Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Сгибнев, О распределении супремума случайного блуждания при наличии корней характеристического уравнения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 2, 383–390

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:34:26

© 1998 г.

СТИБНЕВ М. С.*

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СУПРЕМУМА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ¹⁾

Рассматривается случайное блуждание $\{S_n\}$, порожденное последовательностью $\{X_k\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с $EX_1 \in (-\infty, 0)$. Исследуется влияние корней характеристического уравнения $1 - E \exp(sX_1) = 0$ в полосе аналитичности преобразования Лапласа $E \exp(sX_1)$ на распределение супремума $\sup_{n \geq 0} S_n$. Аналогичная задача решается и для стационарного распределения осциллирующего случайного блуждания.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, супремум, корни характеристического уравнения, абсолютно непрерывная компонента, осциллирующее случайное блуждание, стационарное распределение, асимптотическое поведение.

1. Введение. Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с распределением F и математическим ожиданием $\mu = EX_1 \in (-\infty, 0)$. Обозначим $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. Рассмотрим случайную величину $M_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \geq 0} S_n$. С вероятностью единица $M_{\infty} < \infty$ [1, гл. XII, § 7].

Свойства распределения супремума M_{∞} изучались многими авторами. Так, в работах [2]–[6] рассматривался вопрос о существовании моментов $Ef(M_{\infty})$ при определенном выборе функции $f(x)$, а именно: при степенных функциях, правильно меняющихся на бесконечности функциях, полумультипликативных функциях и др.; причем в отношении работы [4] следует отметить, что в [4, теорема 5] речь идет о моментах вида $\int f(x) \pi(dx)$ стационарного распределения π цепи Маркова $Z_{n+1} = \max(Z_n + X_{n+1}, 0)$, однако хорошо известно [1, § VI.9 и § XVIII.5], что π совпадает с распределением супремума M_{∞} . В работах [7]–[13] основной акцент при изучении распределения супремума ставился на исследовании асимптотического поведения вероятности $P\{M_{\infty} > x\}$.

В настоящей работе речь пойдет о распределении супремума M_{∞} при выполнении перечисленных ниже условий. Распределение супремума M_{∞} в виде сверточного сомножителя входит в выражения для стационарных распределений *осциллирующего* и *почти однородного* случайных блужданий [13]. Это обстоятельство позволяет применить методику данной работы к изучению стационарных распределений указанных марковских случайных блужданий. Мы ограничимся лишь случаем осциллирующего случайного блуждания.

Основные предположения на распределение F , используемые в данной работе, таковы:

(а) преобразование Лапласа $\hat{F}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}} \exp(sx) F(dx)$ определено в полосе $\Pi(r) = \{s \in \mathbf{C}: 0 \leq \operatorname{Re} s \leq r\}$ при некотором $r > 0$: $\hat{F}(r) < \infty$;

(б) характеристическое уравнение $1 - \hat{F}(s) = 0$ имеет в полосе $\Pi(r)$ корни, отличные от нуля;

*Институт математики СО РАН, Университетский пр. 4, 630090 Новосибирск, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 96-01-01939.

(в) при некотором целом $m \geq 1$ распределение F^{m*} (m -кратная свертка распределения F) обладает ненулевой абсолютно непрерывной компонентой относительно меры Лебега.

Абсолютно непрерывную компоненту произвольного распределения G обозначим через G_c , а его сингулярную компоненту — через G_s : $G_s = G - G_c$.

Допустим, что $\hat{F}(s) \neq 1$ на прямой $\{s \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} s = r\}$ и преобразование Лапласа в точке r сингулярной компоненты $(F^{m*})_s$ свертки F^{m*} меньше единицы: $(F^{m*})_s(r) < 1$. Тогда в силу аналитичности функции $\hat{F}(s)$ в полосе $\Pi(r)$ имеется лишь конечное число корней характеристического уравнения [14, теорема 3], причем среди них только один — вещественный, который мы обозначим через q : $q \in (0, r]$. Пусть $\mathcal{X} = \{s \in \Pi(r): \hat{F}(s) = 1\} \setminus \{0\}$. Обозначим элементы множества $\mathcal{X}$ через $q, s_1, s_2, \dots, s_l$, а кратность корня s_j — через m_j ; это означает, что $1 - \hat{F}(s) = (s - s_j)^{m_j} F_j(s)$, где $F_j(s_j) \neq 0$. Если $s \in \mathcal{X}$ и $s \neq q$, то $\bar{s} \in \mathcal{X}$ и корень $\bar{s}$ имеет ту же кратность, что и s ; кроме того, $\operatorname{Im} s \neq 0$.

Пусть $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — конечная положительная измеримая по Борелю функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x+y) \leq \varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Обозначим через $S(\varphi)$ совокупность всех комплекснозначных σ -конечных мер ν таких, что $\|\nu\|_\varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) |\nu|(dx) < \infty$. Совокупность $S(\varphi)$ — банахова алгебра с нормой $\|\nu\|_\varphi$; операцией умножения элементов ν и κ из $S(\varphi)$ служит их свертка $\nu * \kappa$, а единицей — мера Дирака δ . Теория банаховых алгебр $S(\varphi)$ хорошо изложена в [15, гл. 4] (правда, там рассматриваются банаховы алгебры мер, сосредоточенные на $[0, \infty)$, а не на всей прямой $\mathbb{R}$, но это различие несущественно).

Обозначим через $\mathfrak{S}_\varphi$ банахову алгебру $S(\varphi)$ при следующем выборе полумультипликативной функции $\varphi(x)$: $\varphi(x) = \exp(rx)$ при $x \geq 0$ и $\varphi(x) \equiv 1$ при $x < 0$.

Определим оператор T на множестве конечных мер κ . Будем обозначать функцию распределения конечной меры κ той же самой буквой: $\kappa(x) = \kappa((-\infty, x])$. Положим $T(\kappa)(A) = \int_A (\delta(x) - \kappa(x)) dx$ (напомним: δ — мера Дирака, сосредоточенная в нуле). Если $\int_{\mathbb{R}} |x| |\kappa|(dx) < \infty$, то $T(\kappa)$ — конечная мера. Кроме того, $T(\hat{\kappa})(s) = (\hat{\kappa}(s) - \hat{\kappa}(0))/s$, $\operatorname{Re} s = 0$. Далее, если $\hat{F}(r) < \infty$ для некоторого $r > 0$, то $\int_0^\infty e^{rx} |T(F)|(dx) < \infty$.

2. Основной результат. Обозначим $D(x) = \mathbf{P}\{M_\infty \leq x\}$. Для преобразования Лапласа распределения D справедливо представление [1, гл. XVIII, § 5, теорема 2]

$$\hat{D}(s) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{0-}^{\infty} (e^{sx} - 1) F^{n*}(dx) \right\}, \quad \operatorname{Re} s \leq 0. \quad (1)$$

Обозначим через $G(x)$ функцию распределения первой отрицательной суммы S_{N-} , $N- \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{k \geq 1: S_k < 0\}$. Тогда [1, гл. XVIII, § 3, лемма 1]

$$1 - \hat{G}(s) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{0-} e^{sx} F^{n*}(dx) \right\}, \quad \operatorname{Re} s \geq 0.$$

Положим $a = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{S_n \geq 0\}/n \right\}$. По известной теореме о факторизации [1, гл. XVIII, § 3] имеем

$$1 - \hat{F}(s) = [a \hat{D}(s)]^{-1} \cdot [1 - \hat{G}(s)], \quad \operatorname{Re} s = 0,$$

или

$$\hat{D}(s) = \frac{1 - \hat{G}(s)}{a[1 - \hat{F}(s)]}, \quad \operatorname{Re} s = 0, s \neq 0. \quad (2)$$

Отношение, стоящее в правой части (2), представляет собой аналитическую функцию во внутренности полосы $\Pi(r)$, причем точки q и s_j суть изолированные особые точки

этой функции, являющиеся полюсами порядка 1 и m_j соответственно, $j = 1, \dots, l$. Пусть $\sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k B_{jk}/(s-s_j)^k$ — главная часть разложения в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки $s = s_j \in \mathcal{Z}$, $j = 1, 2, \dots, l$, аналитической функции

$$f(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - \widehat{G}(s)}{a[1 - \widehat{F}(s)]}$$

и, аналогично, пусть $-B_q/(s-q)$ — главная часть разложения функции $f(s)$ в ряд Лорана в окрестности точки $s = q \in \mathcal{Z}$. Обозначим через $\mathcal{E}_j$ комплекснозначную меру с плотностью $\mathbf{I}_{(0,\infty)}(x) \exp(-s_j x)$ ($\mathbf{I}_A(x)$ — индикаторная функция множества A); преобразование Лапласа этой меры равно $-1/(s-s_j)$, $\operatorname{Re}(s-s_j) < 0$. Далее, пусть $\mathcal{E}_q$ — мера с плотностью $\mathbf{I}_{(0,\infty)}(x) \exp(-qx)$.

Теорема 1. Пусть $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с распределением вероятностей F и математическим ожиданием $\mu = EX_1 \in (-\infty, 0)$. Предположим, что $\widehat{F}(r) < \infty$ и выполнены условия (а)–(в). Допустим, что $\widehat{F}(s) \neq 1$ на прямой $\{s \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} s = r\}$ и $(F^{m*})_s^-(r) < 1$ при некотором целом $m \geq 1$. Тогда для распределения D супремума M_∞ случайного блуждания $\{S_n\}$ справедливо представление

$$D = B_q \mathcal{E}_q + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} B_{jk} \mathcal{E}_j^{k*} + R,$$

где остаток R удовлетворяет неравенству $\int_0^\infty \exp(rx) |R|(dx) < \infty$.

Доказательство. Пусть $M = \sum_{j=1}^l m_j + 2$. Рассмотрим функцию

$$v(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{[1 - \widehat{F}(s)](s-r-1)^M}{s(s-q) \prod_{j=1}^l (s-s_j)^{m_j}}, \quad s \in \Pi(r) \setminus \mathcal{Z}, \quad s \neq 0.$$

Доопределим значения функции $v(s)$ в точках $0, q, s_j$, $j = 1, \dots, l$, по непрерывности. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1 в [16], устанавливаем, что функция $v(s)$ является преобразованием Лапласа $\widehat{V}(s)$ некоторой вещественнозначной меры $V \in \mathfrak{S}_r$ и, более того, функция $w(s) = 1/v(s)$ — преобразование Лапласа $\widehat{W}(s)$ некоторой меры $W \in \mathfrak{S}_r$. Положим $u(s) \stackrel{\text{def}}{=} [1 - \widehat{G}(s)]w(s)/a$. Очевидно, что $u(s)$ — преобразование Лапласа $\widehat{U}(s)$ некоторой меры $U \in \mathfrak{S}_r$. Имеем

$$\widehat{D}(s) = u(s) \frac{(s-r-1)^M}{s(s-q) \prod_{j=1}^l (s-s_j)^{m_j}}, \quad \operatorname{Re} s = 0.$$

Воспользуемся процедурой разложения рациональной функции на простые дроби. Получим

$$\widehat{D}(s) = u(s) + \frac{Au(s)}{s} + \frac{Bu(s)}{s-q} + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{jk}u(s)}{(s-s_j)^k}. \quad (3)$$

Преобразуем произвольное слагаемое в двойной сумме:

$$\frac{b_{jk}u(s)}{(s-s_j)^k} = b_{jk} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{u_{j,i}(s_j)}{(s-s_j)^{k-i}} + b_{jk}u_{j,k}(s), \quad (4)$$

где $u_{j,0}(s) \stackrel{\text{def}}{=} u(s)$, $u_{j,i}(s) \stackrel{\text{def}}{=} [u_{j,i-1}(s) - u_{j,i-1}(s_j)]/(s-s_j)$, $i = 1, \dots, k$. Последовательно применяя теорему 2 из [7, приложение 2], устанавливаем принадлежность

мер $U_{j,k}$ с преобразованиями Лапласа $\hat{U}_{j,k}(s) = u_{j,k}(s)$, $k = 1, \dots, m_j$, $j = 1, \dots, l$, к банаховой алгебре $\mathfrak{S}_r$. Наконец,

$$\frac{Bu(s)}{s-q} = \frac{Bu(q)}{s-q} + \frac{B[u(s) - u(q)]}{s-q} = -\frac{B_q}{s-q} + Bu_q(s), \quad (5)$$

где по той же теореме $u_q(s)$ — преобразование Лапласа $\hat{U}_q(s)$ некоторой меры $U_q \in \mathfrak{S}_r$. Положим

$$R \stackrel{\text{def}}{=} U - \frac{A \cdot T(G) \cdot W}{a} + B \cdot U_q + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} b_{jk} U_{j,k}.$$

В силу сказанного выше $R \in \mathfrak{S}_r$. Подставляя (4) и (5) в (3) и приводя подобные члены, получим

$$\hat{D}(s) = -\frac{B_q}{s-q} + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k \frac{B_{jk}}{(s-s_j)^k} + \hat{R}(s). \quad (6)$$

Тот факт, что в результате приведения подобных членов коэффициент при $(s-s_j)^{-k}$ будет в точности равен $(-1)^k B_{jk}$, следует из единственности разложения аналитической функции в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки. Для завершения доказательства теоремы 1 остается перейти от преобразований Лапласа к соответствующим мерам.

В качестве следствия теоремы 1 сформулируем утверждение об асимптотике вероятности $P\{M_\infty > x\}$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$P\{M_\infty > x\} = \frac{B_q e^{-qx}}{q} + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} B_{jk} \mathcal{E}_j^{k*}((x, \infty)) + R((x, \infty)),$$

причем $|R((x, \infty))| \leq |R|((x, \infty)) = o(e^{-rx})$, $x \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е. Полученное в [11, теорема 2] асимптотическое разложение для вероятности $P\{M_\infty > x\}$, учитывающее влияние корней характеристического уравнения, имеет следующий порядок убывания остатка: $R((x, \infty)) = o(x^m e^{-rx})$ при $x \rightarrow \infty$, где $m = \max_{1 \leq j \leq l} m_j - 1$.

3. Осциллирующее случайное блуждание.

О п р е д е л е н и е ([17]). Пусть $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ — две независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин. Последовательность случайных величин $\{Z_n\}_{n=0}^\infty$ называется *осциллирующим случайным блужданием* с управляющими последовательностями $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, если задано начальное значение Z_0 и последующие значения Z_n определяются рекуррентными соотношениями

$$Z_{n+1} = \begin{cases} Z_n + X_n, & \text{если } Z_n > 0, \\ Z_n + Y_n, & \text{если } Z_n < 0, \\ Z_n + W_n, & \text{если } Z_n = 0, \end{cases}$$

где $W_n = X_n$ с вероятностью p и $W_n = Y_n$ с вероятностью $1-p$.

Обозначим через R_X и R_Y множества возможных значений случайных величин X_1 и Y_1 . Мы будем предполагать, что множество $R_X \cup R_Y$ — *неарифметическое*, т. е. что его элементы нельзя представить в виде kd , где d — фиксированное положительное число, а $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел). Пусть F и F^* — распределения случайных величин X_1 и Y_1 с конечными математическими ожиданиями $\mu = EX_1 < 0$ и $\nu = EY_1 > 0$. В работе [18] получено явное выражение для

стационарного распределения π осциллирующего случайного блуждания $\{Z_n\}$ [18, теорема 2].

В этом параграфе мы исследуем влияние корней характеристических уравнений $1 - \hat{F}(s) = 0$ и $1 - \hat{F}^*(s) = 0$ на свойства стационарного распределения π осциллирующего случайного блуждания $\{Z_n\}$. С этой целью введем дополнительные обозначения.

Положим $S_0^* = 0$, $S_k^* = \sum_{i=1}^k Y_i$, $k \geq 1$. Пусть $L_\infty^* = \inf \{S_0^*, S_1^*, \dots\}$. Распределение случайной величины L_∞^* обозначим через D^* , а через F_- и F_+ обозначим соответственно распределения первой неположительной суммы S_N случайного блуждания $\{S_n\}$ и первой неотрицательной суммы $S_{N^*}^*$ случайного блуждания $\{S_n^*\}$; здесь $N = \inf \{k \geq 1: S_k \leq 0\}$ и $N^*(x) = \inf \{k \geq 1: S_k^* \geq 0\}$.

Определим распределения вероятностей следующим образом: $H \stackrel{\text{def}}{=} T(F_-)/ES_N$ и $H^* \stackrel{\text{def}}{=} T(F_+)/ES_{N^*}^*$, где T — оператор, введенный в п. 1.

В этих обозначениях представление для стационарного распределения π осциллирующего случайного блуждания $\{Z_n\}$, полученное в работе [18], принимает следующий вид

$$\pi = \frac{\nu}{\nu - \mu} D * H^* + \frac{-\mu}{\nu - \mu} D^* * H \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1 + \pi_2. \quad (7)$$

Поскольку сужение $\pi|_{(0, \infty)}$ меры π на $(0, \infty)$ совпадает с π_1 (и, аналогично, $\pi|_{(-\infty, 0)} = \pi_2$), задача изучения влияния корней характеристических уравнений $1 - \hat{F}(s) = 0$ и $1 - \hat{F}^*(s) = 0$ на свойства стационарного распределения π сводится к аналогичным задачам для мер π_1 и π_2 .

Далее, наряду с $\mathcal{Z}$ рассмотрим множество Ξ^* корней характеристического уравнения $1 - \hat{F}^*(s) = 0$, лежащих в полосе $\Pi(r)$. Если Ξ^* непусто, то его элементы обозначим через ξ_j^* , а их кратности — через m_j^* , $j = 1, \dots, l^*$. Допустим, что $\hat{F}(r)$ и $\hat{F}^*(r)$ конечны. Обозначим через $\sum_{k=1}^{n_j} (-1)^k C_{jk}/(s - s_j)^k$ главную часть разложения в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки $s = s_j \in \mathcal{Z}$, $j = 1, 2, \dots, l$, аналитической функции

$$f_1(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - \hat{G}(s)}{a[1 - \hat{F}(s)]} \hat{H}^*(s),$$

и аналогично $-C_q/(s - q)$ — главная часть разложения функции $f_1(s)$ в ряд Лорана в окрестности точки $q \in \mathcal{Z}$; здесь $n_j = m_j$, если $s_j \notin \Xi^*$, и $n_j = \max(0, m_j - m_j^*)$, если $s_j = \xi_j^* \in \Xi^*$. Отметим, что нули функции $\hat{H}^*(s)$ в полосе $\Pi(r)$ совпадают с корнями характеристического уравнения $1 - \hat{F}^*(s) = 0$, причем кратности нулей функции $\hat{H}^*(s)$ и соответствующих корней уравнения $1 - \hat{F}^*(s) = 0$ одинаковы. Действительно, это вытекает из факторизационного тождества

$$1 - \hat{F}^*(s) = [b^* \hat{D}^*(s)]^{-1} \cdot [1 - \hat{F}_+^*(s)], \quad 0 \leq \operatorname{Re} s \leq r, \quad (8)$$

где $b^* = \exp\{\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n^* < 0\}/n\}$; тождество (8) является следствием теоремы о факторизации, леммы 2 из [1, гл. XVIII, § 3] и выражения для $\hat{D}^*(s)$, симметричного представлению (1). Разделив обе части равенства (8) на $-s$, получим

$$\frac{\hat{F}^*(s) - 1}{s} = [b^* \hat{D}^*(s)]^{-1} ES_{N^*}^* \cdot \hat{H}^*(s), \quad 0 \leq \operatorname{Re} s \leq r,$$

откуда немедленно вытекает утверждение о нулях функции $\hat{H}^*(s)$.

Теорема 2. Пусть $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ — осциллирующее случайное блуждание и π — его стационарное распределение, определяемое по формуле (7). Предположим, что выполнены условия (а)–(в) и $\hat{F}^*(r) < \infty$. Допустим, что $\hat{F}(s) \neq 1$ на прямой

$\{s \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} s = r\}$ и $(F^{m*})_s(r) < 1$ при некотором целом $m \geq 1$. Тогда для сужения $\pi|_{(0, \infty)}$ стационарного распределения π на $(0, \infty)$ справедливо представление

$$\pi|_{(0, \infty)} = \frac{\nu}{\nu - \mu} \left[C_q \mathcal{E}_q + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} C_{jk} \mathcal{E}_j^{k*} + R_1 \right], \quad (9)$$

где остаток R_1 удовлетворяет неравенству $\int_0^\infty \exp(rx) |R_1|(dx) < \infty$.

Доказательство. Обозначим для краткости $h(s) = \hat{H}^*(s)$. Из соотношений (6) и (7) вытекает, что

$$\hat{\pi}_1(s) = \frac{\nu}{\nu - \mu} \left[-\frac{B_q}{s - q} + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} \frac{(-1)^k B_{jk}}{(s - s_j)^k} + \hat{R}(s) \right] h(s). \quad (10)$$

Рассмотрим выражение $h(s)/(s - s_j)^k$. Используя уже применявшийся прием, получим

$$\frac{h(s)}{(s - s_j)^k} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{h_{j,i}(s_j)}{(s - s_j)^{k-i}} + h_{j,k}(s),$$

где $h_{j,0}(s) \stackrel{\text{def}}{=} h(s)$, $h_{j,i}(s) \stackrel{\text{def}}{=} [h_{j,i-1}(s) - h_{j,i-1}(s_j)]/(s - s_j)$, $i = 1, \dots, k$. В силу теоремы 2 из [7, приложение 2] функции $h_{j,i}(s)$ суть преобразования Лапласа некоторых мер $H_{j,i} \in \mathfrak{G}_r$. Применяя указанную процедуру ко всем слагаемым двойной суммы и слагаемому $-B_q/(s - q)$ в правой части соотношения (10) и приводя подобные члены, получим соотношение (9), если $R_1 \stackrel{\text{def}}{=} R * H^* + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k B_{jk} H_{j,k} - B_q H_q \in \mathfrak{G}_r$, где $H_q \in \mathfrak{G}_r$ — мера с преобразованием Лапласа $\hat{H}_q(s) = [h(s) - h(q)]/(s - q)$. Теорема доказана.

Картина на отрицательной полуоси выглядит совершенно симметричным образом. Поэтому мы сформулируем соответствующую теорему без доказательства. Предварительно введем однако еще несколько обозначений.

Пусть $r^* < 0$ и $1 < \hat{F}^*(r^*) < \infty$. Обозначим $\Pi(r^*) = \{s \in \mathbb{C}: r^* \leq \operatorname{Re} s \leq 0\}$ и $\mathcal{Z}^* = \{s \in \Pi(r^*): \hat{F}^*(s) = 1\} \setminus \{0\}$. Допустим, что $\hat{F}^*(s) \neq 1$ на прямой $\{s \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} s = r^*\}$ и преобразование Лапласа в точке r^* сингулярной компоненты $[(F^*)^{m*}]_s$ свертки $(F^*)^{m*}$ меньше единицы: $[(F^*)^{m*}]_s(r^*) < 1$. Тогда множество $\mathcal{Z}^*$ конечно и содержит единственный вещественный корень q^* характеристического уравнения $1 - \hat{F}^*(s) = 0$. Обозначим элементы множества $\mathcal{Z}^*$ через q^* , s_1^* , s_2^* , $\dots$, $s_{l^*}^*$, а кратность корня s_j^* — через m_j^* , $j = 1, \dots, l^*$. Наряду с $\mathcal{Z}^*$ рассмотрим множество Ξ корней характеристического уравнения $1 - \hat{F}(s) = 0$, лежащих в полосе $\Pi(r^*)$. Если Ξ непусто, то его элементы обозначим через ξ_j , а их кратности — через m_j , $j = 1, \dots, l$ (оговоримся, что числа m_j , m_j^* , l и l^* необязательно те же, что в теореме 2). Допустим, что $\hat{F}(r^*) < \infty$. Обозначим через $\sum_{k=1}^{n_j} D_{jk}/(s - s_j^*)^k$ главную часть разложения в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки $s = s_j^* \in \mathcal{Z}^*$, $j = 1, 2, \dots, l$, аналитической функции

$$f_2(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - \hat{G}^*(s)}{a^*[1 - \hat{F}^*(s)]} \hat{H}(s),$$

где G^* — распределение первой положительной суммы случайного блуждания $\{S_n^*\}$ и $a^* = \exp\{\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}\{S_n^* \leq 0\}/n\}$; аналогично, $D_q/(s - q^*)$ — главная часть разложения функции $f_2(s)$ в ряд Лорана в окрестности точки $q^* \in \mathcal{Z}^*$. Кроме того, здесь $n_j = m_j$, если $s_j^* \notin \Xi$, и $n_j = \max(0, m_j - m_j^*)$, если $s_j^* = \xi_j \in \Xi$. Наконец, пусть $\mathcal{E}_j$ — мера с плотностью $\mathbf{I}_{(-\infty, 0)}(x) \exp(-s_j^* x)$, $j = 1, \dots, l$, и $\mathcal{E}_{q^*}$ — мера с плотностью $\mathbf{I}_{(-\infty, 0)}(x) \exp(-q^* x)$.

Теорема 3. Пусть $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ — осциллирующее случайное блуждание и π — его стационарное распределение, определяемое по формуле (7). Предположим, что выполнены условия (а)–(в), в которых символы r , F и $\Pi(r)$ заменены на r^* , F^* и $\Pi(r^*)$. Допустим, что $\bar{F}(r^*) < \infty$, $\bar{F}^*(s) \neq 1$ на прямой $\{s \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} s = r^*\}$ и $[(F^*)^{t*}]_s(r^*) < 1$ при некотором целом $t \geq 1$. Тогда для сужения $\pi|_{(-\infty, 0)}$ стационарного распределения π на $(-\infty, 0)$ справедливо представление

$$\pi|_{(-\infty, 0)} = \frac{-\mu}{\nu - \mu} \left[D_q \underline{\mathcal{E}}_q^* + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} D_{jk} \underline{\mathcal{E}}_j^{k*} + R_2 \right],$$

где остаток R_2 удовлетворяет неравенству $\int_{-\infty}^0 \exp(r^* x) |R_2|(dx) < \infty$.

Из теорем 2 и 3 можно без труда получить асимптотические разложения с оценками остатков для величин $\pi((x, \infty))$, $x \rightarrow \infty$, и $\pi((-\infty, x])$, $x \rightarrow -\infty$ (см. следствие теоремы 1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Наука, 1967, 752 с.
2. Kiefer J., Wolfowitz J. On the characteristics of the general queueing process, with applications to random walk. — Ann. Math. Statist., 1956, v. 27, p. 147–161.
3. Janson S. Moments for first passage times, the minimum, and related quantities for random walks with positive drift. — Adv. Appl. Probab., 1986, v. 18, p. 865–879.
4. Tweedie R. L. The existence of moments for stationary Markov chains. — J. Appl. Probab., 1983, v. 20, p. 191–196.
5. Alsmeyer G. On generalized renewal measures and certain first passage times. — Ann. Probab., 1992, v. 20, p. 1229–1247.
6. Sgibnev M. S. Submultiplicative moments of the supremum of a random walk with negative drift. — Statist. Probab. Lett., 1997, v. 32, p. 377–383.
7. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
8. Veraverbeke N. Asymptotic behaviour of Wiener–Hopf factors of a random walk. — Stochastic Process. Appl., 1977, v. 5, p. 27–37.
9. Сгибнев М. С. О распределении супремума сумм независимых слагаемых с отрицательным сносом. — Матем. заметки, 1977, т. 22, № 5, с. 763–770.
10. Embrechts P., Veraverbeke N. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. — Insurance: Mathematics and Economics, 1982, v. 1, p. 55–72.
11. Лотов В. И. Асимптотика распределения супремума последовательных сумм. — Матем. заметки, 1985, т. 38, № 5, с. 668–678.
12. Bertoin J., Doney R. A. Some asymptotic results for transient random walks. — J. Appl. Probab., 1996, v. 28, p. 206–226.
13. Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших отклонений для одномерных цепей Маркова. I. Стационарные распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 3–30.
14. Van der Lugten B. B. Asymptotic expansions in renewal theory. — Compos. Math., 1969, v. 21, № 4, p. 331–342.
15. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
16. Сгибнев М. С. Экспоненциальные оценки скорости сходимости для старших моментов восстановления. — Сиб. матем. журн., 1991, т. 32, № 4, с. 143–152.
17. Kemperman J. H. B. The oscillating random walk. — Stochastic Process. Appl., 1974, v. 2, p. 1–29.

18. Боровков А. А. Предельное распределение для осциллирующего случайного блуждания. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. XXV, в. 3, с. 663–665.

Поступила в редакцию
5.XII.1997

© 1998 г.

СЕВАСТЬЯНОВ Б. А.*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ ОСТАНОВЛЕННЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ¹⁾

Первоначальный многотипный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона

$$\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_m(t)), \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

порождает остановленный ветвящийся процесс $\xi(t)$, если при попадании $\mu(t)$ в некоторое конечное множество S процесс останавливается. Предполагается, что первоначальный ветвящийся процесс $\mu(t)$ докритичен и неразложим. Доказано, что вероятность вырождения

$$q_r^n = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = r \mid \xi(0) = n\}$$

для любых $r = (r_1, r_2, \dots, r_m) \in S$, $n = (n_1, \dots, n_m) \notin S$ при $\bar{n} = n_1 + \dots + n_m \rightarrow \infty$, $n_i/\bar{n} \rightarrow a_i$ асимптотически сближается с периодической с периодом 1 функцией от $\log_1/R \bar{n}$, где $R < 1$ — перронов корень матрицы математических ожиданий $A_{ij} = E\{\mu_j(1) \mid \mu(0) = e(i)\}$ первоначального докритического ветвящегося процесса $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_m(t))$, а вектор $e(i) = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{im})$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Ключевые слова и фразы: многотипный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, неразложимый ветвящийся процесс, докритический ветвящийся процесс, остановленный ветвящийся процесс, вероятности вырождения.

1. Постановка задачи. В работе рассматривается остановленный ветвящийся процесс с несколькими типами частиц, который является некоторой модификацией многотипного ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона. Обозначим $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ множество неотрицательных целых чисел. Буквами n, k, r, μ, ξ и др. будем обозначать m -мерные векторы. Обозначение 0 будет использоваться и как m -мерный вектор, и как числовой нуль. В дальнейшем будем также обозначать $a^b = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_m^{b_m}$, $a! = a_1! a_2! \dots a_m!$, где $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$, и $e(j) = (\delta_{j1}, \dots, \delta_{jm})$, δ_{ij} — символ Кронекера. Будем также пользоваться обозначением $\delta_{\alpha\beta} = \prod_{i=1}^m \delta_{\alpha_i\beta_i}$, $\alpha, \beta \in N_0^m$.

Положим $\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_m(t))$, $\mu_i(t) \in N_0$, где $\mu_i(t)$ — число частиц типа T_i в t -м поколении ветвящегося процесса с типами частиц $T_1, T_2, \dots, T_m$ и с дискретным временем $t = 0, 1, 2, \dots$. Производящие функции этого процесса

$$h_i(s_1, s_2, \dots, s_m) = h_i(s) = E\{s^{\mu(1)} \mid \mu(0) = e(i)\},$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 96-01-00338, 96-15-96092, и INTAS-RFBR 95-0099.