Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, Э. Л. Пресман, О законе повторного логарифма в одной задаче управления, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 2, 364–369

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1472>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:21:45

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трауб Дж., Вожняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983, 382 с.
2. Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery. — Optimal Estimation in Approximation Theory. Ed. by C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, New York: Plenum Press, 1977, p. 1–54.

Поступила в редакцию

17.IV.1997

© 1998 г.

НАГАЕВ С. В.*, ПРЕСМАН Э. Л.**

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА
В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ¹⁾

Изучается предельное поведение функционала от винеровского процесса и от произвольной абсолютно непрерывной адаптированной функции. Такого рода функционал возникает в задаче оптимального управления линейно-квадратичным регулятором, возмущенным белым шумом. Приводимые результаты позволяют доказать неувлучшаемость полученной в [1] оценки качества управления и понять некоторые явления, связанные с законом повторного логарифма.

Ключевые слова и фразы: линейно-квадратичный регулятор, закон повторного логарифма, оптимальное управление, винеровский процесс.

Рассмотрим функцию

$$H_t(y) = \frac{2w_t y_t}{\sqrt{t+1}} - \int_0^t \left(\frac{y_s^2}{s+1} + 4(s+1) \dot{y}_s^2 \right) ds, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $w = \{w_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс, $y = \{y_t, t \geq 0\}$ — такая произвольная адаптированная абсолютно непрерывная функция, что $y_0 = 0$. Класс всех таких функций обозначим $\mathcal{Y}$, а подкласс, состоящий из детерминированных функций, $\mathcal{Y}_d$.

Функция $H_t(y)$ возникает в задаче управления линейно-квадратичным регулятором, возмущенным белым шумом (см. [1, (22)] и [2]). Рассмотрим, например, управляемую систему $dx_t = \frac{1}{2}u_t dt + d\tilde{w}_t$, $x_0 = x$, где $\tilde{w} = \{\tilde{w}_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс, связанный с винеровским процессом w соотношением $w_t = \int_0^{ln(t+1)} e^{s/2} d\tilde{w}_s$, а $u = \{u_t, t \geq 0\}$ — управление, т.е. такая неупреждающая (например, по отношению к $\tilde{w}$) случайная функция, что существует решение соответствующего уравнения. Рассмотрим функционал $J_{x,T}(u)$, который каждому управлению u при фиксированном горизонте управления T ставит в соответствие случайную величину $J_{x,T}(u) = \int_0^T (x_t^2 + u_t^2) dt$. Оказывается (см. [1] и [2]), что траектория $\hat{x}_t$, отвечающая управлению $\hat{u}_t = -\hat{x}_t$, во многих смыслах оптимальна на бесконечном интервале времени, в частности поведение при $T \rightarrow \infty$ величины $\Delta_{x,T}(u) = J_{x,T}(\hat{u}) - J_{x,T}(u)$ можно

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Университетский пр., 4, 630090 Новосибирск, Россия.

**ЦЭМИ РАН, Нахимовский проспект, 47, 117418 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 96-01-01529 и 97-01-00684.

рассматривать, как показатель качества управления u гораздо более сильный, чем классическое ожидаемое среднее значение за единицу времени. Как показано в [1], поведение $\Delta_{x,T}(u)$ эквивалентно поведению величины $H_{eT-1}(y)$ при $T \rightarrow \infty$, где $2(1+t)\dot{y}_t = u_{\ln(t+1)} - \hat{u}_{\ln(t+1)}$.

В общем многомерном случае линейно-квадратичного регулятора с переменными коэффициентами при весьма общих предположениях было показано (см. [1]), что величина, соответствующая $\Delta_{x,T}(u)$, не может возрастать быстрее чем $\ln T$. Из приведенного ниже результата вытекает, что указанная оценка не может быть улучшена.

Теорема. (i) Для любой функции $y \in \mathcal{U}$

$$L(y) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H_t(y)}{\ln \ln t} \leq 1 \quad \text{п.н.}$$

(ii) Существует такая адаптированная по отношению к w функция $y^* \in \mathcal{U}$, что $L(y^*) \geq 1/(1+\sqrt{2})^2$ п.н.

(iii) Если $y \in \mathcal{U}_d$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w_t y_t}{\sqrt{t+1}} \left[\int_0^t \left(\frac{y_s^2}{s+1} + 4(s+1) \dot{y}_s^2 \right) ds \right]^{-1} = 0 \quad \text{п.н.,}$$

и поэтому $\limsup_{t \rightarrow \infty} H_t(y) \leq 0$ п.н.

Доказательство. Пользуясь элементарным неравенством $2ab \leq a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbf{R}$, имеем

$$2y_t^2 = \int_0^t 4y_s \dot{y}_s ds \leq \int_0^t \left(\frac{y_s^2}{s+1} + 4(s+1) \dot{y}_s^2 \right) ds. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$H_t(y) \leq \frac{w_t^2}{2(t+1)}, \quad (3)$$

и из свойства винеровского процесса вытекает утверждение (i). Основной вопрос состоит в следующем. Можно ли построить такую функцию y , что $\sup_{0 \leq s \leq t} H_s(y)$ возрастает со скоростью $\ln \ln t$?

Прежде чем доказывать утверждения (ii) и (iii) приведем ряд эвристических рассуждений. Предположим, что мы построили такую функцию y_t^* , что для некоторой константы $c_0 > 0$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H_t(y^*)}{\ln \ln t} \geq c_0^2 \quad \text{п.н.} \quad (4)$$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ рассмотрим случайное множество

$$B^* = \{t: H_t(y^*) > (1-\varepsilon)^2 c_0^2 \ln \ln t\}.$$

Учитывая (2) и тот факт, что $H_t(y^*) > 0$ для $t \in B^*$, получаем, что

$$|y_t^*| < \frac{|w_t|}{\sqrt{t+1}} \quad \text{и} \quad \text{sign } y_t = \text{sign } w_t \quad \text{для } t \in B^*.$$

Используя то, что

$$w_t < (1+\varepsilon_1) \sqrt{2(t+1) \ln \ln t} \quad \text{для } t > t_1,$$

где $t_1 = t_1(\varepsilon_1)$ зависит от элементарного события, и тот факт, что

$$\frac{2w_t y_t^*}{\sqrt{t+1}} > (1-\varepsilon)^2 c_0^2 \ln \ln t \quad \text{для } t \in B^*$$

получаем, что

$$\frac{(1-\varepsilon)^2 c_0^2 \sqrt{2 \ln \ln t}}{4(1+\varepsilon_1)} \leq |y_t| \leq (1+\varepsilon_1) \sqrt{2 \ln \ln t} \quad (5)$$

для $y = y^*$, $t \in B^*$, $t > t_1$. Аналогично для тех же y и t имеем

$$\frac{(1-\varepsilon)^4 c_0^4 \ln \ln t}{4(1+\varepsilon_1)^2} \leq \int_0^t \left(\frac{y_s^2}{s+1} + 4(s+1)y_s^2 \right) ds \leq (1+\varepsilon_1)^2 4 \ln \ln t. \quad (6)$$

Из (3) следует, что для $t \in B^*$

$$\frac{w_t}{\sqrt{t+1}} > (1-\varepsilon) c_0 \sqrt{2 \ln \ln t}. \quad (7)$$

Для произвольной функции $y \in \mathcal{Y}$ обозначим $B(y)$ множество тех t , для которых выполняются соотношения (5) и (6). Интуитивно понятно (и это вытекает из приводимой ниже леммы 2), что, если множество $B(y)$ имеет компоненты в любом интервале вида (t, ∞) , то такие компоненты должны встречаться очень редко.

Если функция y детерминированная, то вопрос о выполнении соотношения (4) сводится к тому, можно ли выбрать ее так, чтобы пересечение множества $B(y)$ с тем множеством, где выполняется (7), было неограниченным. Если абсолютно непрерывная функция y случайна, то она может «отслеживать» значения винеровского процесса w , но, в силу абсолютной непрерывности, такое «отслеживание» может происходить только с некоторым запаздыванием, и вопрос сводится к тому, можно ли сделать соответствующее запаздывание достаточно малым, чтобы пересечение множества $B(y)$ с тем множеством, где выполняется (7), было неограниченным. Утверждения (ii) и (iii) дают, соответственно, положительный ответ на второй вопрос и отрицательный — на первый. Перейдем к доказательству этих утверждений.

Доказательство утверждения (ii). Пусть $A > 1$, $0 < \varepsilon < 1$, $n_k = A^k$, $k = 1, 2, \dots$. Если A достаточно велико, то (см. [3], с. 89–90) для почти всех траекторий винеровского процесса w_t осуществляется бесконечно много событий

$$B_k = \left\{ w_{n_k} > (1-\varepsilon) \sqrt{2 n_k \ln \ln n_k} \right\}.$$

Поэтому можно выбрать последовательность $\{m_j(\omega)\}_{j=1}^\infty$ так, чтобы $m_j(\omega) = n_{k_j(\omega)}$,

$$w_{m_j(\omega)} > (1-\varepsilon) \sqrt{2 m_j(\omega) \ln \ln m_j(\omega)}, \quad (8)$$

$$\ln \ln m_{j+1}(\omega) > (j+1)^2 \sum_{l=1}^j \ln \ln m_l(\omega) > (j+1)^2, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

при этом очевидно, что $m_j(\omega)$ являются строго марковскими моментами. В дальнейшем вместо $m_j(\omega)$ мы, как правило, будем писать просто m_j .

Положим $m'_j = b m_j + b - 1$, $m''_j = b^2 m_j + b^2 - 1$, и определим функцию $y_t^*(\omega)$ следующим образом:

$$y_t^*(\omega) = \begin{cases} V \left(\sqrt{\frac{t+1}{m_j+1}} \right) \frac{c \sqrt{\ln \ln m_j}}{V(\sqrt{b})} & \text{для } m_j \leq t \leq m'_j, \quad j = 1, 2, \dots, \\ V \left(\sqrt{\frac{t+1}{m''_j+1}} \right) \frac{c \sqrt{\ln \ln m_j}}{V(1/\sqrt{b})} & \text{для } m'_j \leq t \leq m''_j, \quad j = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{для всех других } t, \end{cases} \quad (10)$$

где $V(x) = x - 1/x$, константа $c > 0$ будет выбрана позже, а $b = 1 + \sqrt{2}$. Из (9) следует, что $m''_j < m_{j+1}$, а значит функция $y_t^*(\omega)$ определена однозначно. Согласно

определению функция $y_t^*(\omega)$ непрерывна и

$$0 < y_t^*(\omega) < y_{m_j'}^*(\omega) = c\sqrt{\ln \ln m_j} \quad \text{для } m_j < t < m_j'', \quad t \neq m_j', \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \int_{m_j}^{m_j'} \left(\frac{(y_s^*)^2}{s+1} + 4(s+1)(\dot{y}_s^*)^2 \right) ds \\ &= \frac{c^2 \ln \ln m_j}{V^2(\sqrt{b})} \int_1^b \left[s + \frac{1}{s} - 2 + s \left(1 + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} \right) \right] \frac{ds}{s} \\ &= \frac{2bc^2 \ln \ln m_j}{(b-1)^2} \int_1^b \left[1 + \frac{1}{s^2} \right] ds = 2 \frac{b+1}{b-1} c^2 \ln \ln m_j. \end{aligned} \quad (12)$$

Тот же результат получается при интегрировании от m_j' до m_j'' . Отсюда и из (9) следует, что

$$\int_0^{m_j'} \left(\frac{(y_s^*)^2}{s+1} + 4(s+1)(\dot{y}_s^*)^2 \right) ds \leq \left(1 + \frac{2}{j^2} \right) 2 \frac{b+1}{b-1} c^2 \ln \ln m_j. \quad (13)$$

Используя (1), (11) и (13) получаем, что с вероятностью единица

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H_t(y)}{\ln \ln t} \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{H_{m_j'}(y)}{\ln \ln m_j'} \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{2w_{m_j'}c}{(bm_j \ln \ln m_j)^{1/2}} - 2 \frac{b+1}{b-1} c^2. \quad (14)$$

Заметим, что из свойства винеровского процесса, строгой марковости моментов m_j и (9) вытекает, что

$$P \left\{ \frac{w_{m_j'} - w_{m_j}}{\sqrt{2m_j \ln \ln m_j}} < -\varepsilon \mid m_j \right\} = \Phi \left(-\varepsilon \sqrt{\frac{2m_j \ln \ln m_j}{m_j + 1}} \right) < \Phi(-\varepsilon j), \quad (15)$$

где $\Phi(x)$ — стандартное нормальное распределение.

Поскольку правая часть (15) не зависит от m_j , соответствующее неравенство верно и для безусловной вероятности, т.е.

$$P \left\{ w_{m_j'} - w_{m_j} < -\varepsilon \sqrt{2m_j \ln \ln m_j} \right\} < \Phi(-\varepsilon j),$$

откуда, используя (8), имеем

$$P \left\{ w_{m_j'} < (1 - 2\varepsilon) \sqrt{2m_j \ln \ln m_j} \right\} < \Phi(-\varepsilon j). \quad (16)$$

Из (16) и леммы Бореля–Кантелли следует, что осуществляется конечное число событий $w_{m_j'} < (1 - 2\varepsilon) \sqrt{2m_j \ln \ln m_j}$, а поэтому с вероятностью единица

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{w_{m_j'}}{(bm_j \ln \ln m_j)^{1/2}} \geq (1 - 2\varepsilon) \sqrt{\frac{2}{b}}.$$

Таким образом правая часть (14) с вероятностью единица больше или равна

$$(1 - 2\varepsilon) 2c \sqrt{\frac{2}{b}} - 2 \frac{b+1}{b-1} c^2.$$

Полагая

$$c = \frac{1 - 2\varepsilon}{\sqrt{2b}} \frac{b-1}{b+1},$$

мы видим, что правая часть (14) больше чем $(1 - 2\varepsilon)^2(b-1)/(b(b+1))$. Отсюда в силу произвольности ε получаем результат утверждения (ii).

Доказательство утверждения (iii). Пусть $v_t = y_{t-1}$ для $t \geq 1$,

$$h_t = \frac{v_t^2}{t} + 4tv_t^2, \quad g_t = \frac{v_t}{\int_1^{b_1} h_s ds}. \quad (17)$$

Положим $b_0 = 1$. Существуют такие $b_1 > 1$ и $c_1 > 0$, что $\int_1^{b_1} h_s ds = c_1$. Для $k = 1, 2, \dots$ положим $b_k = b_1 e^{k-1}$, $g(k) = \max_{b_{k-1} \leq t \leq b_k} |g_t|$,

$$\begin{aligned} A(0) &= \{k: g(k) = 0\}, & A(1) &= \left\{k: g(k) > \frac{1}{2\sqrt{c_1}}\right\}, \\ A(i) &= \left\{k: \frac{1}{i} < 2\sqrt{c_1}g(k) \leq \frac{1}{i-1}\right\} & \text{для } i = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, что $N^+ = \sum_{i=0}^{\infty} A(i)$. Покажем сначала, что утверждение (iii) вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Если $i > 0$, то $|A(i)| < 12i^4 + 2$, где $|A(i)|$ обозначает число элементов множества $A(i)$.

Действительно, достаточно доказать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} (|w_{t-1}g_t|/\sqrt{t-1}) = 0$, или, что для любого $\varepsilon > 0$

$$J = \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \sup_{b_{k-1} \leq t \leq b_k} \left| \frac{w_{t-1}}{\sqrt{t-1}} g_t \right| > \varepsilon \right\} < \infty.$$

Используя лемму 1 и свойства винеровского процесса, имеем

$$\begin{aligned} J &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \sup_{b_{k-1} \leq t \leq b_k} \left| \frac{w_{t-1}}{\sqrt{t-1}} g(k) \right| > \varepsilon \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k > 1, k \in A(i)} \mathbf{P} \left\{ \sup_{b_{k-1} \leq t \leq b_k} \left| \frac{w_{t-1}}{\sqrt{t-1}} \right| > \varepsilon i 2\sqrt{c_1} \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (12i^4 + 2) \mathbf{P} \left\{ \sup_{1 \leq t \leq e} \left| \frac{w_t}{\sqrt{t}} \right| > \varepsilon i 2\sqrt{c_1} \right\} < \infty. \end{aligned}$$

Для доказательства леммы 1 докажем одну дополнительную лемму.

Лемма 2. Пусть $\hat{v}_k = \max_{b_{k-1} \leq t \leq b_k} v_t$, тогда

$$\int_{b_{k-1}}^{b_k} h_s ds \geq \frac{2}{3} \hat{v}_k^2.$$

Доказательство леммы 2. Рассмотрим два случая:

(а) $|v_t| > \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{v}_k$ для всех $t \in [b_{k-1}, b_k]$;

(б) существует такое $t_{1,k} \in [b_{k-1}, b_k]$, что $|y_{t_{1,k}}| = \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{v}_k$.

В случае (а) имеем

$$\int_{b_{k-1}}^{b_k} h_s ds \geq \frac{2}{3} \hat{v}_k^2 \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{ds}{s} = \frac{2}{3} \hat{v}_k^2.$$

Это доказывает лемму 2 в случае (а). Заметим теперь, что

$$|v_u^2 - v_r^2| = \left| \int_{\min(u,r)}^{\max(u,r)} 2v_s \dot{v}_s ds \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\min(u,r)}^{\max(u,r)} h_s ds. \quad (19)$$

Пусть $t_{2,k} \in [b_{k-1}, b_k]$ таково, что $v_{t_{2,k}} = \hat{v}_k$. Используя (19), получаем в случае (b)

$$\int_{b_{k-1}}^{b_k} h_s ds \geq \int_{\min(t_{1,k}, t_{2,k})}^{\max(t_{1,k}, t_{2,k})} h_s ds > 2 |v_{t_{2,k}}^2 - v_{t_{1,k}}^2| \geq 2 \left(\hat{v}_k^2 - \frac{2}{3} \hat{v}_k^2 \right) = \frac{2}{3} \hat{v}_k^2.$$

Доказательство леммы 1. Заметим, что если $k > 1$, $i > 0$, $k \in A(i)$, то существует такое $t_{3,k}$, что

$$v_{t_{3,k}} = g(k) \int_1^{t_{3,k}} h_s ds \geq \frac{1}{2i\sqrt{c_1}} \int_1^{b_1} h_s ds = \frac{\sqrt{c_1}}{2i},$$

т.е.

$$\hat{v}_k \geq \frac{\sqrt{c_1}}{2i} \text{ для } k \in A(i), \quad k > 1, i > 0. \quad (20)$$

Из (2) следует, что $|g(t)| \leq (2 \int_1^t h_s ds)^{-1/2}$, т.е.

$$g(k) \leq \left(2 \int_1^{b_{k-1}} h_s ds \right)^{-1/2}. \quad (21)$$

Пусть

$$\tilde{k}_i = \max \left[k: \int_1^{b_{k-1}} h_s ds < 2c_1 i^2 \right], \quad \tilde{k}_i \leq \infty.$$

Из (18) и (21) следует, что если $k \in A(i)$, то $k \leq \tilde{k}_i$. Используя лемму 2 и (20) получаем

$$2c_1 i^2 > \int_{b_1}^{b_{\tilde{k}_i-1}} h_s ds \geq \sum_{k \in A(i), 1 < k < \tilde{k}_i} \int_{b_{k-1}}^{b_k} h_s ds \geq \frac{2}{3} \frac{c_1}{4i^2} (|A(i)| - 2), \quad (22)$$

что доказывает лемму 1.

З а м е ч а н и е. Отметим, что функция $V(x)$ и значение $b = 1 + \sqrt{2}$ в (10) подбирались так, чтобы максимизировать соответствующее значение константы в утверждении (ii). К сожалению, получить одну и ту же константу в утверждениях (i) и (ii) не удалось, но авторы склонны считать, что правильным является значение константы в утверждении (ii).

Авторы благодарны А. В. Булинскому, замечания которого способствовали улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belkina T., Kabanov Yu., Presman E. Stochastic linear-quadratic regulator. Optimality almost sure and in probability. — SIAM Journal in Control and Optimization (в печати).
2. Пресман Э. Л. Оптимальность почти наверное и по вероятности для стохастического линейно-квадратического регулятора. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 3, с. 627–632.
3. Хинчин А. Я. Асимптотические законы теории вероятностей. М.-Л.: ОНТИ, 1936.

Поступила в редакцию
6.II.1997