовой формулировке — для разложений действительных чисел по произвольному основанию $r \in \mathbf{N}$) получил Коулбрук [6]. Несколько более общей задачей для хаусдорфовой размерности, отвечающей так называемой метрике Биллингсли (см. п. 3), позднее занимался Каяр [5] и вслед за ним Оливье [20]. Аналогичные результаты для стандартной метрики получили Олсен и Винтер [22]. Авторы настоящей статьи рассмотрели в [11] многомерный случай, т.е. множество типичных реализаций случайного поля, правда, только для гиббсовских полей с потенциалом конечной нормы. Перейти к произвольному однородному полю удалось благодаря возможности аппроксимировать его по распределению эргодическими гиббсовскими, в частности марковскими, полями с контролируемым поведением энтропии (см. [13]).

Мультифрактальный анализ временных средних имеет долгую историю. Эгглстон [7] и Фолкман [34] рассмотрели эту задачу, также в теоретико-числовом контексте, для временных средних первой координаты как функции на пространстве последовательностей (близкий ре-

зультат ранее получил Безикович [2]). Биллингсли [3] (см. также [4]) обобщил их результаты на пару соседних координат. Только несколько лет назад появились первые работы, посвященные функциям бесконечного числа координат; сначала это были «гладкие», а затем и произвольные непрерывные функции (см. [19], [21], [24], [29], [30], [1]), как правило — скалярные (исключение составляют лишь работы [22] и [8]). Случай гладкой вектор-функции на пространстве многомерных конфигураций впервые был рассмотрен в [32]. Следует отметить, что априори многомерный случай ($d > 1$) существенно отличается от одномерного хотя бы тем, что в последнем всякая гладкая скалярная функция порождает единственную гиббсовскую меру (гиббсовское случайное поле), а в многомерном это не так даже для функций конечного числа координат. Кроме того, на $\mathbf{Z}^d$ при $d > 1$, в отличие от $\mathbf{Z}$, существует много естественных усредняющих последовательностей множеств, и для некоторых из них (кроме рассмотренных здесь) справедливы основные результаты настоящей статьи. Мы надеемся, однако, что и при $d = 1$ эти результаты (часть которых была без доказательства опубликована в [12]) добавляют к общей картине некоторые новые детали.

Уже довольно давно была замечена тесная связь между обсуждаемыми здесь вопросами и термодинамическим формализмом — направлением теории динамических систем, сформировавшимся под идейным влиянием статистической физики (см. [23]). Методы термодинамического формализма оказались особенно эффективны в случае, когда f — гладкая функция (см. [24], [29], [32]). В настоящей статье, имея дело с произвольными непрерывными функциями, мы остаемся в рамках термодинамического формализма, хотя некоторыми авторами и высказывалось мнение (см., например, [22]), что в этом общем случае термодинамический формализм должен быть дополнен идеями, лежащими за его пределами.

Для удобства читателя весь необходимый нам материал, относящийся к термодинамическому формализму, собран в п. 2 (общая теория изложена в [9] и [26]).

Мы посвящаем эту работу Якову Григорьевичу Синаю, одному из создателей термодинамического формализма, в связи с его 70-летием. В работе [28] Я. Г. Синай ввел понятие инвариантной гиббсовской меры для важного класса динамических систем, что вызвало к жизни совершенно новые методы исследования и в конце концов привело к современному пониманию термодинамического формализма. Общеизвестна ключевая роль Я. Г. Синая в изучении энтропии — еще одного основного понятия термодинамического формализма (как и гиббсовские меры, необходимого для нашей статьи). Отметим также, что в начале 90-х годов он организовал в Москве семинар, одной из главных задач которого стало изучение хаусдорфовой размерности и связанных с ней понятий.

2. Необходимые факты из термодинамического формализма. Обозначим через $C(X, \mathbf{R}^m)$, $m \geq 1$, банахово пространство всех действительных непрерывных вектор-функций $f = (f_1, \dots, f_m): X \rightarrow \mathbf{R}^m$ с нормой $\|f\| = \sum_{i=1}^m \max_{x \in X} |f_i(x)|$. Для всякой $f \in C(X, \mathbf{R}^m)$ введем конечномерное подпространство $C_f \subset C(X, \mathbf{R})$, порожденное функциями $f_1, \dots, f_m$.

Функция $P: C(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$, определенная равенством

$$P(\varphi) = \sup_{\mu \in \mathcal{J}} [h(\mu) - \mu(\varphi)], \quad \varphi \in C(X, \mathbf{R}), \quad (2.1)$$

называется *давлением*, отвечающим φ ; здесь $h(\mu)$ — энтропия меры μ . Давление — конечная, выпуклая и, следовательно, непрерывная функция на $C(X, \mathbf{R})$. Она даже удовлетворяет условию Липшица: $|P(\varphi) - P(\psi)| \leq \|\varphi - \psi\|$, $\varphi, \psi \in C(X, \mathbf{R})$. Мера $\mu_0 \in \mathcal{J}$ называется φ -*равновесной*, если на ней достигается супремум в (2.1). Обозначим множество φ -равновесных мер через $\mathcal{E}(\varphi)$; оно непусто при всех $\varphi \in C(X, \mathbf{R})$. Положим также

$$\mathcal{E}_f = \bigcup_{\varphi \in C_f} \mathcal{E}(\varphi), \quad E_f = \{\mu(f): \mu \in \mathcal{E}_f\}. \quad (2.2)$$

Вариационный принцип для $h(\mu)$ гласит, что

$$h(\mu) = \inf_{\varphi \in C(X, \mathbf{R})} [P(\varphi) + \mu(\varphi)], \quad \mu \in \mathcal{J}. \quad (2.3)$$

Функция $\mu \mapsto h(\mu)$, $\mu \in \mathcal{J}$, ограничена (а именно, $h(\mu) \leq \ln |S|$), аффинна (т.е. $h(p\mu + (1-p)\nu) = ph(\mu) + (1-p)h(\nu)$ при всех $\mu, \nu \in \mathcal{J}$ и $p \in [0, 1]$) и полунепрерывна сверху.

Для каждого $V \subset T$ положим $X_V = S^V$ и для каждого $x \in X$ обозначим через x_V ограничение конфигурации x на V . Пусть $\mathcal{F}$ — семейство всех конечных подмножеств множества T и $\mathcal{F}(V) = \{U \in \mathcal{F}: U \cap V \neq \emptyset\}$, $\mathcal{F}(t) = \{U \in \mathcal{F}: t \in U\}$, $V \subset T$, $t \in T$.

Функция $\Phi: \mathcal{F} \times X \rightarrow \mathbf{R}$ называется *потенциалом*, если $\Phi(F, x) = \Phi(F, y)$ при $x_F = y_F$ и $\Phi(\emptyset, x) \equiv 0$. Для каждого потенциала Φ и для $V \in \mathcal{F}$, $x \in X$ сумма

$$E^\Phi(V, x) := \sum_{W \subset V} \Phi(W, x) \quad (2.4)$$

называется *энергией* конфигурации x_V .

Всюду ниже мы предполагаем, если не оговорено противное, что потенциал Φ *трансляционно инвариантен*, т.е. $\Phi(F + t, x) \equiv \Phi(F, \tau_t x)$, и имеет конечную норму: $\|\Phi\| := \sum_{V \in \mathcal{F}(0)} \max_{x \in X} |\Phi(V, x)| < \infty$.

Назовем потенциал Φ *локальным*, если существует такое $V \in \mathcal{F}$, что $\Phi(F, x) = 0$ тождественно по x при всех F , кроме тех, для которых $F + t \subset V$ при некотором $t \in T$.

Легко видеть, что потенциалы с конечной нормой образуют банахово пространство; мы обозначим его через $\mathfrak{F}$. Для $\Phi \in \mathfrak{F}$, $V \in \mathcal{F}$ и $x \in X$ сумма $E^\Phi(V, V^c; x) := \sum_{W \in \mathcal{F}(V)} \Phi(W, x)$ интерпретируется как

энергия конфигурации x_V при заданной конфигурации x_{V^c} (здесь и ниже $V^c = T \setminus V$). Для $x \in X$, $z \in X_V$ определим конфигурацию $zx_{V^c} \in X$ равенствами $(zx_{V^c})_V = z$, $(zx_{V^c})_{V^c} = x_{V^c}$. Сумма

$$Z^\Phi(V^c; x) := \sum_{z \in X_V} \exp[-E^\Phi(V, V^c; zx_{V^c})]$$

называется *статистической суммой* с граничным условием x_{V^c} .

Каждому потенциалу $\Phi \in \mathfrak{F}$ ставится в соответствие функция $\varphi^\Phi: X \rightarrow \mathbf{R}$, называемая *локальной энергией*:

$$\varphi^\Phi(x) := \sum_{V \in \mathcal{F}(0)} |V|^{-1} \Phi(V, x), \quad x \in X.$$

Индуктированное так отображение из $\mathfrak{F}$ в $C(X, \mathbf{R})$ непрерывно.

Напомним, что последовательность множеств $V_n \in \mathcal{F}$ называется *последовательностью Фёлнера*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} |(V_n + t) \Delta V_n|/|V_n| = 0$ при каждом $t \in T$. Если $\{V_n\}$ — последовательность Фёлнера, то равномерно по $y \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n|^{-1} \ln Z^\Phi(V_n^c; y) = P(\varphi^\Phi).$$

Мера $\mu \in \mathcal{I}$ называется *гиббсовской мерой* с потенциалом $\Phi \in \mathfrak{F}$, если при всех $V \in \mathcal{F}$ и $x \in X$ функция $y \mapsto \gamma_{V,x}^\Phi(y)$, где $\gamma_{V,x}^\Phi(y) = \exp[-E^\Phi(V, V^c; x_V y_{V^c})]/Z^\Phi(V; y)$, $y \in X$, служит вариантом условной вероятности $\mu(C_V(x) | \mathcal{B}_{V^c})$ цилиндра $C_V(x) := \{y \in X: y_V = x_V\}$ при условии σ -алгебры $\mathcal{B}_{V^c}$, порожденной цилиндрами C_W с $W \subset V^c$. Множество гиббсовских мер с потенциалом Φ есть в точности $\mathcal{E}(\varphi^\Phi)$.

Предложение 2.1 (см. [14]). Если $\Phi \in \mathfrak{F}$ и $\{V_n\}$ — последовательность Фёлнера, то равномерно по $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|} \left| E^\Phi(V_n, x) - \sum_{t \in V_n} \varphi^\Phi(\tau_t x) \right| = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|} \left| E^\Phi(V_n, x) - E^\Phi(V, V^c; x) \right| = 0.$$

Предложение 2.2 (см. [10]). Если $\Phi \in \mathfrak{F}$, $\nu \in \mathcal{E}(\varphi^\Phi)$ и $\{V_n\}$ — последовательность Фёлнера, то найдется такая последовательность положительных чисел r_n , что $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n|^{-1} r_n = 0$ и

$$e^{-r_n} \leq \frac{\nu(C_{V_n}(x))}{\gamma_{V_n, x}^\Phi(y)} \leq e^{r_n}, \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Предложение 2.3 (см. [14]). Если $\Phi \in \mathfrak{F}$, $\nu \in \mathcal{E}(\varphi^\Phi)$ и $\{V_n\}$ — последовательность Фёлнера, то равномерно по $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|} \left[-\ln \nu(C_{V_n}(x)) - \sum_{t \in V_n} \varphi^\Phi(\tau_t x) \right] = P(\varphi^\Phi).$$

В качестве следствия предложения 2.3 мы получим для гиббсовских мер следующее уточнение теоремы Бреймана–Орнштейна–Вайсса.

Следствие 2.1 (см. [14]). Пусть $\Phi \in \mathfrak{F}$, $\nu \in \mathcal{E}(\varphi^\Phi)$ и $\mathcal{A} = \{A_n\}$ — последовательность Фёлнера. Тогда для всех $\mu \in \mathcal{J}$ и всех $x \in X_{\varphi^\Phi, \mu(\varphi^\Phi), \mathcal{A}}$ (см. (1.1))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n|^{-1} [-\ln \nu(C_{A_n}(x))] = P(\varphi^\Phi) + \mu(\varphi^\Phi).$$

Если, в частности, $x \in X_{\varphi^\Phi, \nu(\varphi^\Phi), \mathcal{A}}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n|^{-1} [-\ln \nu(C_{A_n}(x))] = h(\nu). \quad (2.5)$$

Обозначим через C^0 замкнутое подпространство пространства $C(X, \mathbf{R})$, порожденное функциями вида $\varphi \circ \tau_t - \varphi$, $\varphi \in C(X, \mathbf{R})$.

Предложение 2.4 (см. [10]). Функции φ вида $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 = \varphi^\Phi$ для некоторого потенциала $\Phi \in \mathfrak{F}$ и $\varphi_2 \in C^0$, образуют множество, плотное в $C(X, \mathbf{R})$.

Доказательство. Предположим, что φ — локальная функция, т.е. существует такое множество $L \in \mathcal{F}$, что $\varphi(x) = \varphi(y)$ при $x_L = y_L$. Тогда найдется такой локальный потенциал Φ , что $\mu(\varphi) = \mu(\varphi^\Phi)$ для всех $\mu \in \mathcal{J}$ (см. предложение 4.1 в [15]). Поэтому $\varphi - \varphi^\Phi \in C^0$ (см., например, § 4.6 в [26]), так что каждая локальная функция имеет упомянутое выше представление $\varphi_1 + \varphi_2$. Очевидно, что множество таких функций всюду плотно в $C(X, \mathbf{R})$. Предложение 2.4 доказано.

Для $\varphi \in C(X, \mathbf{R})$ и $V \in \mathcal{F}$ положим $\mathfrak{S}_{\varphi, V} = \sum_{t \in V} \varphi \circ \tau_t$.

Предложение 2.5. Если $\{V_n\}$ — последовательность Фёлнера и $\varphi \in C^0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n|^{-1} \mathfrak{S}_{\varphi, V_n} = 0$ равномерно по $x \in X$.

Доказательство. По предположению, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется линейная комбинация вида $\varphi_\varepsilon := \sum_{i=1}^n c_{i, \varepsilon} (\psi_{i, \varepsilon} \circ \tau_{t_{i, \varepsilon}} - \psi_{i, \varepsilon})$, где $n = n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, $c_{i, \varepsilon} \in \mathbf{R}$, $\psi_{i, \varepsilon} \in C(X, \mathbf{R})$, $t_{i, \varepsilon} \in T$, для которой $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\| \leq \varepsilon/2$. Тогда $|V_n|^{-1} \mathfrak{S}_{\varphi, V_n} = |V_n|^{-1} \mathfrak{S}_{\varphi_\varepsilon, V_n} + |V_n|^{-1} \mathfrak{S}_{\varphi - \varphi_\varepsilon, V_n}$. Ясно, что

$$|V_n|^{-1} \|\mathfrak{S}_{\varphi, V_n}\| \leq |V_n|^{-1} \sum_{i=1}^n |c_{i, \varepsilon}| \cdot \|\psi_{i, \varepsilon}\| \cdot |V_n \Delta (V_n + t_{i, \varepsilon})| + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.6)$$

Так как $\{V_n\}$ — последовательность Фёлнера, можно найти такое N , что при всех $n \geq N$ правая часть (2.6) меньше ε . Предложение 2.5 доказано.

Назовем меру $\mu \in \mathcal{J}$ квазибернуллиевской свертку, если для всякой последовательности Фёлнера $\{V_n\}$ найдется такая последовательность чисел $u_n \geq 0$, что $u_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\mu(C_{V_n}(x) \cap C_W(y)) \leq \mu(C_{V_n}(x)) \mu(C_W(y)) e^{u_n |V_n|} \quad (2.7)$$

при всех n , $W \subset T \setminus V_n$, $W \in \mathcal{F}$ и $x, y \in X$.

Предложение 2.6. Всякая гиббсовская мера является квазибернуллиевской свертку.

Доказательство. Пусть $\{V_n\}$ — последовательность Фёлера и $\{r_n\}$ — последовательность из предложения 2.2. Согласно этому предложению, при всех $n \in \mathbb{N}$ и $W \subset T \setminus V_n$, $W \in \mathcal{F}$, для гиббсовской меры ν с потенциалом Φ справедливы неравенства

$$e^{-r_n} \nu(C_{V_n}(x)) \leq \gamma_{V_n, x}^{\Phi}(y') \leq e^{r_n} \nu(C_{V_n}(x)), \quad x, y' \in X. \quad (2.8)$$

Проинтегрировав (2.8) относительно ν по множеству $C_W(y)$, $y \in X$, и воспользовавшись определением гиббсовской меры, получим

$$e^{-r_n} \nu(C_{V_n}(x)) \nu(C_W(y)) \leq \nu(C_{V_n}(x) \cap C_W(y)) \leq e^{r_n} \nu(C_{V_n}(x)) \nu(C_W(y)), \quad (2.9)$$

откуда вытекает (2.7) с $\mu = \nu$ и $u_n := r_n/|V_n|$. Предложение 2.6 доказано.

Неравенства (2.9) показывают, что каждая гиббсовская мера является также квазибернуллиевской снизу (в очевидном смысле), но этот факт нам не потребуется.

3. О цилиндрической и хаусдорфовой размерностях. Пусть ρ — метрика на X и $\mathcal{A} = \{A_n\}$ — такая последовательность множеств $A_n \in \mathcal{F}$, что $\text{diam}_{\rho}(C_{A_n}(x)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $x \in X$. Определим $\mathcal{A}$ -цилиндрическую размерность $\dim_{\rho, \mathcal{A}}(Y)$, $Y \subset X$, так же, как обычно определяется хаусдорфова размерность (см., например, [3], [23]), но с той разницей, что будем использовать только покрытия $\mathcal{A}$ -цилиндрами, т.е. множествами $C_{A_n}(x)$, $x \in X$, $n = 1, 2, \dots$ (ср. [31]). Отметим, что в терминах [23] $\dim_{\rho, \mathcal{A}}$ — это размерность, отвечающая некоторой структуре Каратеодори.

Для вероятностной меры μ на X введем верхнюю и нижнюю поточечные цилиндрические $(\mathcal{A}, \mu)$ -размерности $\bar{d}_{\rho, \mu, \mathcal{A}}(x)$ и $\underline{d}_{\rho, \mu, \mathcal{A}}(x)$, $x \in X$, равенствами

$$\bar{d}_{\rho, \mu, \mathcal{A}}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(C_{A_n}(x))}{\ln \text{diam}_{\rho}(C_{A_n}(x))}, \quad \underline{d}_{\rho, \mu, \mathcal{A}}(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(C_{A_n}(x))}{\ln \text{diam}_{\rho}(C_{A_n}(x))}.$$

Следующее предложение является вариантом хорошо известного результата (см. теоремы 1.5 в [31] и 2.3 в [11]).

Предложение 3.1. Для $\rho, \mathcal{A}$ и μ , определенных выше, и произвольных $Y \subset X$, $\bar{d}, \underline{d} \in \mathbf{R}_+$ справедливо следующее:

- (1) если $\bar{d}_{\rho, \mu, \mathcal{A}}(x) \leq \bar{d}$ при всех $x \in Y$, то $\dim_{\rho, \mathcal{A}}(Y) \leq \bar{d}$;
- (2) если $\mu(Y) > 0$ и $\underline{d}_{\rho, \mu, \mathcal{A}}(x) \geq \underline{d}$ при всех $x \in Y$, то $\dim_{\rho, \mathcal{A}}(Y) \geq \underline{d}$.

Будем говорить, что метрика ρ $\mathcal{A}$ -устойчива на множестве $Y \subset X$, если существует положительная константа $\kappa_{\rho, \mathcal{A}}(Y)$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n|^{-1} [-\ln \text{diam}_{\rho}(C_{A_n}(y))] = \kappa_{\rho, \mathcal{A}}(Y)$ при всех $y \in Y$. Вместо $\kappa_{\rho, \mathcal{T}}(X)$ будем писать κ_{ρ} (напомним, что $\mathcal{T}$ — последовательность кубов $T_n = [-n, n]^d \cap \mathbf{Z}^d$).

Теперь сформулируем условие, при котором цилиндрическая размерность $\dim_{\rho, \mathcal{A}}$ совпадает с хаусдорфовой размерностью $\dim_{\rho}^H$. Будем

говорить, что метрика ρ , определенная на X , удовлетворяет условию Морана по отношению к $\mathcal{A} = \{A_n\}$, если существуют такие $L > 0$ и $b > 0$, что для каждого шара $B_\rho \subset X$ найдутся $\mathcal{A}$ -цилиндры C_i с $\text{diam}_\rho(C_i) \leq b \text{diam}_\rho(B_\rho)$, $1 \leq i \leq L$, образующие покрытие этого шара. В дальнейшем шар радиуса r с центром x обозначается $B_\rho(x, r)$. Следующее утверждение почти очевидно.

Предложение 3.2. Если метрика ρ на X удовлетворяет условию Морана по отношению к $\mathcal{A}$, то $\dim_{\rho, \mathcal{A}}(Y) = \dim_\rho^H(Y)$ для всякого $Y \subset X$.

Ниже мы опишем класс метрик, удовлетворяющих условию Морана и устойчивых на некоторых множествах $Y \subset X$.

Пусть $\mathcal{A}$ — последовательность множеств $A_n \in \mathcal{F}$, удовлетворяющая условию $A_n \uparrow T$, и $\{a_n, n \geq 0\}$ — последовательность функций на X такая, что $a_0(x) \equiv 1$, $0 < a_n(x) \leq 1$, $a_n(x) = a_n(y)$ при $x_{A_n} = y_{A_n}$ и $a_n(x) \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $x \in X$. Положим $m(x, y) = \min\{n: x_{A_n} \neq y_{A_n}\}$, $x, y \in X$, $x \neq y$.

Легко проверить, что функция ρ_a , определенная равенством

$$\rho_a(x, y) = \begin{cases} a_{m(x, y)-1}(x), & x \neq y, \quad x(0) = y(0); \\ 1, & x(0) \neq y(0); \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

является метрикой на X и $\text{diam}_{\rho_a}(C_{A_n}(x)) = a_n(x)$, $n \geq 1$; $C_{A_n}(x) = B_{\rho_a}(x, r)$, если $\text{diam}_{\rho_a}(C_{A_n}(x)) \leq r < \text{diam}_{\rho_a}(C_{A_{n-1}}(x))$, $n \leq 1$; $C_{A_0}(x) = B_{\rho_a}(x, 1)$. Мы будем называть такие метрики $(\mathcal{A}, a)$ -метриками. Ясно, что каждая $(\mathcal{A}, a)$ -метрика удовлетворяет условию Морана (с $L = 1$) по отношению к $\mathcal{A}$ и что $(\mathcal{A}, a)$ -метрика $\mathcal{A}$ -устойчива на Y , если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1/|A_n|) \ln a_n(y)$ существует и является положительной константой на Y . Рассмотрим несколько примеров $(\mathcal{T}, a)$ -метрик.

Пример 3.1. Пусть Ψ — положительный потенциал из $\mathfrak{F}$ и E^Ψ — энергия, определенная в (2.4). Положим $a_n(x) = \exp[-E^\Psi(T_n, x)]$; назовем соответствующую $(\mathcal{T}, a)$ -метрику *потенциальной метрикой* и обозначим ее ρ^Ψ (ср. [11]). Метрика ρ^Ψ в силу предложения 2.1 $\mathcal{T}$ -устойчива на множестве $X_{\varphi^*, \mu(\varphi^*), \mathcal{T}}$ для каждой меры $\mu \in \mathcal{T}$; следовательно, она $\mathcal{T}$ -устойчива на $X_{\mu, \mathcal{T}}$, причем $\kappa_{\rho^*} = \mu(\varphi^*)$. В частности, когда $\Psi(V, x) = -\ln \theta$ для некоторой постоянной $\theta \in (0, 1)$, если V — одноточечное множество, и $\Psi(V, x) = 0$ в остальных случаях, эту метрику называют стандартной; очевидно, она $\mathcal{T}$ -устойчива на X . Каждая метрика ρ^Ψ с $\Psi(V, x)$, не зависящим от x , обладает тем же свойством.

Существуют также потенциальные метрики, $\mathcal{T}$ -устойчивые на X , которые порождены непостоянными функциями a_n . Чтобы определить их, нужно использовать неинвариантные потенциалы. Рассмотрим простейший из возможных примеров.

Пример 3.2. Возмутим следующим образом потенциал, задающий стандартную метрику. Пусть $\Phi(V, x) = 0$ для всех V , кроме однотоочечных и двухточечных, состоящих из ближайших соседей. При всех $t \in T$ положим $\Phi(\{t\}, x) = -\ln \theta$, где $\theta \in (0, 1)$. Потребуем, чтобы существовала такая функция $q: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, что $\lim_{r \rightarrow \infty} q(r) = 0$ и если $s, t \in T$, $|s - t| = 1$, то $|\Phi((s, t), x)| \leq q(|s|)$. Легко видеть, что потенциальная метрика ρ^Φ , отвечающая такому потенциалу, $\mathcal{T}$ -устойчива на X с $\kappa_{\rho^\Phi} = -\ln \theta$.

Пример 3.3. Рассмотрим вероятностную меру ν на X , для которой $\nu(C_{T_n}(x)) > 0$ при всех $n \in \mathbf{N}$ и $x \in X$, и введем $(\mathcal{T}, a)$ -метрику ρ^ν , где $a_n(x) = \nu(C_{T_n}(x))$. Такую метрику иногда называют *метрикой Биллингсли*, а соответствующую хаусдорфову размерность $\dim_{\rho^\nu}^H$ — *размерностью Биллингсли*. Предположим, что $\nu \in \mathcal{E}(\varphi^\Psi)$ для некоторого $\Psi \in \mathfrak{F}$, т.е. ν — гиббсовская мера с потенциалом Ψ . Тогда метрика ρ^ν , подобно метрике ρ^Ψ из примера 3.1, $\mathcal{T}$ -устойчива на множествах $X_{\varphi^\Psi, \mu(\varphi^\Psi), \mathcal{T}}$ и $X_{\mu, \mathcal{T}}$ для всех $\mu \in \mathcal{J}$ (см. следствие 2.1).

4. Множество типичных точек и его размерность. В этом пункте мы фиксируем последовательность кубов $\mathcal{T} = \{T_n\}$, $T_n = [-n, n]^d \cap \mathbf{Z}^d$, $n = 0, 1, 2, \dots$, (см. п. 1) и будем иметь дело с ее подпоследовательностями $\mathcal{A}$ (мы пишем $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$). Очевидно, все они суть последовательности Фёлнера.

Обозначим через δ_x вероятностную меру на X , сосредоточенную в точке $x \in X$. Пусть $\mu \in \mathcal{J}$. Точка x называется $(\mu, \mathcal{A})$ -типичной, если последовательность «эмпирических мер» $|A_n|^{-1} \sum_{t \in A_n} \delta_{tx}$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к μ . Обозначим множество $(\mu, \mathcal{A})$ -типичных точек через $X_{\mu, \mathcal{A}}$. Простые примеры показывают, что $X_{\mu, \mathcal{A}}$ может существенно зависеть от $\mathcal{A}$.

Лемма 4.1. (1) Если для меры $\mu \in \mathcal{J}$ найдется последовательность эргодических мер $\mu_i \in \mathcal{J}$, слабо сходящаяся к μ , то существует такая вероятностная мера $\tilde{\mu}$ на X (вообще говоря, не инвариантная), что $\tilde{\mu}(X_{\mu, \mathcal{A}}) = 1$ для всех $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$.

(2) Если, кроме того, меры μ_i являются квазибернуллиевскими свертку и $h(\mu_i) \rightarrow h(\mu)$ при $i \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [-|A_n|^{-1} \ln \tilde{\mu}(C_{A_n}(x))] \geq h(\mu), \quad x \in X_{\mu, \mathcal{A}}.$$

Это утверждение было фактически доказано в [11] для последовательностей $\mathcal{A}$ даже более общего вида, чем рассматриваемые сейчас (см. лемму 3.1 и замечание 3.1 в этой работе). Несмотря на то, что мера μ в [11] предполагается гиббсовской, в доказательстве используются только условия сформулированной выше леммы 4.1.

Теорема 4.1. Для всех $\mu \in \mathcal{J}$ и $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ множество $X_{\mu, \mathcal{A}}$ непусто.

Доказательство. Утверждение теоремы тривиально, если μ — эргодическая мера, поскольку в этом случае $\mu(X_{\mu, \mathcal{A}}) = 1$. Для произвольной меры оно вытекает из утверждения (1) леммы 4.1, так как условия последнего выполняются для всякой меры $\mu \in \mathcal{J}$ (см. [9, гл. 16]). Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, $\mu \in \mathcal{J}$ и ρ — метрика на X . Тогда

(1) если ρ $\mathcal{A}$ -устойчива на $X_{\mu, \mathcal{A}}$, то

$$\dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}}) = [\kappa_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}})]^{-1} h(\mu); \quad (4.1)$$

(2) если ρ $\mathcal{T}$ -устойчива на $X_{\mu, \mathcal{A}}$, то

$$\dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}}) = \dim_{\rho, \mathcal{T}}(X_{\mu, \mathcal{A}}) = \dim_{\rho, \mathcal{T}}(X_{\mu, \mathcal{T}}); \quad (4.2)$$

(3) если ρ $\mathcal{T}$ -устойчива на X и удовлетворяет условию Морана по отношению к $\mathcal{T}$, то

$$\dim_{\rho}^H(X_{\mu, \mathcal{A}}) = h(\mu) \kappa_{\rho}^{-1} \quad (4.3)$$

и, следовательно, $\dim_{\rho}^H(X_{\mu, \mathcal{A}})$ не зависит от $\mathcal{A}$.

Доказательство. (1) Пусть $\Phi \in \mathfrak{F}$ и $\nu \in \mathcal{E}(\varphi^{\Phi})$. Поскольку $X_{\mu, \mathcal{A}} \subset X_{\varphi, \mu(\varphi), \mathcal{A}}$ для всех $\varphi \in C(X, \mathbf{R})$, из следствия 2.1 вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n|^{-1} [-\ln \nu(C_{A_n}(x))] = P(\varphi^{\Phi}) + \mu(\varphi^{\Phi})$, $x \in X_{\mu, \mathcal{A}}$. Тогда в силу $\mathcal{A}$ -устойчивости ρ на $X_{\mu, \mathcal{A}}$

$$\bar{d}_{\rho, \nu, \mathcal{A}}(x) = [\kappa_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}})]^{-1} [P(\varphi^{\Phi}) + \mu(\varphi^{\Phi})]$$

при всех $x \in X_{\mu, \mathcal{A}}$, а потому (см. п. (1) предложения 3.1)

$$\dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}}) \leq [\kappa_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}})]^{-1} [P(\varphi^{\Phi}) + \mu(\varphi^{\Phi})], \quad \Phi \in \mathfrak{F}. \quad (4.4)$$

Согласно предложению 2.4, множество функций φ вида $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 = \varphi^{\Phi}$, $\Phi \in \mathfrak{F}$, $\varphi_2 \in C^0$, плотно в $C(X, \mathbf{R})$. Кроме того, $P(\varphi) = P(\varphi_1)$ и $\mu(\varphi) = \mu(\varphi_1)$ при всех $\mu \in \mathcal{J}$. Учитывая это вместе с (2.3) и непрерывностью P , из (4.4) мы получаем

$$\begin{aligned} \dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}}) &\leq [\kappa_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}})]^{-1} \inf_{\Phi \in \mathfrak{F}} [P(\varphi^{\Phi}) + \mu(\varphi^{\Phi})] \\ &= [\kappa_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}})]^{-1} h(\mu). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Как показано в [13], всякую меру $\mu \in \mathcal{J}$ можно аппроксимировать в смысле слабой сходимости такой последовательностью эргодических гиббсовских мер μ_i , что $h(\mu_i) \rightarrow h(\mu)$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому лемма 4.1, предложение 2.6 и п. (2) предложения 3.1 приводят к неравенству

$$\dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}}) \geq [\kappa_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}})]^{-1} h(\mu).$$

Вместе с (4.5) это означает справедливость (4.1).

(2) Так как $X_{\mu, \mathcal{T}} \subset X_{\mu, \mathcal{A}}$, а метрика ρ по условию $\mathcal{T}$ -устойчива на $X_{\mu, \mathcal{A}}$, она $\mathcal{T}$ -устойчива и на $X_{\mu, \mathcal{T}}$. Поэтому в силу утверждения (1), примененного к $\mathcal{T}$,

$$\begin{aligned} \dim_{\rho, \mathcal{T}}(X_{\mu, \mathcal{T}}) &= [\kappa_{\rho, \mathcal{T}}(X_{\mu, \mathcal{T}})]^{-1} h(\mu) = [\kappa_{\rho, \mathcal{T}}(X_{\mu, \mathcal{A}})]^{-1} h(\mu) \\ &= [\kappa_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}})]^{-1} h(\mu) = \dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поскольку каждый $\mathcal{A}$ -цилиндр является и $\mathcal{T}$ -цилиндром, из определения цилиндрической размерности следует, что

$$\dim_{\rho, \mathcal{T}}(X_{\mu, \mathcal{A}}) \leq \dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}}). \quad (4.7)$$

Наконец, включение $X_{\mu, \mathcal{T}} \subset X_{\mu, \mathcal{A}}$ влечет за собой неравенство $\dim_{\rho, \mathcal{T}}(X_{\mu, \mathcal{T}}) \leq \dim_{\rho, \mathcal{T}}(X_{\mu, \mathcal{A}})$, которое вместе с (4.6) и (4.7) приводит к (4.2).

(3) Это утверждение непосредственно вытекает из (4.1) и предложения 3.2. Теорема 4.2 доказана.

5. Хаусдорфова размерность множества $X_{f, \alpha, \mathcal{A}}$. Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbf{R}^m$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbf{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m) \in C(X, \mathbf{R}^m)$ положим $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i$, $\langle \alpha, f \rangle(x) = \langle \alpha, f(x) \rangle$, $x \in X$. Очевидно, $\langle \alpha, f \rangle \in C(X, \mathbf{R})$. Положим также $\mathcal{J}(f, \alpha) = \{\mu \in \mathcal{J} : \mu(f) = \alpha\}$ (ясно, что $\mathcal{J}(f, \alpha) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in I_f$). Фиксировав функцию f , введем обозначения:

$$g_1(\alpha) = \max_{\mu \in \mathcal{J}(f, \alpha)} h(\mu), \quad g_2(\alpha) = \inf_{\beta \in \mathbf{R}^m} [P(\langle \beta, f \rangle) + \langle \beta, \alpha \rangle], \quad \alpha \in I_f \quad (5.1)$$

(максимум в определении $g_1(\alpha)$ существует потому, что множество $\mathcal{J}(f, \alpha)$ компактно, а функция $\mu \mapsto h(\mu)$ полунепрерывна сверху на $\mathcal{J}$).

Лемма 5.1. *Функции g_1 и g_2 вогнуты на I_f .*

Доказательство. Вначале докажем утверждение для g_1 . Зафиксируем произвольные $\alpha_1, \alpha_2 \in I_f$ и найдем такие $\mu_i \in \mathcal{J}(f, \alpha_i)$, что $g_i(\alpha_i) = h(\mu_i)$, $i = 1, 2$. Если $p \in [0, 1]$, $q = 1 - p$, то, очевидно, $p\mu_1 + q\mu_2 \in \mathcal{J}(f, p\alpha_1 + q\alpha_2)$. Вследствие аффинности энтропии $g_1(p\alpha_1 + q\alpha_2) \geq h(p\mu_1 + q\mu_2) = ph(\mu_1) + qh(\mu_2) = pg_1(\alpha_1) + qg_1(\alpha_2)$, откуда видно, что функция g_1 вогнута.

Что касается вогнутости g_2 , то она следует из тождества

$$\inf_{\beta \in \mathbf{R}^m} [P(\langle \beta, f \rangle) + \langle \beta, \alpha \rangle] = - \sup_{\beta \in \mathbf{R}^m} [P(\langle \beta, f \rangle) + \langle \beta, \alpha \rangle]$$

и того факта, что функция $\alpha \mapsto \sup_{\beta \in \mathbf{R}^m} [P(\langle \beta, f \rangle) + \langle \beta, \alpha \rangle]$ выпукла (она представляет собой преобразование Фенхеля–Моро функции $\beta \mapsto P(\langle \beta, f \rangle)$). Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. *Функция g_1 полунепрерывна сверху на I_f .*

Доказательство. Пусть $\alpha, \alpha_n \in I_f$ и $\alpha_n \rightarrow \alpha$ при $n \rightarrow \infty$. При каждом n найдем меру $\mu_n \in \mathcal{J}(f, \alpha_n)$ с $h(\mu_n) = g_1(\alpha_n)$ и выберем такую последовательность $\{n_k\}$, что μ_{n_k} при $k \rightarrow \infty$ сходится к некоторой мере μ и $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\mu_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(\mu_{n_k})$. Ясно, что $\mu \in \mathcal{J}(f, \alpha)$. В силу полунепрерывности энтропии сверху

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} g_1(\alpha_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} h(\mu_n) \leq h(\mu) \leq g_1(\alpha),$$

откуда следует полунепрерывность сверху функции g_1 . Лемма 5.2 доказана.

Лемма 5.3. *Функции g_1 и g_2 совпадают на I_f .*

Доказательство. Заметим, что

$$g_1(\alpha) \leq g_2(\alpha), \quad \alpha \in I_f. \quad (5.2)$$

Действительно, если $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^m$ и $\mu \in \mathcal{J}(f, \alpha)$, то в силу (2.1) $P(\langle \beta, f \rangle) \geq h(\mu) - \mu(\langle \beta, f \rangle) = h(\mu) - \langle \beta, \alpha \rangle$, т.е. $P(\langle \beta, f \rangle) + \langle \beta, \alpha \rangle \geq h(\mu)$, откуда следует (5.2) (см. (5.1)).

Чтобы доказать, что в (5.2) имеет место равенство, мы сначала предположим, что $\alpha \in E_f$ (см. (2.2)). По определению множества E_f , найдутся такие $\beta_\alpha \in \mathbf{R}^m$ и $\mu_\alpha \in \mathcal{E}(\langle \beta_\alpha, f \rangle)$, что $\mu_\alpha(f) = \alpha$. По определению равновесной меры, $h(\mu_\alpha) = P(\langle \beta_\alpha, f \rangle) + \mu_\alpha(\langle \beta_\alpha, f \rangle) = P(\langle \beta_\alpha, f \rangle) + \langle \beta_\alpha, \alpha \rangle$, вследствие чего $g_1(\alpha) \geq g_2(\alpha)$ (так как $\mu_\alpha \in \mathcal{J}(f, \alpha)$), и из (5.2) видно, что $g_1(\alpha) = g_2(\alpha)$, если $\alpha \in E_f$.

Теперь мы распространим это равенство на все $\alpha \in I_f$. Не уменьшая общности, можно предположить, что множество I_f нетривиально в том смысле, что содержит более одной точки (в противном случае $\mu(f) = \alpha$ для всех $\mu \in \mathcal{J}$ и, значит, $\alpha \in E_f$, а в этом случае равенство $g_1(\alpha) = g_2(\alpha)$ уже доказано).

Если множество I_f нетривиально, то, так как оно выпукло, его отнесенная внутренность $\text{ri } I_f$ непуста. Пусть $\alpha \in I_f \setminus \text{ri } I_f$, $\alpha_1 \in \text{ri } I_f$ и Δ — отрезок с концами α, α_1 . Можно убедиться, что $\Delta \setminus \{\alpha\} \subset \text{ri } I_f$. Но мы знаем, что $\text{ri } I_f = \text{ri } E_f$ (см. теорему 2.2 в [15]). Поэтому $\Delta \setminus \{\alpha\} \subset E_f$ и, значит, ограничения функций g_1, g_2 на $\Delta \setminus \{\alpha\}$ совпадают. Из вогнутости функции g_2 и полунепрерывности сверху функции $g_1|_\Delta$ вытекает соответственно, что

$$\lim_{\Delta \setminus \{\alpha\} \ni \alpha' \rightarrow \alpha} g_2(\alpha') \geq g_2(\alpha) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta \setminus \{\alpha\} \ni \alpha' \rightarrow \alpha} g_1(\alpha') \leq g_1(\alpha)$$

(оба предела существуют в силу леммы 5.1). Теперь из тождества $g_1|_{\Delta \setminus \{\alpha\}} \equiv g_2|_{\Delta \setminus \{\alpha\}}$ мы получаем $g_2(\alpha) \leq g_1(\alpha)$ и с помощью (5.2) приходим к требуемому равенству $g_1(\alpha) = g_2(\alpha)$, $\alpha \in I_f$. Лемма 5.3 доказана.

Теорема 5.1. *Пусть $f \in C(X, \mathbf{R}^m)$, ρ — метрика, которая $\mathcal{J}$ -устойчива на X и удовлетворяет условию Морана по отношению к $\mathcal{J}$, и пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{J}$. Тогда*

(1) *для каждого $\alpha \in I_f$*

$$\dim_\rho^H(X_{f, \alpha, \mathcal{A}}) = \kappa_\rho^{-1} \max_{\mu \in \mathcal{J}(f, \alpha)} h(\mu) = \kappa_\rho^{-1} \inf_{\beta \in \mathbf{R}^m} [P(\langle \beta, f \rangle) + \langle \beta, \alpha \rangle]; \quad (5.3)$$

(2) *если $\alpha \in E_f$, т.е. $\alpha = \mu(f)$, где $\mu \in \mathcal{E}(\langle \beta, f \rangle)$ с некоторым $\beta \in \mathbf{R}^m$, то*

$$\dim_\rho^H(X_{f, \alpha, \mathcal{A}}) = \kappa_\rho^{-1} h(\mu) = \kappa_\rho^{-1} [P(\langle \beta, f \rangle) + \langle \beta, \alpha \rangle]; \quad (5.4)$$

(3) *функция $\alpha \mapsto \dim_\rho^H(X_{f, \alpha, \mathcal{A}})$ вогнута и полунепрерывна сверху на I_f , непрерывна на $\text{ri } I_f$ и удовлетворяет условию Липшица на каждом замкнутом подмножестве множества $\text{ri } I_f$; кроме того, ограничение этой функции на каждый отрезок, содержащийся в I_f , непрерывно.*

Доказательство. (1) Достаточно доказать, что

$$\kappa_\rho^{-1} g_1(\alpha) \leq \dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{f, \alpha, \mathcal{A}}) \leq \kappa_\rho^{-1} g_2(\alpha). \quad (5.5)$$

Действительно, в силу (5.1) и леммы 5.3 из неравенств (5.5) вытекает, что

$$\dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{f, \alpha, \mathcal{A}}) = \kappa_\rho^{-1} h(\mu) = \kappa_\rho^{-1} [P(\langle \beta, f \rangle) + \langle \beta, \alpha \rangle],$$

и здесь можно заменить $\dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{f, \alpha, \mathcal{A}})$ на $\dim_\rho^H(X_{f, \alpha, \mathcal{A}})$ таким же точно образом, как мы перешли от (4.5), (4.6) к (4.2) в доказательстве утверждения (2) теоремы 4.2.

Поскольку $\alpha \in I_f$, существует мера $\mu \in \mathcal{J}$ с $\mu(f) = \alpha$. Фиксировав произвольное $\beta \in \mathbf{R}^m$, положим $\psi := \langle \beta, f \rangle$. Для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такой потенциал $\Phi_\varepsilon \in \mathfrak{F}$ и такую функцию $\psi_\varepsilon \in C(X, \mathbf{R})$, что $\|\psi_\varepsilon - \langle \beta, f \rangle\| \leq \varepsilon$ и $\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \in C^0$, где $\varphi_\varepsilon := \varphi^{\Phi_\varepsilon}$ (см. предложение 2.4). Пусть $\nu_\varepsilon \in \mathcal{E}(\varphi_\varepsilon)$. Тогда ν_ε — гиббсовская мера с потенциалом Φ_ε , и, используя обозначение $\mathfrak{S}_{\varphi, V}(x) := \sum_{t \in V} \varphi(\tau_t x)$, введенное в п. 2, мы имеем

$$\begin{aligned} |A_n|^{-1} [-\ln \nu_\varepsilon(C_{A_n}(x))] &= |A_n|^{-1} [-\ln \nu_\varepsilon(C_{A_n}(x)) - \mathfrak{S}_{\varphi_\varepsilon, A_n}(x)] \\ &+ |A_n|^{-1} [\mathfrak{S}_{\varphi_\varepsilon, A_n}(x) - \mathfrak{S}_{\psi_\varepsilon, A_n}(x)] + |A_n|^{-1} [\mathfrak{S}_{\psi_\varepsilon, A_n}(x) - \mathfrak{S}_{\langle \beta, f \rangle, A_n}(x)] \\ &+ |A_n|^{-1} \mathfrak{S}_{\langle \beta, f \rangle, A_n}(x), \quad x \in X, \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

При $n \rightarrow \infty$ первое и второе слагаемые в правой части (5.6) сходятся (равномерно по x) соответственно к $P(\varphi_\varepsilon)$ и 0 (см. предложения 2.3 и 2.5). Очевидно, норма (в $C(X, \mathbf{R})$) третьего слагаемого при каждом n не превосходит ε . Если $x \in X_{\langle \beta, f \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle, \mathcal{A}}$, то последнее слагаемое сходится к $\langle \beta, \alpha \rangle$. Следовательно, при $x \in X_{\langle \beta, f \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle, \mathcal{A}}$

$$\begin{aligned} -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n|^{-1} \ln \nu_\varepsilon(C_{A_n}(x)) &\leq P(\langle \beta, f \rangle) + \mu(\langle \beta, f \rangle) + 2\varepsilon \\ &= P(\langle \beta, f \rangle) + \langle \beta, \alpha \rangle + 2\varepsilon, \end{aligned} \quad (5.7)$$

и так как $X_{f, \alpha, \mathcal{A}} \subset X_{\langle \beta, f \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle, \mathcal{A}}$ для каждого $\beta \in \mathbf{R}^m$, (5.7) выполняется при всех $x \in X_{f, \alpha, \mathcal{A}}$. Теперь из п. (1) предложения 3.1, используя $\mathcal{A}$ -устойчивость ρ , получаем

$$\dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{f, \alpha, \mathcal{A}}) \leq \kappa_\rho^{-1} [P(\langle \beta, f \rangle) + \langle \beta, \alpha \rangle + 2\varepsilon], \quad \beta \in \mathbf{R}^m.$$

Поскольку ε и β произвольны, мы приходим к верхней оценке в (5.5). Чтобы получить нижнюю оценку, снова заметим, что если $\mu \in \mathcal{J}$ и $\mu(f) = \alpha$, то $X_{f, \alpha, \mathcal{A}} \supset X_{\mu, \mathcal{A}}$. Тогда по теореме 4.2

$$\dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{f, \alpha, \mathcal{A}}) \geq \dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{\mu, \mathcal{A}}) = \kappa_\rho^{-1} h(\mu) \geq \kappa_\rho^{-1} g_1(\alpha).$$

Таким образом, оба неравенства в (5.5) доказаны.

(2) В силу (2.1)

$$P(\langle \beta, f \rangle) = h(\mu) - \langle \beta, \alpha \rangle \geq h(\nu) - \nu(\langle \beta, f \rangle), \quad \nu \in \mathcal{J},$$

откуда следует, что $h(\mu) \geq h(\nu)$ для всех $\nu \in \mathcal{J}(f, \alpha)$. Значит, $h(\mu) = g_1(\alpha)$, и утверждение (2) вытекает из (1).

(3) В силу утверждения (1) и леммы 5.1 функция $\alpha \mapsto \dim_{\rho, \mathcal{A}}(X_{f, \alpha})$ вогнута на I_f ; отсюда вытекают остальные ее свойства, сформулированные в теореме (см., например, § 10 в [25]); в частности, ограничение этой функции на каждый отрезок прямой, лежащий в I_f , вогнуто и, значит, полунепрерывно снизу, а потому в силу леммы 5.2 непрерывно.

З а м е ч а н и е 5.1. Из утверждения (1) теоремы 5.1, вообще говоря, не вытекает, что $X_{f, \alpha, \mathcal{A}} \neq \emptyset$ при всяком $\alpha \in I_f$, так как вполне возможно, что $h(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \mathcal{J}(f, \alpha)$ (см. [15]). Поэтому равенство $M_{f, \mathcal{A}} = I_f$ (см. п. 1), гарантирующее непустоту $X_{f, \alpha, \mathcal{A}}$ при $\alpha \in I_f$, служит существенным дополнением к теореме 5.1.

Вместе с множествами $X_{f, \alpha, \mathcal{A}}$, фигурирующими в теореме 5.1, естественно рассмотреть (при фиксированных f и α) множество $Y_{f, \alpha, \mathcal{T}}$, состоящее из всех таких точек $x \in X$, что α является предельной точкой последовательности векторов $|T_n|^{-1} \sum_{t \in T_n} f(\tau_t x)$. Очевидно, $\dim_{\rho}^H(Y_{f, \alpha, \mathcal{T}}) \geq \dim_{\rho}^H(X_{f, \alpha, \mathcal{A}})$ при всех $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$. Рассуждения, аналогичные тем, которые привели к верхней оценке размерности в утверждении (1) теоремы 5.1, позволяют доказать следующее.

Предложение 5.1. Если $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$ и ρ — метрика, $\mathcal{T}$ -устойчивая на X , то для всякого $\alpha \in I_f$

$$\dim_{\rho}^H(Y_{f, \alpha, \mathcal{T}}) = \dim_{\rho}^H(X_{f, \alpha, \mathcal{T}}).$$

Теперь рассмотрим более подробно ситуацию, связанную с утверждением (2) теоремы 5.1. Здесь возникает естественный вопрос: каково, при заданном $\alpha \in E_f$, множество тех β и μ , для которых выполняется (5.4)? Удобно ввести некоторые новые обозначения. Для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$ положим

$$\hat{P}(\beta) = P(\langle \beta, f \rangle), \quad \mathcal{E}_{\alpha, \beta} = \mathcal{J}(f, \alpha) \cap \mathcal{E}(\langle \beta, f \rangle), \quad B_{\alpha} = \{\beta: \mathcal{E}_{\alpha, \beta} \neq \emptyset\}.$$

Из определения B_{α} непосредственно вытекает, что $\bigcup_{\alpha \in E_f} B_{\alpha} = \mathbb{R}^m$ и $B_{\alpha} \neq \emptyset$ для каждого $\alpha \in E_f$.

З а м е ч а н и е 5.2. Может случиться, что $|B_{\alpha}| > 1$ (например, если размерность пространства C_f равна $k < m$, то каждое непустое B_{α} содержит аффинное многообразие размерности $m - k$ и $\hat{P}(\beta) \equiv \text{const}$ на этом многообразии). Множество B_{α} замкнуто и выпукло, а функция $\hat{P}$ аффинна на B_{α} .

З а м е ч а н и е 5.3. Хорошо известно (см. [26], [9], [25]), что в некоторых случаях $|\mathcal{E}(\langle \beta, f \rangle)| > 1$, и если $\beta \in B_{\alpha}$, то $\mathcal{E}_{\alpha, \beta} = \mathcal{E}(\langle \beta, f \rangle)$ тогда и только тогда, когда функция $\hat{P}$ дифференцируема в точке β (в этом случае $\partial \hat{P}(\beta) = \{\nabla \hat{P}(\beta)\} = \{-\alpha\}$). В действительности возможна каждая из следующих двух ситуаций (для подходящих f , α и β):

(а) $|\mathcal{E}(\langle \beta, f \rangle)| > 1$, $\mathcal{E}_{\alpha, \beta} = \mathcal{E}(\langle \beta, f \rangle)$ и (б) $|\mathcal{E}(\langle \beta, f \rangle)| > 1$, $|\mathcal{E}_{\alpha, \beta}| = 1$. Наиболее популярный пример ситуации (а) — это модель Изинга в размерности 2 (см. [9, § 6.2]). В этом примере $d = 2$, $S = \{-1, 1\}$, $m = 1$ и $f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{|t|=1} x(0)x(t)$. Если $|\beta| > \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$, то существуют две различные меры μ_{β}^{-} , $\mu_{\beta}^{+} \in \mathcal{J}$ такие, что $\mathcal{E}(\beta f) = \{p\mu_{\beta}^{-} + q\mu_{\beta}^{+} : p \in [0, 1]\}$. При этом μ_{β}^{+} можно получить из μ_{β}^{-} преобразованием обращения спина, переводящим $x(t)$ в $-x(t)$ при всех $t \in T$. Из этого факта и инвариантности f относительно указанного преобразования вытекает, что $\mu(f)$ равно одному и тому же α (зависящему от β) для всех $\mu \in \mathcal{E}(\beta f)$. Примером ситуации (б) служит модель Поттса. Здесь $d \geq 2$, $S = \{1, \dots, N\}$, $m = 1$ и $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{|t|=1} \delta_{x(0), x(t)}$, где δ — символ Кронекера. Если N достаточно велико, то существует такое $\beta_N > 0$, что $\mathcal{E}(\beta_N f)$ — выпуклая оболочка эргодических мер $\mu_1, \dots, \mu_N, \mu_{N+1}$ с $\mu_i(f) = \mu_j(f)$ и $\mu_{N+1}(f) \neq \mu_i(f)$, $i, j \in \{1, \dots, N\}$ (см. § 12.3 в [9] и цитированную там литературу).

Следующее предложение дополняет теорему 5.1.

Предложение 5.2. Пусть выполняются условия теоремы 5.1 и $\alpha \in E_f$. Тогда

- (1) если $\beta \in B_{\alpha}$, $\mu \in \mathcal{E}_{\alpha, \beta}$, то выполняется (5.4);
- (2) если $\mu \in \mathcal{J}(f, \alpha)$ и $\dim_{\rho}^H(X_{f, \alpha, \mathcal{A}}) = h(\mu)/\kappa_{\rho}$, то $\mu \in \mathcal{E}_{\alpha, \beta}$ для некоторого $\beta \in B_{\alpha}$;
- (3) если $\dim_{\rho}^H(X_{f, \alpha, \mathcal{A}}) = \kappa_{\rho}^{-1}[P(\langle \beta, f \rangle) + \langle \beta, \alpha \rangle]$, то $\beta \in B_{\alpha}$.

Доказательство. Утверждение (1) совпадает с п. (2) теоремы 5.1. Предположим теперь, что для некоторой меры $\mu \in \mathcal{J}(f, \alpha)$ выполняется равенство $\dim_{\rho}^H(X_{f, \alpha, \mathcal{A}}) = h(\mu)/\kappa_{\rho}$. Из п. (2) теоремы 5.1 вытекает, что $h(\mu) = \max_{\nu \in \mathcal{J}(f, \alpha)} h(\nu)$. Поскольку $\alpha \in E_f$, найдутся такие $\beta_{\alpha} \in \mathbf{R}^m$ и $\mu_{\alpha} \in \mathcal{E}(\langle \beta_{\alpha}, f \rangle)$, что $\mu_{\alpha}(f) = \alpha$, т.е. $\mu_{\alpha} \in \mathcal{J}(f, \alpha)$. Тогда

$$h(\mu) - \mu(\langle \beta_{\alpha}, f \rangle) \geq h(\mu_{\alpha}) - \mu_{\alpha}(\langle \beta_{\alpha}, f \rangle) = P(\langle \beta_{\alpha}, f \rangle),$$

откуда следует, что $h(\mu) - \mu(\langle \beta_{\alpha}, f \rangle) = P(\langle \beta_{\alpha}, f \rangle)$ и $\mu \in \mathcal{E}(\langle \beta_{\alpha}, f \rangle)$. Ясно, что $\mu \in \mathcal{E}_{\alpha, \beta_{\alpha}}$, $\beta_{\alpha} \in B_{\alpha}$. Тем самым утверждение (2) доказано. Если при некотором β выполняется второе из равенств (5.4), то в силу (5.3) $P(\langle \beta, f \rangle) + \langle \beta, \alpha \rangle = h(\mu)$ для некоторой меры $\mu \in \mathcal{J}(f, \alpha)$. Последнее соотношение можно переписать в виде $P(\langle \beta, f \rangle) = h(\mu) - \mu(\langle \beta, f \rangle)$; это означает, что $\mu \in \mathcal{E}(\langle \beta, f \rangle)$ и, следовательно, $\mu \in \mathcal{E}_{\alpha, \beta}$. Тем самым мы пришли к утверждению (3). Предложение 5.2 доказано.

З а м е ч а н и е 5.4. Для $\Phi \in \mathfrak{F}$ и $\beta \in \mathbf{R}$ вариационный принцип Добрушина–Лэнфорда–Рюэля (в дальнейшем — ДЛР-вариационный принцип) утверждает, что трансляционно-инвариантные гиббсовские меры с потенциалом $\beta\Phi$ — это те меры $\mu \in \mathcal{J}$, которые максимизируют $h(\mu) - \mu(\beta\varphi^{\Phi})$. В связи с теоремой 5.1 имеет смысл обсудить

альтернативную форму вариационного принципа. Этот вариант широко распространен в физической литературе, и его иногда называют «теоремой Гиббса» (см., например, [17, § 7] и [18, гл. 4, § 5]). В соответствии с ним гиббсовские меры суть меры, максимизирующие энтропию при фиксированной энергии. При этом, по-видимому, имеются в виду меры на пространстве конфигураций в конечном «сосуде». Но этот «вариационный принцип Гиббса» можно сформулировать и для конфигураций на $\mathbf{Z}^d$ и сравнить его с ДЛР-вариационным принципом (под энергией, отвечающей потенциалу $\Phi \in \mathfrak{F}$ и мере μ , естественно понимать, как и в ДЛР-вариационном принципе, μ -среднюю локальную энергию $\mu(\varphi^\Phi)$). Таким образом, мы приходим к задаче максимизации энтропии $h(\mu)$ на множестве $\mathcal{S}(\varphi^\Phi, \alpha)$, где, разумеется, $\alpha \in I_{\varphi^*}$. Супремум энтропии $h(\mu)$ достигается, и из утверждения (1) теоремы 5.1 мы знаем, что он с точностью до множителя, зависящего от метрики ρ , равен $\dim_\rho^H(X_{\varphi^*, \alpha, \mathcal{S}})$. Кроме того, при $\Phi \in \mathfrak{F}$ и $\alpha \in E_{\varphi^*}$ п. (2) предложения 5.2 показывает, что если инвариантная мера μ удовлетворяет вариационному принципу Гиббса (т.е. если она максимизирует энтропию), то это — гиббсовская мера с подходящей «обратной температурой» β_α и, значит, она удовлетворяет ДЛР-вариационному принципу для потенциала $\beta_\alpha \Phi$; обратно, в силу (2.1) каждая гиббсовская мера с потенциалом $\beta \Phi$ удовлетворяет вариационному принципу для некоторого $\alpha \in E_f$. Если, однако, $\alpha \in I_{\varphi^*} \setminus E_{\varphi^*}$, то не существует гиббсовской меры с потенциалом $\beta \Phi$, $\beta \in \mathbf{R}$, удовлетворяющей вариационному принципу Гиббса; но тем не менее существует мера из $\mathcal{S}$, которая удовлетворяет этому принципу. Простейший пример таков: $X = \{1, -1\}^{\mathbf{Z}}$, $\Phi(V, x) = x(t)$, если $V = \{t\}$, $t \in T$, и $\Phi(V, x) = 0$, если $|V| > 1$. Легко проверить, что для всякого $\beta \in \mathbf{R}$ мера, удовлетворяющая ДЛР-вариационному принципу для потенциала $\beta \Phi$, — это нетривиальная бернуллиевская мера, в то время как для $\alpha \in \{-1, 1\} = I_\varphi \setminus E_\varphi$ вариационному принципу Гиббса удовлетворяют только δ -меры, сосредоточенные на постоянных конфигурациях $x \equiv -1$ и $x \equiv 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barreira L., Saussol B., Schmeling J. Higher-dimensional multifractal analysis. — J. Math. Pures Appl., 2002, v. 81, № 1, p. 67–91.
2. Besicovitch A. S. On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system. — Math. Ann., 1934, v. 110, p. 321–330.
3. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory. — Illinois J. Math., 1960, v. 4, p. 187–209.
4. Биллингслий П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969, 238 с.
5. Cajar H. Billingsley dimension in probability spaces. — Lecture Notes in Math., 1981, v. 892, p. 1–106.
6. Colebrook C. M. The Hausdorff dimension of certain sets of nonnormal numbers. — Michigan Math. J., 1970, v. 17, p. 103–106.
7. Eggleston H. G. The fractional dimension of a set defined by decimal properties. — Quart. J. Math. Oxford Ser., 1949, v. 20, p. 31–36.

8. Fan A.-H., Feng D.-J. On the distribution of long-term time averages on symbolic space. — J. Statist. Phys., 2000, v. 99, № 3/4, p. 813–856.
9. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы, М.: Мир, 1992, 624 с.
10. Gurevich B. M., Tempelman A. A. Hausdorff dimension and pressure in the DLR thermodynamic formalism. — On Dobrushin's Way. From Probability Theory to Statistical Physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000, p. 91–107.
11. Gurevich B. M., Tempelman A. A. Hausdorff dimension of sets of generic points for Gibbs measures. — J. Statist. Phys., 2002, v. 108, № 5/6, p. 1281–1301.
12. Гуревич Б. М., Темпельман А. А. О множествах временных и пространственных средних для непрерывных функций на пространстве конфигураций. — Успехи матем. наук, 2003, т. 58, № 2, с. 161–162.
13. Gurevich B. M., Tempelman A. A. Markov approximation of homogeneous lattice random fields. — Probab. Theory Related Fields, 2005, v. 131, № 4, p. 519–527.
14. Gurevich B. M., Tempelman A. A. A Breiman type theorem for Gibbs measures. — J. Dynam. Control Systems (to appear).
15. Gurevich B. M., Tempelman A. A. Three types of means for continuous vector functions on the phase space of a dynamical system. — Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).
16. Хуанг К. Статистическая механика. М.: Мир, 1966, 520 с.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964, 568 с.
18. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982, 608 с.
19. Olivier E. Analyse multifractale de fonctions continues. C.R. Acad. Sci. Paris, 1998, v. 326, № 10, p. 1171–1174.
20. Olivier E. Dimension de Billingsley d'ensembles saturés. — C.R. Acad. Sci. Paris, 1999, v. 328, № 1, p. 13–16.
21. Olivier E. Multifractal analysis in symbolic dynamics and distribution of pointwise dimension for g -measures. — Nonlinearity, 1999, v. 12, № 6, p. 1571–1585.
22. Olsen L., Winter S. Multifractal analysis of divergence points of deformed measure theoretical Birkhoff averages. II. — Preprint. University of St Andrews, 2001.
23. Песин Я. Б. Теория размерности и динамические системы. М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002, 403 с.
24. Pesin Ya., Weiss H. The multifractal analysis of Birkhoff averages and large deviations. — Global Analysis of Dynamical Systems, Inst. Phys., Bristol, 2001, p. 419–431.
25. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.
26. Рюэль Д. Термодинамический формализм. М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002, 288 с.
27. Sigmund K. On dynamical systems with the specification property. — Trans. Amer. Math. Soc., 1974, v. 190, p. 285–299.
28. Синай Я. Г. Гиббсовские меры в эргодической теории. — Успехи матем. наук, 1972, т. 27, № 4, с. 21–64.
29. Takens F., Verbitski E. Multifractal analysis of local entropies for expansive homeomorphisms with specification. — Comm. Math. Phys., 1999, v. 203, № 3, p. 593–612.
30. Takens F., Verbitski E. On the variational principle for the topological entropy of certain non-compact sets. — Ergodic Theory Dynam. Systems, 2003, v. 23, № 1, p. 317–348.
31. Темпельман А. А. Размерность случайных последовательностей и случайных фракталов в метрических пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, в. 44, № 3, с. 589–616.
32. Tempelman A. A. Multifractal analysis of ergodic averages: a generalization of Eggleston's theorem. — J. Dynam. Control Systems, 2001, v. 7, № 4, p. 535–551.
33. Tempelman A. Ergodic Theorems for Group Actions. Dordrecht: Kluwer, 1992, 399 p.
34. Volkmann B. Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. VI. — Math. Z., 1958, v. 68, p. 439–449.

Поступила в редакцию
23.XI.2005