Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Николаев, Об оптимальной многократной остановке марковских последовательностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 2, 374–382

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 08:55:18

4. Пример использования полученных результатов в случае единичной «разладки». Рассмотрим частный случай задачи (2), (6). Предположим, что $n = 1$, тогда мы получаем задачу о единичной «разладке», решенную А. Н. Ширяевым в [1]. Пусть наблюдаемый процесс имеет дифференциал вида $dx_t = I\{t \geq \tau\} dt + dW_t$, $x_0 = 0$, где τ — момент появления «разладки», имеющий экспоненциальное распределение с параметром λ . В этом случае марковский процесс θ в (1) принимает два значения: 0 и 1.

Пусть $\pi_t = P\{\theta_t = 1 \mid \mathcal{F}_t^x\}$. В силу (11)–(14)

$$d\pi_t = \lambda(1 - \pi_t) dt + \pi_t(1 - \pi_t)(dx_t - \pi_t dt), \quad \pi_0 = 0.$$

Составляя функционал потерь (5) и вводя решающую функцию d_t^* , находим

$$d_t^* = I\{\pi_t \geq A^*\}, \quad (18)$$

где порог $A^* = c_1(c_0 + c_1)^{-1}$, c_0, c_1 — весовые коэффициенты функционала потерь. Следовательно, оценка момента разладки примет вид $\tau^* = \inf\{t \geq 0: \pi_t \geq A^*\}$. Решение задачи о единичной «разладке» в байесовской постановке (см. [1]) имеет такое же представление, но там поиск порога A^* достаточно сложен. Заметим также, что решающая функция d_t^* , определенная в (18), совпадает с решающей функцией в задаче последовательного различения двух гипотез [1].

Автор выражает благодарность А. А. Бутову за внимание, проявленное к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 272 с.
2. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
3. Пресман Э. Л., Сонин И. М. Последовательное управление по неполным данным (байесовский подход). М.: Наука, 1982, 256 с.
4. Роббинс Г., Сигмунд Г., Чао И. Теория оптимальных правил остановки. М.: Наука, 1977, 168 с.

Поступила в редакцию
19.V.1997

© 1998 г.

НИКОЛАЕВ М. Л.*

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ МНОГОКРАТНОЙ ОСТАНОВКЕ МАРКОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Рассмотрена задача оптимальной многократной остановки марковской последовательности. Получены условия существования и структура оптимальных и ϵ -оптимальных ($\epsilon > 0$) правил многократной остановки.

Ключевые слова и фразы: марковские последовательности, оптимальная остановка, правило многократной остановки.

*Марийский государственный университет, пл. Ленина, 1; Марийский филиал Московского открытого социального университета, ул. Лобачевского, 1; 424001 Йошкар-Ола, Марий-Эл, Россия.

1. Введение и формулировка основного результата. Пусть $y_1, y_2, \dots$ — (возможно конечная) последовательность случайных величин (с.в.) с известным совместным распределением. Эти с.в. мы наблюдаем последовательно и должны решить, когда остановиться. Если мы останавливаемся в момент времени m_1 после наблюдений $(y_1, \dots, y_{m_1})$, то начинаем наблюдать другую последовательность $y_{m_1, m_1+1}, y_{m_1, m_1+2}, \dots$ (зависящую от $(y_1, \dots, y_{m_1})$) и решаем задачу оптимальной остановки новой последовательности. Если сделано i остановок в моменты $m_1, m_2, \dots, m_i$ ($1 \leq i \leq k-1$), то наблюдаем последовательность с.в. $y_{m_1, \dots, m_i, m_i+1}, y_{m_1, \dots, m_i, m_i+2}, \dots$, распределение которой зависит от $(y_1, \dots, y_{m_1}, y_{m_1, m_1+1}, \dots, y_{m_1, m_2}, \dots, y_{m_1, \dots, m_i})$. Наше решение остановиться в моменты m_i ($i = 1, 2, \dots, k$) зависит лишь от наблюдений, которые уже сделаны, но не зависит от будущего, которое еще неизвестно. После k ($k \geq 2$) остановок получаем выигрыш

$$Z_{m_1, \dots, m_k} = g_{m_1, \dots, m_k}(y_1, \dots, y_{m_1, m_1+1}, \dots, y_{m_1, \dots, m_k}),$$

где $g_{m_1, \dots, m_k}$ — известная функция. Задача состоит в нахождении процедуры, которая максимизирует ожидаемый выигрыш. Эта схема дает модель для изучения всевозможных обобщений задач оптимальной остановки, рассмотренных многими авторами (см., например, [1]–[9]).

Для большого класса задач оптимальной остановки можно ограничиться рассмотрением случая, когда с.в. $Z_{m_1, \dots, m_k} = g(x_{m_1}, \dots, x_{m_k})$, где $\{x_n\}$ — марковская последовательность. Именно этот случай исследуется в нашей работе. Оказывается, можно несколько упростить общую теорию [10] и дать сравнительно простое описание оптимальных процедур (когда они существуют). Здесь мы следуем главным образом А. Н. Ширяеву [3] и Р. Роббинсу, Д. Сигмунду, И. Чао [4].

Дадим более точную формулировку марковского случая. Предположим, на произвольном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданы:

- 1) марковская цепь $\{x_m, \mathcal{F}_m, m \geq 1\}$ в фазовом пространстве $\{X, B\}$, где $\mathcal{F}_m$ — последовательность σ -подалгебр σ -алгебры $\mathcal{F}$;
- 2) при каждом $i = 1, 2, \dots, k$ и наборе целых чисел $0 \equiv m_0 < m_1 < \dots < m_{i-1}$ — неубывающая последовательность σ -подалгебр $\{\mathcal{F}_{m_1, \dots, m_{i-1}, m_i}, m_i > m_{i-1}\}$ σ -алгебры $\mathcal{F}$ такая, что $\mathcal{F}_{m_1, \dots, m_{i-1}} \subseteq \mathcal{F}_{m_1, \dots, m_i} \subseteq \mathcal{F}_{m_i}$;
- 3) для любых фиксированных целых $m_1, \dots, m_{k-1}$, $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1}$, — случайный процесс $\{Z_{m_1, \dots, m_k}, \mathcal{F}_{m_1, \dots, m_k}, m_k > m_{k-1}\}$, где $Z_{m_1, \dots, m_k} = g(x_{m_1}, \dots, x_{m_k})$, а $g(x, y, \dots, v)$ является действительной $\mathcal{B}^k$ -измеримой функцией, определенной на $\mathcal{X}^k$.

Введем необходимые определения. Набор целочисленных с.в. $(\tau_1, \dots, \tau_i)$ назовем *правилом i -кратной остановки* ($1 \leq i \leq k$), если он удовлетворяет следующим условиям:

- a) $1 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \infty$ (P-п.н.),
- b_j) $\{\omega: \tau_1 = m_1, \dots, \tau_j = m_j\} \in \mathcal{F}_{m_1, \dots, m_j}$ при всех $m_j > m_{j-1} > \dots > m_1 \geq 1$; $j = 1, 2, \dots, i$.

Для удобства правило k -кратной остановки будем называть просто *правилом многократной остановки* (п.м.о.).

Всюду далее будут использоваться следующие обозначения:

$$x^+ = \max(x, 0), \quad x^- = -\min(x, 0),$$

$$(\lambda)_i = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i), \quad (\lambda)_1 = \lambda_1, \quad E_{(m)_i} \xi = E(\xi | \mathcal{F}_{(m)_i}),$$

$$A_{(m)_i} \xi = E_{(m)_i} \left(\sup_{m_{i+1}} E_{(m)_{i+1}} \left(\dots \left(\sup_{m_{k-1}} E_{(m)_{k-1}} \xi \right) \dots \right) \right).$$

Будем предполагать, что относительно с.в. $Z_{(m)_k}$ выполнено условие

$$A^+: E \left(\sup_{m_1} A_{(m)_1} \left(\sup_{(m)_k} Z_{(m)_k} \right) \right) < +\infty.$$

Условие обеспечивает существование всех рассматриваемых математических ожиданий.

Пусть S_m означает класс п.м.о. $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ таких, что $\tau_1 \geq m$ (Р-п.н.). Будем интерпретировать с.в. $Z_{(m)_k}$ как наш выигрыш после остановок в моменты $m_1, \dots, m_k$, и тогда EZ_τ будет ожидаемым выигрышем для любого п.м.о. τ . Функцию

$$v_m = \sup_{\tau \in S_m} EZ_\tau = \sup_{\tau \in S_m} Eg(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_k})$$

назовем m -ценой. Скажем, что п.м.о. $\tau \in \hat{S}_m$, если $\tau \in S_m$ и существуют такие $B_i \in \mathcal{B}$, что

$$\tau_1 = \inf \{m_1 \geq m: x_{m_1} \in B_1\},$$

$$\tau_i = \inf \{m_i \geq m_{i-1}: x_{m_i} \in B_i\},$$

где $B_i = B_i(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_{i-1}})$, $i = 2, \dots, k$. Наглядный смысл $\hat{S}_m$ понятен — это класс п.м.о. без «памяти», т.е. запоминаются лишь состояния цепи в моменты $\tau_1, \dots, \tau_k$.

Утверждение, что m -цена v_m достигается на $\hat{S}_m$, интуитивно достаточно очевидно, так как в марковском случае наше решение об остановках, по-видимому, должно основываться на состояниях системы в данный момент и в предыдущие моменты остановки, и не должно зависеть от прошлых промежуточных состояний. В теореме 1 мы дадим строгое обоснование этого принципа.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. *Предположим, что условие A^+ выполнено. Тогда*

$$v_m = \sup_{\tau \in \hat{S}_m} Eg(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_k}).$$

Доказательство этой теоремы использует ряд результатов общей теории оптимальных п.м.о. [10]; эти результаты приведены в п. 2.

2. Основные результаты теории оптимальных правил многократной остановки. Всюду в этом разделе будем считать заданными:

- 1) вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$;
- 2) при каждом $i = 1, 2, \dots, k$ и наборе целых чисел $0 \equiv m_0 < m_1 < \dots < m_{i-1}$ — неубывающую последовательность σ -подалгебр $\{\mathcal{F}_{(m)_{i-1}, m_i}, m_i > m_{i-1}\}$ σ -алгебры $\mathcal{F}$ такую, что $\mathcal{F}_{(m)_{i-1}} \subseteq \mathcal{F}_{(m)_i} \subseteq \mathcal{F}_{(m)_{i-1}, m_{i+1}}$;
- 3) для любых фиксированных целых $m_1, \dots, m_{k-1}$, $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1}$, — случайный процесс $\{Z_{(m)_k}, \mathcal{F}_{(m)_k}, m_k > m_{k-1}\}$.

Отметим, что, в терминах неформальной постановки первого раздела, σ -алгебра $\mathcal{F}_{(m)_i}$ порождена наблюдениями $(y_1, \dots, y_{m_1}, y_{m_1, m_1+1}, \dots, y_{m_1, m_2}, \dots, y_{(m)_i})$.

Определим п.м.о., класс S_m и m -цену $v_m = \sup_{\tau \in S_m} EZ_\tau$ обычным образом (см. п. 1).

П.м.о. $\tau^* \in S_m$, для которого математическое ожидание EZ_{τ^*} существует и $EZ_{\tau^*} = v_m$, назовем *оптимальным правилом многократной остановки* в S_m . Будем говорить, что правило $\tau_\epsilon \in S_m$ является ϵ -оптимальным ($\epsilon > 0$), если $v_m - \epsilon \leq EZ_{\tau_\epsilon}$ и EZ_{τ_ϵ} существует. Указанное выше условие A^+ обеспечивает конечность v_m и существование EZ_τ для всех $\tau \in S_m$. Задача состоит в отыскании ϵ -оптимальных правил ($\epsilon > 0$), оптимального п.м.о. и m -цены игры v_m .

При построении п.м.о. τ^* и τ_ε ключевую роль будут играть определяемые ниже последовательности $\{V_{(m)_i}\}$ и $\{X_{(m)_i}\}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Пусть $T_{(m)_i}$ — класс правил i -кратной остановки $(\tau)_i = (\tau_1, \dots, \tau_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) с $\tau_1 = m_1, \dots, \tau_{i-1} = m_{i-1}$, $\tau_i \geq m_i$ (Р-п.н.) (где $T_{(m)_1} \equiv T_{m_1}$ означает класс всех таких моментов остановки τ_1 , что $\tau_1 \geq m_1$ (Р-п.н.)). Положим $X_{(m)_k} = Z_{(m)_k}$ и определим последовательно от $i = k$ по убывающим значениям i :

$$V_{(m)_i} = \operatorname{ess\,sup}_{(\tau)_i \in T_{(m)_i}} E_{(m)_i} X_{(\tau)_i}, \quad (2.1)$$

$$X_{(m)_{i-1}} = E_{(m)_{i-1}} V_{(m)_{i-1}, m_{i-1}+1}, \quad i = k, k-1, \dots, 1, \quad (2.2)$$

где $X_0 \equiv 0$.

З а м е ч а н и е. Отметим, что большинство утверждений ниже будет справедливо с точностью до событий вероятности нуль; далее мы не будем упоминать об этом.

Выясним теперь некоторые свойства последовательностей $\{V_{(m)_i}\}$ и $\{X_{(m)_i}\}$. Из результатов общей теории оптимальных правил остановки (см., например, [4], [8]) следует, что $V_{(m)_i}$ удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$V_{(m)_i} = \max\{X_{(m)_i}, E_{(m)_i} V_{(m)_{i-1}, m_i+1}\}. \quad (2.3)$$

Следующая теорема дает условия существования и структуру оптимального п.м.о. в S_m .

Теорема 2. Пусть выполнено условие A^+ . Положим для $i = 1, 2, \dots, k$

$$\tau_i^* = \inf\{m_i > m_{i-1} : V_{(m)_i} = X_{(m)_i}\}$$

на множестве $D_{i-1} = \{\omega : \tau_1^* = m_1, \dots, \tau_{i-1}^* = m_{i-1}\}$, где считаем, что $\tau_i^* = +\infty$ на $\{\omega : \tau_{i-1}^* = +\infty\}$, $m_0 = m - 1$ и $D_0 = \Omega$. Тогда если случайный вектор $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_k^*)$ конечен с вероятностью единица, то $\tau^* \in S_m$ является оптимальным правилом многократной остановки.

Заметим, что правило $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_k^*)$ не может быть конечным с вероятностью единица, если оптимального п.м.о. не существует. Более того, можно построить примеры, в которых оптимальное правило существует, а τ^* не является конечным. Достаточные условия конечности будут даны в теореме 5.

В теореме 3 дается характеристизация m -цены v_m с помощью последовательности $\{V_m\}$.

Теорема 3. Если условие A^+ верно, то $v_m = EV_m$.

При построении ε -оптимальных ($\varepsilon > 0$) п.м.о. используется теорема 4.

Теорема 4. Пусть условие A^+ справедливо. Определим для всякого $\varepsilon > 0$ и $i = 1, 2, \dots, k$

$$\tau_{i\varepsilon} = \inf\left\{m_i > m_{i-1} : X_{(m)_i} \geq V_{(m)_i} - \frac{\varepsilon}{k}\right\}$$

на множестве $D_{i-1} = \{\omega : \tau_{1\varepsilon} = m_1, \dots, \tau_{(i-1)\varepsilon} = m_{i-1}\}$, где считаем, что $\tau_{i\varepsilon} = +\infty$ на $\{\omega : \tau_{(i-1)\varepsilon} = +\infty\}$, $m_0 = m - 1$ и $D_0 = \Omega$. Тогда правило многократной остановки $\tau_\varepsilon = (\tau_{1\varepsilon}, \dots, \tau_{k\varepsilon})$ является ε -оптимальным в S_m и

$$E_m Z_{\tau_\varepsilon} \geq v_m - \varepsilon. \quad (2.4)$$

Следующая теорема устанавливает достаточные условия конечности п.м.о. τ^* .

Теорема 5. Пусть выполнено условие A^+ . Тогда случайный вектор τ^* является конечным с вероятностью единица, если

- a_k) $\lim_{m_k \rightarrow \infty} Z_{(m)_k} = -\infty$ для всех $m_{k-1} > m_{k-2} > \dots > m_1 \geq 1$;
- a_{k-1}) $\lim_{m_{k-1} \rightarrow \infty} \sup_{m_k} Z_{(m)_k} = -\infty$ для всех $m_{k-2} > \dots > m_1 \geq 1$;
- a_i) $\lim_{m_i \rightarrow \infty} A_{(m)_i}(\sup_{m_k} Z_{(m)_k}) = -\infty$ для всех $m_{i-1} > \dots > m_1 \geq 1$, $i = k-2, \dots, 1$.

3. Доказательство теоремы 1. Ключевую роль при доказательстве теоремы 1 играет следующее утверждение.

Теорема 6. *Предположим, что условие A^+ выполнено. Тогда с.в. $V_{(m)_i}$ и $X_{(m)_i}$ являются $\sigma(x_{m_1}, \dots, x_{m_i})$ -измеримыми ($i = 1, 2, \dots, k$).*

Сначала рассмотрим несколько лемм. Пусть $\{\xi_n, \tilde{\mathcal{F}}_n, n \geq 1\}$ — произвольная случайная последовательность на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\tilde{\mathcal{F}}_n \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}$. Определим $f_n = \text{ess sup}_{t \in C_n} E(\xi_t | \tilde{\mathcal{F}}_n)$, где C_n обозначает класс моментов остановки t таких, что $P\{t \geq n\} = 1$ и $E(\sup_n \xi_n^+) < +\infty$. Известно (см., например, [4], [8]), что

$$f_n = \max \{ \xi_n, E(f_{n+1} | \tilde{\mathcal{F}}_n) \}.$$

Лемма 1. *Пусть $E(\sup_n \xi_n^-) < +\infty$ и $\{g_n, \tilde{\mathcal{F}}_n, n \geq 1\}$ — случайная последовательность такая, что*

a) $g_n \leq f_n$,

b) $g_n = \max \{ \xi_n, E(g_{n+1} | \tilde{\mathcal{F}}_n) \}$.

Тогда $g_n = f_n, n = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Пусть $A \in \tilde{\mathcal{F}}_n$. Тогда для любого $t \in C_n$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{A\{t \geq n\}} g_n dP &\geq \int_{A\{t=n\}} g_n dP + \int_{A\{t > n\}} g_{n+1} dP = \int_{A\{t=n\}} g_n dP \\ &\quad + \int_{A\{t=n+1\}} g_{n+1} dP + \int_{A\{t > n+1\}} g_{n+1} dP \\ &\geq \dots \geq \sum_{j=n}^r \int_{A\{t=j\}} \xi_j dP + \int_{A\{t > r\}} g_r dP. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{j=n}^r \int_{A\{t=j\}} \xi_j dP \leq \int_{A\{t \geq n\}} g_n dP + \int_{A\{t > r\}} \sup_n \xi_n^- dP.$$

Полагая $r \rightarrow \infty$, имеем

$$\int_{A\{t \geq n\}} \xi_t dP \leq \int_{A\{t \geq n\}} g_n dP,$$

и, значит, $g_n \geq E(\xi_t | \tilde{\mathcal{F}}_n)$.

Тогда $g_n \geq \text{ess sup}_{t \in C_n} E(\xi_t | \tilde{\mathcal{F}}_n)$ и $g_n = f_n, n = 1, 2, \dots$. Лемма доказана.

Лемма 2 [9]. *Пусть $E(\sup_n \xi_n^+) < \infty$ и случайная последовательность $\{g_n, \tilde{\mathcal{F}}_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет условиям:*

a) $f_n \leq g_n \leq E(\eta | \tilde{\mathcal{F}}_n)$ для некоторой интегрируемой с.в. η ;

b) $g_n = \max \{ \xi_n, E(g_{n+1} | \tilde{\mathcal{F}}_n) \}$,

c) $\limsup_n g_n = \limsup_n \xi_n$.

Тогда $g_n = f_n, n = 1, 2, \dots$.

Теперь ограничимся $N, N \geq k$, наблюдениями $x_1, \dots, x_N$ и определим $T_{(m)_i}^N, V_{(m)_i}^N$ и $X_{(m)_i}^N$ естественным образом (см. (2.1) и (2.2)). Аналогично (2.3) мы можем заключить, что

$$V_{(m)_i}^N = \max \{ X_{(m)_i}^N, E_{(m)_i} V_{(m)_{i-1}, m_i+1}^N \}, \quad (3.1)$$

где $V_{(m)_{i-1}, N-k+i}^N \equiv X_{(m)_{i-1}, N-k+i}^N$.

Лемма 3. *Предположим, что $Z_{(m)_k}$ удовлетворяют условиям A^+ и A^- , где*

$$A^-: E \left(\sup_{m_1} A_{(m)_1} \left(\sup_{(m)_k} Z_{(m)_k}^- \right) \right) < +\infty.$$

Тогда для $i = 1, 2, \dots, k$

$$V_{(m)i} = \lim_{N \rightarrow \infty} V_{(m)i}^N, \quad X_{(m)i} = \lim_{N \rightarrow \infty} X_{(m)i}^N.$$

Доказательство. Докажем утверждения методом обратной индукции по i , начиная с $i = k$. Из (3.1) следует, что

$$V_{(m)k}^N = \max \left\{ X_{(m)k}^N, E_{(m)k} V_{(m)k-1, m_k+1}^N \right\},$$

где $X_{(m)k}^N = Z_{(m)k}^N$. Так как $T_{(m)k}^N \subset T_{(m)k}^{N+1}$, то из определения $V_{(m)k}^N$ получаем, что $V_{(m)k}^N \leq V_{(m)k}^{N+1}$. Следовательно, предел $V_{(m)k}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} V_{(m)k}^N$ существует, причем $V_{(m)k}^* \leq V_{(m)k}$ и, согласно A^+ , $V_{(m)k} < +\infty$. Далее, в силу условия A^- по теореме о монотонной сходимости имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_{(m)k} V_{(m)k-1, m_k+1}^N = E_{(m)k} V_{(m)k-1, m_k+1}^*.$$

Поэтому

$$V_{(m)k}^* = \max \left\{ Z_{(m)k}, E_{(m)k} V_{(m)k-1, m_k+1}^* \right\}$$

и, следовательно, из леммы 1 заключаем, что $V_{(m)k}^* = V_{(m)k}$. Тогда легко убедиться в справедливости равенств

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X_{(m)k-1}^N = \lim_{N \rightarrow \infty} E_{(m)k-1} V_{(m)k-1, m_{k-1}+1}^N = X_{(m)k-1}.$$

Теперь предположим по индукции, что для некоторого i , $2 \leq i < k$, равенство $\lim_{N \rightarrow \infty} V_{(m)i}^N = V_{(m)i}$ выполнено. Следовательно, и $\lim_{N \rightarrow \infty} X_{(m)i-1}^N = X_{(m)i-1}$. Тогда из (3.1), проводя те же как и выше рассуждения, имеем

$$V_{(m)i-1}^* = \max \left\{ X_{(m)i-1}, E_{(m)i-1} V_{(m)i-2, m_{i-1}+1}^* \right\}.$$

В силу неравенства Йенсена, $X_{(m)i-1}^- \leq E_{(m)i-1} V_{(m)i-1, m_{i-1}+1}^-$, а тогда по условию A^-

$$E \left(\sup_{m_{i-1}} X_{(m)i-1}^- \right) \leq E \left(\sup_{m_{i-1}} A_{(m)i-1} \left(\sup_{(m)_k} Z_{(m)_k}^- \right) \right) < +\infty.$$

Наконец, используя лемму 1, получаем $V_{(m)i-1}^* = V_{(m)i-1}$, что и завершает доказательство леммы.

Определим теперь последовательности:

$$V_{(m)i}(a) = \text{ess sup}_{(\tau)_i \in T_{(m)i}} E_{(m)i} X_{(\tau)_i}(a),$$

$$X_{(m)i-1}(a) = E_{(m)i-1} V_{(m)i-1, m_{i-1}+1}(a), \quad i = k, \dots, 1,$$

где $X_{(\tau)_k}(a) \equiv Z_{(\tau)_k}(a)$, $X_0(a) \equiv 0$, $y(a) = \max\{y, a\}$, $-\infty < a \leq 0$.

Лемма 4. Пусть выполнено условие A^+ . Тогда для $i = 1, 2, \dots, k$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} V_{(m)i}(a) = V_{(m)i}, \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} X_{(m)i}(a) = X_{(m)i}.$$

Доказательство. Так как $V_{(m)i}(a)$ и $X_{(m)i}(a)$ являются невозрастающими по a , то существуют пределы

$$\bar{V}_{(m)i}^* = \lim_{a \rightarrow -\infty} V_{(m)i}(a), \quad \bar{X}_{(m)i}^* = \lim_{a \rightarrow -\infty} X_{(m)i}(a).$$

Легко заметить, что

$$V_{(m)_i} \leq \bar{V}_{(m)_i}^* \leq E_{(m)_i} \left(\sup_{m_{i+1}} A_{(m)_{i+1}} \left(\sup_{(m)_k} Z_{(m)_k}^+ \right) \right). \quad (3.2)$$

Доказательство леммы проведем обратной индукцией по i .

Из (2.3) вытекает

$$V_{(m)_k}(a) = \max \left\{ Z_{(m)_k}(a), E_{(m)_k} V_{(m)_{k-1}, m_k+1}(a) \right\}.$$

Поскольку $EV_{(m)_k}^+(a) \leq E(\sup_{(m)_k} Z_{(m)_k}^+) < +\infty$, то по теореме о монотонной сходимости имеем

$$\bar{V}_{(m)_k}^* = \max \left\{ Z_{(m)_k}, E_{(m)_k} \bar{V}_{(m)_{k-1}, m_k+1}^* \right\}.$$

Далее, в силу теоремы 3.5 [1]

$$\limsup_{m_k \rightarrow \infty} V_{(m)_k}(a) = \limsup_{m_k \rightarrow \infty} Z_{(m)_k}(a)$$

для всех $a \leq 0$ и $m_{k-1} > \dots > m_1 \geq 1$. Следовательно,

$$\limsup_{m_k \rightarrow \infty} \bar{V}_{(m)_k}^* \leq \limsup_{m_k \rightarrow \infty} Z_{(m)_k}(a) = \max \left\{ \limsup_{m_k \rightarrow \infty} Z_{m_k}, a \right\}.$$

Но

$$\max \left\{ \limsup_{m_k \rightarrow \infty} Z_{(m)_k}, a \right\} \rightarrow \limsup_{(m)_k \rightarrow \infty} Z_{(m)_k} \quad \text{при } a \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\limsup_{m_k \rightarrow \infty} \bar{V}_{(m)_k}^* = \limsup_{m_k \rightarrow \infty} Z_{(m)_k}. \quad (3.3)$$

Тогда, применяя лемму 2, получим $\bar{V}_{(m)_k}^* = V_{(m)_k}$ и

$$\begin{aligned} \bar{X}_{(m)_{k-1}}^* &= \lim_{a \rightarrow -\infty} E_{(m)_{k-1}} V_{(m)_{k-1}, m_{k-1}+1}(a) \\ &= E_{(m)_{k-1}} V_{(m)_{k-1}, m_{k-1}+1} = X_{(m)_{k-1}}. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что соотношение

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} V_{(m)_i}(a) = V_{(m)_i} \quad (3.4)$$

справедливо для некоторого i , $2 \leq i < k$. Остается показать тогда, что

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} V_{(m)_{i-1}}(a) = V_{(m)_{i-1}}.$$

Из (3.4) следует $\lim_{a \rightarrow -\infty} X_{(m)_{i-1}}(a) = X_{(m)_{i-1}}$ и (как и выше)

$$\bar{V}_{(m)_{i-1}}^* = \max \left\{ X_{(m)_{i-1}}, E_{(m)_{i-1}} \bar{V}_{(m)_{i-1}, m_{i-1}+1}^* \right\}.$$

Но в силу неравенства $X_{(m)_{i-1}} \leq V_{(m)_{i-1}}$ имеем $X_{(m)_{i-1}}^+ \leq V_{(m)_{i-1}}^+$, что в сочетании с (3.2) и условием A^+ дает

$$E \left(\sup_{m_{i-1}} X_{(m)_{i-1}}^+ \right) \leq E \left(\sup_{m_{i-1}} A_{(m)_{i-1}} \left(\sup_{(m)_k} Z_{(m)_k}^+ \right) \right) < +\infty.$$

Наконец, учтем (доказывается как (3.3)), что

$$\limsup_{m_{i-1} \rightarrow \infty} \bar{V}_{(m)_{i-1}}^* = \limsup_{m_{i-1} \rightarrow \infty} X_{(m)_{i-1}}.$$

Тогда $\overline{V}_{(m)i-1}^* = V_{(m)i-1}$ по лемме 2. Лемма доказана.

Следствие. Пусть справедливо условие A^+ . Тогда:

$$V_{(m)i} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} V_{(m)i}^N(a), \quad X_{(m)i} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} X_{(m)i}^N(a).$$

Вернемся теперь к доказательству теоремы 6.

Доказательство теоремы 6. В силу следствия к леммам 3 и 4

$$V_{(m)i} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} V_{(m)i}^N(a), \quad X_{(m)i} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} X_{(m)i}^N(a), \quad (3.5)$$

а из (3.1) следует, что

$$V_{(m)i}^N(a) = \max\{X_{(m)i}^N, E_{(m)i} V_{(m)i-1, m_{i-1}+1}(a)\}. \quad (3.6)$$

Проведем доказательство обратной индукцией.

Пусть $i = k$ и $m_k = N$. Тогда из (3.6) следует

$$V_{(m)_{k-1}, N}^N(a) = Z_{(m)_{k-1}, N}(a) = \max\{a, g(x_{m_1}, \dots, x_{m_{k-1}}, N)\},$$

т.е. $V_{(m)_{k-1}, N}^N$ является $\sigma(x_{m_1}, \dots, x_{m_k})$ -измеримой.

Предположим теперь, что $V_{(m)_k}^N(a)$ является $\sigma(x_{m_1}, \dots, x_{m_k})$ -измеримой для некоторого $m_k = r+1$, $m_{k-1} \leq r < N$. Отсюда вытекает тогда, что

$$V_{(m)_{k-1}, r+1}^N(a) = f_1(x_{m_1}, \dots, x_{m_{k-1}}, x_{r+1}),$$

где $f_1(u, \dots, w)$ является $\mathcal{B}^k$ -измеримой функцией, определенной на $\mathcal{X}^k$. Используя марковское свойство, легко проверить, что

$$\begin{aligned} E(f_1(x_{m_1}, \dots, x_{m_{k-1}}, x_{r+1}) | \mathcal{F}_r) &= E(f_1(u, \dots, w, x_{r+1}) | \mathcal{F}_r) |_{u=x_{m_1}, \dots, w=x_{m_{k-1}}} \\ &= E(f_1(u, \dots, w, x_{r+1}) | \mathcal{F}_r) |_{u=x_{m_1}, \dots, w=x_{m_{k-1}}} = f_2(x_{m_1}, \dots, x_{m_{k-1}}, x_r). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E(V_{(m)_{k-1}, r+1}^N(a) | \mathcal{F}_{(m)_{k-1}, r}) &= E(E(V_{(m)_{k-1}, r+1}^N(a) | \mathcal{F}_r) | \mathcal{F}_{(m)_{k-1}, r}) \\ &= E(f_2(x_{m_1}, \dots, x_{m_{k-1}}, x_r) | \mathcal{F}_{(m)_{k-1}, r}) = f_2(x_{m_1}, \dots, x_{m_{k-1}}, x_r). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) следует, что $V_{(m)_k}$ является $\sigma(x_{m_1}, \dots, x_{m_k})$ -измеримой. Тогда

$$\begin{aligned} X_{(m)_{k-1}}^N(a) &= E_{(m)_{k-1}, m_{k-1}+1}(a) = E_{(m)_{k-1}}(f_3(x_{m_1}, \dots, x_{m_{k-1}}, x_{m_{k-1}+1})) \\ &= f_4(x_{m_1}, \dots, x_{m_{k-1}}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

и из (3.5) $X_{(m)_{k-1}}$ есть $\sigma(x_{m_1}, \dots, x_{m_{k-1}})$ -измеримая с.в.

Предположим теперь, что с.в. $V_{(m)_i}$ будет $\sigma(x_{m_1}, \dots, x_{m_i})$ -измеримой для некоторого $i = r+1$, $1 \leq r < k-1$. Тогда аналогично (3.8) получим, что с.в. $X_{(m)_r}^N(a)$ есть $\sigma(x_{m_1}, \dots, x_{m_r})$ -измеримая и поэтому в силу (3.5) $X_{(m)_r}$ будет $\sigma(x_{m_1}, \dots, x_{m_r})$ -измеримой с.в. Остается доказать, что $V_{(m)_r}$ есть $\sigma(x_{m_1}, \dots, x_{m_r})$ -измеримая с.в. Как и в (3.7), имеем

$$E_{(m)_r} V_{(m)_{r-1}, m_r+1}^N(a) = f_5(x_{m_1}, \dots, x_{m_r}).$$

Отсюда и из (3.6) мы делаем вывод, что с.в. $V_{(m)_r}^N(a)$ будет $\sigma(x_{m_1}, \dots, x_{m_r})$ -измеримой и, следовательно, в силу (3.5) $V_{(m)_r}$ является $\sigma(x_{m_1}, \dots, x_{m_r})$ -измеримой. Это завершает доказательство теоремы 6.

Теперь мы можем доказать основной результат.

Доказательство теоремы 1. Определим для произвольного $\varepsilon > 0$ п.м.о. $\tau_\varepsilon^a = (\tau_{1\varepsilon}^a, \dots, \tau_{k\varepsilon}^a)$, полагая

$$\tau_{i\varepsilon}^a = \inf \left\{ m_i > m_{i-1} : X_{(m)_i}(a) \geq V_{(m)_i}(a) - \frac{\varepsilon}{k} \right\}$$

на множестве $D_{i-1} = \{\omega : \tau_{1\varepsilon}^a = m_1, \dots, \tau_{(i-1)\varepsilon}^a = m_{i-1}\}$, где мы положим $m_0 = m - 1$ и $D_0 = \Omega$. В силу теоремы 6 $\tau_\varepsilon^a \in \hat{S}_m$, а из (2.4) следует, что $E_m Z_{\tau_\varepsilon^a} \geq V_m(a) - \varepsilon$, поэтому, беря от обеих частей математические ожидания, получим $E Z_{\tau_\varepsilon^a} \geq E V_m(a) - \varepsilon$. Следовательно,

$$\sup_{\tau \in \hat{S}_m} E Z_\tau \geq \sup_a E Z_{\tau_\varepsilon^a} \geq \lim_{a \rightarrow -\infty} E V_m(a) - \varepsilon. \quad (3.9)$$

По теореме о монотонной сходимости и лемме 4 $\lim_{a \rightarrow -\infty} E V_m(a) = E V_m$, но $E V_m = v_m$ (теорема 3). Тогда из (3.9) следует, что $\sup_{\tau \in \hat{S}_m} E Z_\tau \geq v_m - \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то последнее неравенство завершает доказательство теоремы.

Таким образом, мы установили следующие результаты. По теореме 4 правило многократной остановки $\tau_\varepsilon \in S_m$ является ε -оптимальным ($\varepsilon > 0$), но в силу теоремы 6 $\tau_\varepsilon \in \hat{S}_m \subseteq S_m$. В силу теоремы 2 и доказанной теоремы 6, если оптимальное правило многократной остановки существует, то его можно искать в классе $\hat{S}_m$. С другой стороны, если существует оптимальное правило в $\hat{S}_m$, то по теореме 1 оно является оптимальным и среди всех правил остановки.

Автор благодарен А. Н. Ширяеву за постановку задачи, а также Ю. В. Прохорову и А. А. Новикову за полезное обсуждение результатов работы и искренний интерес к данной проблематике. Автор признателен рецензенту за внимательное прочтение и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Snell I. L. Applications of martingale system theorems. — Trans. Amer. Math. Soc., 1953, v. 73, p. 293–312.
2. Дынкин Е. Б. Оптимальный выбор момента остановки марковского процесса. — ДАН, 1963, т. 150, в. 2, с. 238–240.
3. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 272 с.
4. Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил остановки. М.: Наука, 1977, 167 с.
5. Shepp L. A. Explicit solutions to some problems of optimal stopping. — Ann. Math. Statist., 1969, v. 40, № 3, p. 993–1010.
6. Gilbert J. P., Mosteller F. Recognizing the maximum of a sequence. — J. Amer. Statist. Assoc., 1960, v. 61, № 313, p. 35–73.
7. Haggstrom G. Optimal sequential procedures when more than one stop is required. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, № 6, p. 1618–1626.
8. Haggstrom G. Optimal stopping and experimental design. — Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, № 1, p. 7–29.
9. Siegmund D. O. Some problems in the theory of optimal stopping rules. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 36, № 6, p. 1627–1640.
10. Николаев М. Л. Обобщенные последовательные процедуры. — Литов. матем. сб., 1979, т. 19, № 3, с. 35–44.

Поступила в редакцию
27.X.1997