Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. П. Виноградов, Вероятность разорения страховой компании в случае, когда интервалы между моментами выплат имеют неодинаковые показательные распределения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 2, 352–357

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:47:53

© 1998 г.

ВИНОГРАДОВ О. П.*

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В СЛУЧАЕ, КОГДА ИНТЕРВАЛЫ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ВЫПЛАТ ИМЕЮТ НЕОДИНАКОВЫЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ¹⁾

Рассматривается задача нахождения вероятности разорения страховой компании в случае, когда интервалы между выплатами имеют неодинаковые показательные распределения, а величины выплат одинаково распределены и также имеют показательные распределения. В качестве частных случаев рассмотрены случаи, когда величины выплат неодинаково распределены и имеют эрланговские распределения, а также когда моменты выплат являются порядковыми статистиками выборки из показательного распределения. Полученные результаты могут найти применение в теории массового обслуживания.

Ключевые слова и фразы: теория риска, теория массового обслуживания, вероятность разорения, двухиндексная последовательность.

1. Введение. В актуарной математике хорошо известна задача нахождения вероятности разорения страховой компании. Этой задаче посвящена огромная литература (достаточно полный список литературы можно найти, например, в [1]).

Предположим, что $x > 0$ — начальный капитал страховой компании, $S(t)$ — суммарный размер премий, внесенных клиентами за время $[0, t]$. Пусть $T_1, T_2, \dots$ — моменты страховых выплат ($0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$), Z_i — размер выплаты в момент T_i , $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$, $\Delta_1 = T_1$, $i \geq 1$. Процесс риска $X(t)$ определяется равенством

$$X(t) = x + S(t) - \sum_{j \leq N(t)} Z_j,$$

где $N(t) = \max\{i: T_i \leq t\}$ — число выплат компании в интервале времени $[0, t]$. Момент разорения определяется равенством

$$\tau = \inf\{t: X(t) < 0\}.$$

Величина $\psi(x) = P\{\tau < \infty \mid X(0) = x\}$ называется вероятностью разорения.

Мы будем предполагать, что последовательности $\{Z_i\}$ и $\{\Delta_i\}$ независимы и состоят из независимых случайных величин. Процесс $S(t)$ линейно растет на каждом из интервалов Δ_i с угловым коэффициентом $c_i \geq 0$. Пусть величины Z_i одинаково распределены с функцией распределения $1 - e^{-x}$, а величины Δ_i также имеют показательное распределение с параметром δ_i . Пусть $R(x) = 1 - \psi(x)$ — вероятность неразорения страховой компании.

В работе найдена формула для вероятности разорения $\psi(x)$. Полученный результат позволяет найти $\psi(x)$ в случае, когда последовательные моменты выплат являются порядковыми статистиками в выборке из показательного распределения; он дает возможность рассмотреть случай, когда величины Z_i неодинаково распределены и имеют эрлановские распределения, а также получить некоторые результаты относительно времени ожидания в одной системе массового обслуживания.

*Механико-математический факультет, МГУ, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке «The Society of Actuaries Committee on Knowledge Extension Research (CKER)».

2. Основные результаты. Для нахождения вероятности $R(x)$ и, значит, вероятности $\psi(x)$ предположим сначала, что количество страховых выплат конечно и равно n . Тем самым, новый процесс риска отличается от первоначального только числом выплат, а остальные предположения о величинах $\Delta_i, Z_i, c_i, 1 \leq i \leq n$, остаются прежними.

Пусть $\psi_n(x)$ и $R_n(x)$ — соответственно вероятности разорения и неразорения в этом процессе риска с конечным числом выплат. Очевидно, что

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x), \quad R(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x). \quad (1)$$

Будем иметь в виду, что

$$\psi_n(x) = \psi_n(x, \delta_1, c_1, \delta_2, c_2, \dots, \delta_n, c_n). \quad (2)$$

Сделаем в последовательностях $\{\delta_i\}$ и $\{c_i\}$, $i = 1, \dots, n$, перестановку $\delta_i \rightarrow \delta_{n-i+1}$ и $c_i \rightarrow c_{n-i+1}$. После такой перестановки интервал времени до первой выплаты будет иметь показательное распределение с параметром δ_n , а угловой коэффициент роста капитала на этом интервале будет равен c_n . Интервал времени между второй и первой выплатой, соответственно, будет иметь показательное распределение с параметром δ_{n-1} , а соответствующий угловой коэффициент будет равен c_{n-1} и т.д. Обозначим через $\tilde{\psi}_n(x)$ и $\tilde{R}_n(x)$ вероятности разорения и неразорения для «переставленного» процесса риска. Очевидно, что из (2) следует, что

$$\tilde{\psi}_n(x) = \psi_n(x, \delta_n, c_n, \delta_{n-1}, c_{n-1}, \dots, \delta_1, c_1).$$

Таким образом, если найдено явное выражение для $\tilde{R}_n(x)$ и $\tilde{\psi}_n(x)$, то заменив индексы входящих в это выражение величин согласно перестановке $i \rightarrow n - i + 1$, мы получим выражение для $R_n(x)$ и $\psi_n(x)$ и, значит, для $R(x)$ и $\psi(x)$ (см. (1)).

Нетрудно видеть, что для всех $i = 1, \dots, n$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\tilde{R}_i(x) = \delta_i \int_0^\infty e^{-\delta_i y} \left[\int_0^{x+c_i y} \tilde{R}_{i-1}(x + c_i y - z) e^{-z} dz \right] dy,$$

причем $\tilde{R}_0(x) = 1$.

Полагая $x + c_i y = u$, приведем эти равенства к виду

$$\tilde{R}_i(x) = \beta_i e^{\beta_i x} \int_x^\infty e^{-\beta_i u} \left[\int_0^u \tilde{R}_{i-1}(u - z) e^{-z} dz \right] du, \quad (3)$$

где $\beta_i = \delta_i / c_i$.

Найти функции $\tilde{\psi}_i(x) = 1 - \tilde{R}_i(x)$, вероятности разорения, из этих соотношений можно различными способами. На наш взгляд, предложенный ниже подход является одним из наиболее простых.

Положим $\tilde{\psi}_i(x) = \lambda_i e^{-x} \alpha_i(x)$, где $\lambda_i = \beta_i / (1 + \beta_i)$. Из (3) следует, что функции $\alpha_i(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_i(x) = 1 + \lambda_{i-1} \int_0^x \alpha_{i-1}(z) dz + \lambda_{i-1} e^{x/a_i} \int_x^\infty e^{-z/a_i} \alpha_{i-1}(z) dz, \quad (4)$$

где $\beta_0 = \lambda_0 = 0$, $a_i = (1 + \beta_i)^{-1}$, $\alpha_0(x) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Легко видеть, что для любого положительного b и всех целых неотрицательных k имеет место равенство

$$e^{x/b} \int_x^\infty e^{-x/b} x^k dx = k! \sum_{j=0}^k \frac{x_j b^{k-j+1}}{j!}. \quad (5)$$

Поэтому из (4) следует, что $\alpha_i(x)$ является многочленом степени $i-1$.

Будем искать $\alpha_i(x)$ в виде

$$\alpha_i(x) = \sum_{k=0}^{i-1} \tilde{A}_i(k) x^k. \quad (6)$$

Таким образом, $\tilde{A}_i(k) = 0$ при $k \geq i$. Подставляя (6) в (4) и учитывая (5), получаем, что для $i = 1, \dots, n$ справедливы равенства:

$$\tilde{A}_i(0) = 1 + \lambda_{i-1} \sum_{l=0}^{i-2} l! \alpha_i^{l+1} \tilde{A}_{i-1}(l), \quad (7)$$

$$\tilde{A}_i(k) = \frac{\lambda_{i-1}}{\alpha_i^k k!} \sum_{l=k-1}^{i-2} l! \alpha_i^{l+1} \tilde{A}_{i-1}(l) \quad (8)$$

для $k = 1, \dots, i-2$ и

$$\tilde{A}_i(i-1) = \lambda_{i-1} \frac{\tilde{A}_{i-1}(i-2)}{i-1}. \quad (9)$$

Для того, чтобы найти явное выражение для членов двухиндексной последовательности $\{\tilde{A}_i(k)\}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 0, \dots, i-1$, приведем соотношения (7)–(9) к более простому виду. Соотношение (8) для $k = 1$ принимает вид

$$\tilde{A}_i(1) = \frac{\lambda_{i-1}}{\alpha_i} \sum_{l=0}^{i-2} l! \alpha_i^{l+1} \tilde{A}_{i-1}(l).$$

Поэтому из (7) следует равенство

$$\tilde{A}_i(0) = 1 + a_i \tilde{A}_i(1). \quad (10)$$

Аналогично, если $k < i-2$, то из (8) следует, что

$$\tilde{A}_i(k+1) = \frac{\lambda_{i-1}}{(k+1)! \alpha_i^{k+1}} \left[\sum_{l=k-1}^{i-2} l! \alpha_i^{l+1} \tilde{A}_{i-1}(l) - (k-1)! a_i^k \tilde{A}_{i-1}(k-1) \right].$$

Отсюда и из (8) получаем, что для $0 < k < i-1$

$$\tilde{A}_i(k) = (k+1) a_i \tilde{A}_i(k+1) + \frac{\lambda_{i-1}}{k} \tilde{A}_{i-1}(k-1). \quad (11)$$

Таким образом, мы доказали, что двухиндексная последовательность $\{\tilde{A}_i(k)\}$ удовлетворяет соотношениям (9)–(11).

Положим для $k > 0$

$$\tilde{A}_i(k) = \frac{\lambda_{i-k} \lambda_{i-k+1} \cdots \lambda_{i-1}}{k!} \tilde{B}_i(k), \quad \tilde{A}_i(0) = \tilde{B}_i(0).$$

Тогда соотношения (9)–(11) примут вид

$$\tilde{B}_i(0) = 1 + a_i \lambda_{i-1} \tilde{B}_i(1), \quad (12)$$

$$\tilde{B}_i(k) = a_i \lambda_{i-k-1} \tilde{B}_i(k+1) + \tilde{B}_{i-1}(k-1) \quad (13)$$

для $0 < k < i-1$ и

$$\tilde{B}_i(i-1) = \tilde{B}_{i-1}(i-2). \quad (14)$$

Так как $\alpha_0(x) = 0$, то в силу (4) получаем, что $\alpha_1(x) = 1$. Поэтому

$$\tilde{B}_1(0) = 1. \quad (15)$$

Покажем, что равенства (12)–(15) однозначно определяют двухиндексную последовательность $\{\tilde{B}_i(k)\}$ и, значит, двухиндексную последовательность $\{\tilde{A}_i(k)\}$. Действительно, из (14) и (15) следует, что для $i = 1, \dots, n$ справедливо равенство

$$\tilde{B}_i(i-1) = 1. \quad (16)$$

Полагая в равенстве (13) $k = i-2$ и используя (16), легко получить, что для $1 < i \leq n$ справедливо равенство

$$\tilde{B}_i(i-2) = 1 + \lambda_1 \sum_{l=2}^i a_l. \quad (17)$$

Используя (13) и (17), аналогичными рассуждениями можно получить явное выражение для $\tilde{B}_i(i-3)$, если $2 < i < n+1$. Действуя аналогично, получаем явное выражение для $\tilde{B}_i(k)$, $i = 1, \dots, n+1$, $k = 0, \dots, i-1$. Тем самым показано, что равенства (12)–(15) однозначно определяют двухиндексную последовательность $\{\tilde{B}_i(k)\}$.

При помощи элементарных выкладок можно проверить, что последовательность

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i(k) = & 1 + \lambda_{i-k-1} \sum_{l=i-k}^i a_l + \lambda_{i-k-2} \lambda_{i-k-1} \sum_{l_1=i-k}^i \sum_{l_2=i-k-1}^{l_1} a_{l_1} a_{l_2} \\ & + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-k-1} \sum_{l_1=i-k}^i \sum_{l_2=i-k-1}^{l_1} \dots \sum_{l_{i-k-1}=2}^{l_{i-k-2}} a_{l_1} a_{l_2} \dots a_{l_{i-k-1}}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\lambda_p = 0$ при $p \leq 0$, удовлетворяет соотношениям (12)–(15) с $1 \leq i \leq n$, $0 \leq k \leq i-1$. Таким образом, доказана

Теорема 1. Для $n \geq 1$ справедливо равенство

$$\tilde{\psi}_n(x) = e^{-x} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{n-k} \lambda_{n-k+1} \dots \lambda_n}{k!} \tilde{B}_n(k) x^k \right],$$

где $\tilde{B}_n(k)$ задаются равенствами (18), в которых нужно положить $i = n$.

Сделав перестановку индексов $i \rightarrow n-i+1$ из теоремы 1 мы получим следующую теорему.

Теорема 2. Для $n \geq 1$ справедливо равенство

$$\psi_n(x) = e^{-x} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_1 \dots \lambda_{k+1}}{k!} B_n(k) x^k \right],$$

где

$$\begin{aligned} B_n(k) = & 1 + \lambda_{k+2} \sum_{l=1}^{k+1} a_l + \lambda_{k+2} \lambda_{k+3} \sum_{l_1=1}^{k+1} \sum_{l_2=l_1}^{k+2} a_{l_1} a_{l_2} \\ & + \dots + \lambda_{k+2} \dots \lambda_n \sum_{l_1=1}^{k+1} \sum_{l_2=l_1}^{k+2} \dots \sum_{l_{n-k-1}=l_{n-k-2}}^{n-1} a_{l_1} a_{l_2} \dots a_{l_{n-k-1}}, \end{aligned}$$

$\lambda_p = 0$, если $p > n$.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что

$$R_n(x) = \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k (Z_i - c_i \Delta_i) < x \right\}, \quad (19)$$

$$\tilde{R}_n(x) = \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k (Z_{n-i+1} - c_{n-i+1} \Delta_{n-i+1}) < x \right\}. \quad (20)$$

Из этих равенств, теорем 1 и 2 нетрудно получить формулы для вероятности разорения в случае, когда величины выплат имеют показательное распределение с параметром отличным от 1.

Следствие 1. Из теорем 1, 2 и замечания 1 вытекает, что явные выражения для $R_n(x)$ и $\psi_n(x)$ можно получить также в случае, когда величины Z_i независимы и имеют разные распределения, а именно, их плотность равна $a^{k_i+1} x^{k_i} e^{-ax} / k_i!$ (распределение Эрланга).

Это утверждение непосредственно следует из соотношений (19), (20) и замечания 1, если положить некоторые c_i равными нулю. Например, если $c_2 = 0$ и $c_1 c_3 \neq 0$, то получим выражение для вероятности разорения в процессе риска, в котором плотность распределения величины первого иска равна $a^2 x e^{-ax}$.

З а м е ч а н и е 2. Полученные результаты дают возможность рассмотреть одну модель теории риска, предложенную в [2, с. 41]. Пусть имеется n клиентов страховой компании, принадлежащих одной страховой группе. Промежутки времени до первого несчастного случая для отдельных представителей этой группы можно рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения $G(x)$. Сообщения о несчастных случаях (или иски) поступают в страховую компанию в порядке возрастания этих промежутков времени. Короче говоря, моменты поступления исков являются порядковыми статистиками выборки объема n из распределения $G(x)$. Известно [2], что если $G(x)$ непрерывна, то промежутки времени между поступлениями исков независимы тогда и только тогда, когда $G(x) = 1 - e^{-\delta x}$, причем в этом случае интервалы времени между i -м и $(i-1)$ -м иском имеют показательное распределение с параметром $(n-i+1)\delta$. В этом случае применима теорема 1, если положить $\delta_i = i\delta$ и сохранить остальные условия этой теоремы.

З а м е ч а н и е 3. Пусть в однолинейной системе массового обслуживания W_n — время ожидания n -го требования. Тогда (см., например, [3]) справедливо равенство

$$W_{n+1} = \max_{1 \leq k \leq n} \left(0, \sum_{i=1}^k (T_i - Y_i) \right), \quad (21)$$

где T_i — время обслуживания i -го требования, а Y_i — интервал времени между моментами поступления $(i+1)$ -го и i -го требований в систему. Из сравнения (20) и (21) получаем, что если положить

$$Y_i = c_i \Delta_i, \quad Z_i = T_i, \quad (22)$$

то $R_n(x) = P\{W_{n+1} < x\}$. Из этого равенства и предыдущих результатов можно найти распределение времени ожидания произвольного требования при предположениях, вытекающих из равенства (22). А именно, интервалы между поступающими требованиями в систему независимы и имеют показательное распределение с разными параметрами, а времена обслуживания разных требований одинаково распределены, независимы и имеют показательное распределение. Обобщение этого результата на случай разнораспределенных времен обслуживания, имеющих эрланговские распределения, можно получить, используя следствие 1.

З а м е ч а н и е 4. В нашей модели интервалы между выплатами независимы и имеют показательное распределение. На первый взгляд, эти предположения являются очень ограничительными. Однако, если предположить, что $\{\delta_i\}$ и $\{c_i\}$ являются случайными, то мы можем рассмотреть случай зависимых интервалов, которые имеют распределения отличные от показательного.

З а м е ч а н и е 5. Обычно рассматриваются модели, в которых приращение математического ожидания капитала между моментами выплат является положительным. В нашей модели это означает, что $c_i > \delta_i$ для всех i . Если же для некоторого i это неравенство не выполнено, то говорят, что i -я выплата является большой

выплатой. Большие выплаты возникают в результате крупных аварий, стихийных бедствий и т.д. и могут привести к разорению страховых компаний. Поэтому модели, которые учитывают большие выплаты, представляют значительный интерес в актуарной математике. Из следствия 1 вытекает, что наша модель может учитывать возможность, когда некоторые из выплат являются большими.

З а м е ч а н и е 6. Известно [4], что функцию распределения произвольной неотрицательной случайной величины с любой точностью можно аппроксимировать в смысле расстояния Леви смесью распределений Эрланга. Этот результат дает возможность в нашей модели приближенно вычислять вероятность разорения, если величины выплат имеют произвольное распределение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калашников В. В., Константи́дис Д. Вероятность разорения. — Фундаментальная и прикладная математика, 1996, т. 2, № 4, с. 1055–1100.
2. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
4. Коваленко И. Н., Филиппова А. А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1982, 256 с.

Поступила в редакцию

22.III.1997

© 1998 г.

ДАРХОВСКИЙ Б. С.*

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ¹⁾

Рассматривается задача восстановления (минимаксного оценивания) линейного функционала при наличии случайных ошибок в наблюдениях. Получена оценка потери качества при использовании линейных методов восстановления. Предлагается также новая формализация содержательной задачи восстановления при случайных ошибках в информации, которая дает возможность во многих случаях эффективно находить оптимальное решение без перехода к асимптотике по шуму.

Ключевые слова и фразы: минимаксное оценивание, восстановление линейного функционала.

1. Пусть X — линейное нормированное пространство, X' — его сопряженное, $W \subset X$ — выпуклое, центрально-симметричное множество, $x' \in X'$, $\langle x', x \rangle$ — значение линейного функционала на элементе x . Пусть Y — линейное нормированное

*Институт системного анализа РАН, пр. 60-летия Октября, 9, 117312 Москва, Россия.

¹⁾Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 98-01-00962.