Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Севастьянов, Асимптотическое поведение вероятностей вырождения остановленных ветвящихся процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 2, 390–397

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:04:19

18. Боровков А. А. Предельное распределение для осциллирующего случайного блуждания. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. XXV, в. 3, с. 663–665.

Поступила в редакцию
5.XII.1997

© 1998 г.

СЕВАСТЬЯНОВ Б. А.*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ ОСТАНОВЛЕННЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ¹⁾

Первоначальный многотипный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона

$$\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_m(t)), \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

порождает остановленный ветвящийся процесс $\xi(t)$, если при попадании $\mu(t)$ в некоторое конечное множество S процесс останавливается. Предполагается, что первоначальный ветвящийся процесс $\mu(t)$ докритичен и неразложим. Доказано, что вероятность вырождения

$$q_r^n = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = r \mid \xi(0) = n\}$$

для любых $r = (r_1, r_2, \dots, r_m) \in S$, $n = (n_1, \dots, n_m) \notin S$ при $\bar{n} = n_1 + \dots + n_m \rightarrow \infty$, $n_i/\bar{n} \rightarrow a_i$ асимптотически сближается с периодической с периодом 1 функцией от $\log_1/R \bar{n}$, где $R < 1$ — перронов корень матрицы математических ожиданий $A_{ij} = E\{\mu_j(1) \mid \mu(0) = e(i)\}$ первоначального докритического ветвящегося процесса $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_m(t))$, а вектор $e(i) = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{im})$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Ключевые слова и фразы: многотипный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, неразложимый ветвящийся процесс, докритический ветвящийся процесс, остановленный ветвящийся процесс, вероятности вырождения.

1. Постановка задачи. В работе рассматривается остановленный ветвящийся процесс с несколькими типами частиц, который является некоторой модификацией многотипного ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона. Обозначим $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ множество неотрицательных целых чисел. Буквами n, k, r, μ, ξ и др. будем обозначать m -мерные векторы. Обозначение 0 будет использоваться и как m -мерный вектор, и как числовой нуль. В дальнейшем будем также обозначать $a^b = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_m^{b_m}$, $a! = a_1! a_2! \dots a_m!$, где $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$, и $e(j) = (\delta_{j1}, \dots, \delta_{jm})$, δ_{ij} — символ Кронекера. Будем также пользоваться обозначением $\delta_{\alpha\beta} = \prod_{i=1}^m \delta_{\alpha_i\beta_i}$, $\alpha, \beta \in N_0^m$.

Положим $\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_m(t))$, $\mu_i(t) \in N_0$, где $\mu_i(t)$ — число частиц типа T_i в t -м поколении ветвящегося процесса с типами частиц $T_1, T_2, \dots, T_m$ и с дискретным временем $t = 0, 1, 2, \dots$. Производящие функции этого процесса

$$h_i(s_1, s_2, \dots, s_m) = h_i(s) = E\{s^{\mu(1)} \mid \mu(0) = e(i)\},$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 96-01-00338, 96-15-96092, и INTAS-RFBR 95-0099.

где $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$, запишем в векторной форме $h(s) = (h_1(s), \dots, h_m(s))$. В силу условия независимости размножения частиц ветвящегося процесса производящая функция чисел частиц $\mu(1) = (\mu_1(1), \dots, \mu_m(1))$ типов $T_1, \dots, T_m$ в первом поколении ветвящегося процесса, начинающегося с совокупности частиц $\mu(0) = n \in N_0^m$, равна

$$h^n(s) = h_1^{n_1}(s) \dots h_m^{n_m}(s) = E\{s^{\mu(1)} \mid \mu(0) = n\}.$$

Разлагая $h^n(s)$ в ряд, получаем

$$h^n(s) = \sum_{k \in N_0^m} p_{nk} s^k,$$

где p_{nk} — вероятность того, что совокупность первоначальных частиц $\mu(0) = n$, определяемая вектором $n \in N_0^m$, превращается в первом поколении в совокупность частиц $\mu(1) = k \in N_0^m$.

Зафиксируем конечное подмножество $S \subset N_0^m$, не содержащее вектор $0 \in N_0^m$. Остановленным или S -остановленным ветвящимся процессом назовем процесс $\xi(t)$, определяемый для $t = 0, 1, 2, \dots$ равенствами

$$\xi(t) = \begin{cases} \mu(t), & \text{если } \forall v, 0 \leq v < t, \mu(v) \notin S, \\ \mu(u), & \text{если } \forall v, 0 \leq v < u, \mu(v) \notin S, \mu(u) \in S, u < t. \end{cases}$$

Таким образом, для S -остановленного ветвящегося процесса $\xi(t)$ точки множества S являются дополнительными состояниями поглощения по сравнению с первоначальным процессом $\mu(t)$, который имел только одну точку поглощения 0. Поэтому в отличие от процесса $\mu(t)$ в S -остановленном ветвящемся процессе $\xi(t)$ отдельные частицы в t -м поколении независимо размножаются по вероятностному закону, определяемому производящей функцией $h(s)$, только в том случае, когда $\xi(t) \notin S$. Как только случайный вектор $\xi(t)$ попадает в S , дальнейшая эволюция процесса прекращается.

Далее мы будем обозначать

$$p_{nk}(l) = P\{\mu(t+l) = k \mid \mu(t) = n\} = P\{\mu(l) = k \mid \mu(0) = n\};$$

в частности, $p_{nk}(1) = p_{nk}$. В этих обозначениях $p_{n0}(l)$ представляет собой вероятность вырождения первоначального процесса $\mu(t)$ к моменту времени l . Поскольку процесс Гальтона–Ватсона $\mu(t)$ есть счетная цепь Маркова, мы имеем

$$p_{\alpha\beta}(t_1 + t_2) = \sum_{\gamma \in N_0^m} p_{\alpha\gamma}(t_1) p_{\gamma\beta}(t_2). \quad (1)$$

Введем также вероятности $\tilde{p}_{\alpha r}(l)$, определяемые равенствами $\tilde{p}_{\alpha r}(1) = p_{\alpha r}$ и при $l \geq 2$

$$\tilde{p}_{\alpha r}(l) = \sum_{\beta \notin S} p_{\alpha\beta} \tilde{p}_{\beta r}(l-1). \quad (2)$$

Таким образом, $\tilde{p}_{\alpha r}$ — это условная вероятность события

$$\{\mu(l) = r\} \cap \bigcap_{l'=1}^{l-1} \{\mu(l') \notin S\}$$

при условии $\{\mu(0) = \alpha\}$.

2. Вероятности вырождения. Пусть

$$q_r^n(t) = P\{\xi(t) = r \mid \xi(0) = n\}$$

— вероятность вырождения в состояние $r \in S$ к моменту времени t S -остановленного ветвящегося процесса $\xi(t)$, начинающегося с состояния $\xi(0) = n \in N_0^m$.

Теорема 1. Для любых $n \notin S$, $n \neq 0$, $r \in S$, $t \geq 1$ имеет место следующее представление:

$$q_r^n(t) = \sum_{\alpha \in S} \sum_{l=1}^t c_{\alpha r}(t, l) p_{n\alpha}(l), \quad (3)$$

где коэффициенты $c_{\alpha r}(t, l)$ удовлетворяют соотношениям

$$c_{\alpha r}(t+1, l+1) = c_{\alpha r}(t, l), \quad (4)$$

$$c_{\alpha r}(t+1, 1) = \delta_{\alpha r} - \sum_{l=1}^{t-1} \tilde{p}_{\alpha r}(l), \quad c_{\alpha r}(1, 1) = \delta_{\alpha r}. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть в ветвящемся процессе $\mu(t)$ начальное значение $\mu(0) = n \notin S$, $n \neq 0$. Введем случайную величину

$$\tau = \min \{t: \mu(t) \in S\}.$$

Тогда при $t \geq l$

$$P\{\xi(t) = r, \tau = l \mid \xi(0) = n\} = P\{\xi(l) = r \mid \xi(0) = n, \tau = l\} = \tilde{p}_{nr}(l).$$

Применяя к вероятности $\tilde{p}_{nr}(l)$, $l \geq 2$, формулу (2), получаем

$$\tilde{p}_{nr}(l) = \sum_{\alpha \notin S} p_{n\alpha} \tilde{p}_{\alpha r}(l-1) = \sum_{\alpha \notin S} p_{n\alpha}(2) \tilde{p}_{\alpha r}(l-2) - \sum_{\alpha \in S} p_{n\alpha} \tilde{p}_{\alpha r}(l-1).$$

Аналогично преобразуем первую сумму в правой части этой формулы:

$$\sum_{\alpha \notin S} p_{n\alpha}(2) \tilde{p}_{\alpha r}(l-2) = \sum_{\alpha \notin S} p_{n\alpha}(3) \tilde{p}_{\alpha r}(l-3) - \sum_{\alpha \in S} p_{n\alpha}(2) \tilde{p}_{\alpha r}(l-2).$$

Производя такие же преобразования в суммах $\sum_{\alpha \notin S} p_{n\alpha}(i) \tilde{p}_{\alpha r}(l-i)$, получаем

$$\tilde{p}_{nr}(l) = p_{nr}(l) - \sum_{\alpha \in S} \sum_{i=1}^{l-1} p_{n\alpha}(l-i) \tilde{p}_{\alpha r}(i), \quad l = 2, \dots, t, \quad \tilde{p}_{nr}(l) = p_{nr}. \quad (6)$$

Так как $q_r^n(t) = \sum_{l=1}^t \tilde{p}_{nr}(l)$, то из формул (6) следуют соотношения (4) и (5). Теорема доказана. Далее на процесс $\mu(t)$ мы будем налагать некоторые условия.

Условие А). $\mu(t)$ — неразложимый непериодический докритический ветвящийся процесс.

Теорема А. При выполнении условия А) матрица математических ожиданий $A = \|A_{ij}\|$, где $A_{ij} = E\{\mu_j(1) \mid \mu(0) = e(i)\}$, неразложима и ее перронов корень $R < 1$. При этом элементы

$$A_{ij}(t) = E\{\mu_j(t) \mid \mu(0) = e(i)\}$$

матрицы $A^t = \|A_{ij}(t)\|$ при $t \rightarrow \infty$ имеют следующее асимптотическое поведение:

$$A_{ij}(t) = d_{ij} R^t (1 + o(1)), \quad (7)$$

где $d_{ij} > 0$.

Доказательство см. в [1, гл. 4, п. 7].

У с л о в и е В). При любых $i, j = 1, 2, \dots, m$ математические ожидания

$$E\{\mu_j(1) \log \mu_j(1) \mid \mu(0) = e(i)\}$$

конечны.

Теорема В. При выполнении условий А) и В) для любого $j = 1, 2, \dots, m$ и $l \rightarrow \infty$

$$1 - p_{e(j),0}(l) = K_j R^l (1 + o(1)), \quad (8)$$

где $K_j > 0$. Существуют также пределы условных вероятностей

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\mu(t) = k \mid \mu(0) = n, \mu(t) \neq 0\} = p_k^*;$$

производящая функция $\varphi(s) = \sum_{k \in N_0^m} p_k^* s^k$ не зависит от n и удовлетворяет функциональному уравнению

$$1 - \varphi(h(s)) = R(1 - \varphi(s)) \quad (9)$$

и равенствам $\varphi(0, \dots, 0) = 0$, $\varphi(1, \dots, 1) = 1$. Распределение $\{p_k^*\}$ имеет положительные конечные математические ожидания

$$\varphi_j(1) = \lim_{s \uparrow 1} \varphi_j(s) = \sum_{k \in N_0^m} k_j p_k^*,$$

где

$$\varphi_j(s) = \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s_j}.$$

Доказательство см. в [2] и в [1, гл. 6, п. 2].

У с л о в и е С). Пусть $h_{ij}(s)$ — это производные производящих функций $h_i(s)$:

$$h_{ij}(s) = \frac{\partial h_i(s)}{\partial s_j}.$$

Для любого j , $1 \leq j \leq m$, найдется такое i , $1 \leq i \leq m$, что $h_{ij}(0)$ положительно.

В силу равенства

$$h_{ij}(0) = p_{e(i),e(j)} = P\{\mu(1) = e(j) \mid \mu(0) = e(i)\}$$

это означает, что соответствующие вероятности $p_{e(i),e(j)}$ положительны.

Далее нам понадобится

Лемма 1. При выполнении условий А), В) и С) пределы условных вероятностей

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\mu(t) = e(i) \mid \mu(0) = n, \mu(t) \neq 0\} = p_{e(i)}^* > 0$$

при всех $i = 1, 2, \dots, m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Производящая функция $\varphi(s) = \sum_k p_k^* s^k$ в теореме В удовлетворяет уравнению (9). Если в этом уравнении заменить s на $h(s)$ и затем повторить эту замену t раз, то мы получим равенство

$$1 - \varphi(h(t, s)) = R^t (1 - \varphi(s)), \quad (10)$$

где $h(t, s)$ есть t -я итерация функции $h(s)$, т.е. $h(1, s) = h(s)$, $h(2, s) = h(h(s))$, ..., $h(t, s) = h(t-1, h(s))$. Дифференцируя равенство (10) по s_j в точке $s = 0$, получаем

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i(h(t, 0)) h_{ij}(t, 0) = R^t \varphi_j(0) = R^t p_{e(j)}^*, \quad (11)$$

где $h_{ij}(t, s) = \partial h_i(t, s) / \partial s_j$. При $t \rightarrow \infty$ все координаты $h(t, 0)$ стремятся к 1, поэтому в силу теоремы В найдутся такие T и C_1 , что при $t > T$ все $\varphi_i(h(t, 0)) \geq C_1 > 0$. Из условия С) следует, что для любого j , $1 \leq j \leq m$, можно найти такое i , что $h_{ij}(t, 0) > 0$, так как для любых $i_1, i_2, \dots, i_{t+1}$

$$h_{i_1 i_{t+1}}(t, 0) \geq \prod_{l=1}^t h_{i_l i_{l+1}}(0).$$

Поэтому из (11) следует, что для любого j , $1 \leq j \leq m$,

$$R^t p_{e(j)}^* \geq C_1 \sum_{i=1}^t h_{ij}(t, 0) > 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. При выполнении условия А) предельные вероятности вырождения $q_r^n = \lim_{t \rightarrow \infty} q_r^n(t)$, $\forall n \notin S$, $r \in S$, представимы в виде ряда

$$q_r^n = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in S} c_{\alpha r} p_{n\alpha}(l), \quad (12)$$

где $c_{\alpha r} = \lim_{t \rightarrow \infty} c_{\alpha r}(t, l) = \delta_{\alpha r} - \sum_{u=1}^{\infty} \tilde{p}_{\alpha r}(u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вероятности $q_r^n(t)$ возрастают с ростом t и ограничены сверху 1. Поэтому существуют пределы $q_r^n = \lim_{t \rightarrow \infty} q_r^n(t)$.

В формуле (3) слева и справа можно перейти к пределу при $t \rightarrow \infty$, так как при любых $\alpha, r \in S$ выполнено неравенство $\tilde{p}_{\alpha r}(l) \leq p_{\alpha r}(l)$, а из неравенства Чебышева и теоремы А следует

$$\begin{aligned} p_{\alpha r}(l) &\leq P \left\{ \sum_{j=1}^m \mu_j(l) \geq 1 \mid \mu(0) = \alpha \right\} \leq \sum_{j=1}^m E \{ \mu_j(l) \mid \mu(0) = \alpha \} \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^m d_{ij} R^l (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Поэтому ряды $\sum_l \tilde{p}_{\alpha r}(l)$ и $\sum_l p_{\alpha r}(l)$ сходятся. Отсюда следует (12).

Так как $\lim_{t \rightarrow \infty} P \{ \mu(t) = 0 \} = 1$, то из теоремы 2 следует

$$q_0^n = \lim_{t \rightarrow \infty} q_0^n(t) = 1 - \sum_{r \in S} q_r^n.$$

3. Асимптотическое поведение q_r^n при $n \rightarrow \infty$. Далее мы будем предполагать, что выполнены условия А) и В).

Теорема 3. Пусть выполнены условия А), В) и $\lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} (n_i / \bar{n}) = a_i$, где $n = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, $\bar{n} = n_1 + n_2 + \dots + n_m$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$. В этом случае при $\bar{n} \rightarrow \infty$ для любого $r \in S$

$$q_r^n - H(\log_R \bar{n}) \rightarrow 0, \quad (13)$$

где $H(x)$ — периодическая функция с периодом 1, определяемая равенствами

$$H(x) = \sum_{j=1}^{r_0} c_j H_j(x), \quad H_j(x) = \sum_{L=-\infty}^{\infty} R^{j(L+x)} e^{-(a, K) R^{L+x}},$$

константы $c_j = c_j(r, a, p^*)$ зависят от r , a и предельного распределения $p^* = \{p_k^*\}$ в лемме 1, $(a, K) = \sum_{i=1}^m a_i K_i$, K_i определены в (8), $r_0 = \max \{ \bar{r} = r_1 + r_2 + \dots + r_m : r \in S \}$.

Доказательство. Обозначим $\eta(l) = (\eta_1(l), \dots, \eta_m(l))$ случайный вектор, компоненты которого $\eta_i(l)$ равны числу начальных частиц типа T_i , имеющих непустое потомство в процессе $\mu(l)$ к поколению l . Тогда для любых $\alpha \in S$, $l \geq 1$ и $n \notin S$ имеем

$$\begin{aligned} p_{n\alpha}(l) &= \sum_{\{\beta: 1 \leq \bar{\beta} \leq \bar{\alpha}\}} P\{\mu(l) = \alpha, \eta(l) = \beta \mid \mu(0) = n\} \\ &= \sum_{\{\beta: 1 \leq \bar{\beta} \leq \bar{\alpha}\}} P\{\eta(l) = \beta \mid \mu(0) = n\} P\{\mu(l) = \alpha \mid \mu(0) = \beta, \eta(l) = \beta\}. \end{aligned} \quad (14)$$

В условиях теоремы 3

$$\begin{aligned} P\{\eta(l) = \beta \mid \mu(0) = n\} &= \prod_{i=1}^m \binom{n_i}{\beta_i} (p_{e(i),0}(l))^{n_i - \beta_i} (1 - p_{e(i),0}(l))^{\beta_i} \\ &= \bar{n}^{\bar{\beta}} \frac{\alpha^{\beta}}{\beta!} K^{\beta} R^{l\bar{\beta}} e^{-(a,K)\bar{n}R^l(1+o(1))} (1+o(1)) \end{aligned} \quad (15)$$

и не зависящая от n вероятность

$$\begin{aligned} &P\{\mu(l) = \alpha \mid \mu(0) = \beta, \eta(l) = \beta\} \\ &= \sum_{\{\alpha^{(jk)}\}} \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{\beta_k} P\{\mu^{(jk)}(l) = \alpha^{(jk)} \mid \mu^{(jk)}(0) = e(k), \mu^{(jk)}(l) \neq 0\} \\ &\rightarrow \sum_{\{\alpha^{(jk)}\}} \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{\beta_k} p_{\alpha^{(jk)}}^* \quad \text{при } l \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mu^{(jk)}(t)$ — ветвящиеся процессы, имеющие то же распределение, что и $\mu(t)$, а суммирование в $\sum_{\{\alpha^{(jk)}\}}$ ведется по всем таким $\{\alpha^{(jk)}\}$, для которых $\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{\beta_k} \alpha^{(jk)} = \alpha$. Из (14)–(16) следует, что общий член ряда (12) при $\bar{n} \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} &(1+o(1)) \sum_{\alpha \in S} \sum_{\beta: 1 \leq \bar{\beta} \leq \bar{\alpha}} g(\alpha, \beta) \sum_{\bar{\beta}=1}^{r_0} R^{(l+\log_R \bar{n})\bar{\beta}} \\ &\quad \times \exp\left\{-(a, K) R^{l+\log_R \bar{n}} (1+o(1))\right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $g(\alpha, \beta)$ — не зависящие от n и l величины. Нетрудно заметить также, что при $\bar{n} \rightarrow \infty$ в формуле (12) каждый член ряда с любым постоянным $l \geq 1$ стремится к нулю.

Выберем $L_1 < L_2$ такими, чтобы суммы

$$\sum_{L=L_2}^{\infty} R^{\bar{\beta}L} e^{-(a,K)R^L} \quad \text{и} \quad \sum_{L=-\infty}^{L_1} R^{\bar{\beta}L} e^{-(a,K)R^L} \quad (18)$$

были малы. Положим $l_i + \log_R \bar{n} = L_i + x_{i\bar{n}}$, $i = 1, 2$, где $0 \leq x_{i\bar{n}} \leq 1$. Из (17) и (18) следует, что можно выбрать такие L_1 , L_2 и n_0 , чтобы «хвосты» суммы в формуле (12) в пределах от 1 до l_1 и от l_2 до бесконечности были бы меньше $\varepsilon/2$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Члены ряда (12) с $l_1 < l < l_2$ можно заменить предельными выражениями (17), так как при $n \rightarrow \infty$ такие $l \rightarrow \infty$. Всего слагаемых в сумме $\sum_{l=l_1+1}^{l_2-1}$ в формуле (12) конечное число $l_2 - l_1 - 1 = L_2 - L_1 - 1$, поэтому n_0 можно выбрать таким, чтобы для всех $n \geq n_0$ ошибка аппроксимации также была меньше $\varepsilon/2$. Отсюда следует утверждение теоремы, так как $\varepsilon > 0$ произвольно.

Из доказательства теоремы еще не ясно, будут ли в формуле (13) коэффициенты c_j такими, что функция $H(x) > 0$. Выяснению этого обстоятельства служит следующая

Лемма 2. При выполнении условий А), В) и С) существует такая константа $\theta > 0$, что при некотором числе n_0 для всех n с $\bar{n} \geq n_0$ и всех $r \in S$

$$q_r^n > \theta.$$

Доказательство. Так как при любом t $q_r^n = \lim_{t \rightarrow \infty} q_r^n(t) \geq q_r^n(t)$, то нам достаточно доказать, что неравенство $q_r^n(t) \geq \theta > 0$ выполняется при сколь угодно больших t для всех $r \in S$ и n с $\bar{n} \geq n_0$. Воспользуемся введенным выше случайным вектором $\eta(t)$ и введем еще случайный вектор $\eta'_i(t-1) = (\eta'_1(t-1), \eta'_2(t-1), \dots, \eta'_m(t-1))$, где $\eta'_i(t-1)$ равны числу первоначальных частиц типа T_i , потомство которых не пусто в $(t-1)$ -м поколении и пусто в t -м поколении. При $n = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, $n_1 \geq r_0 + 1$, где $r_0 = \max_{r \in S} \bar{r}$, воспользуемся неравенством

$$\begin{aligned} q_r^n(t) &= P\{\xi(t) = r \mid \xi(0) = n\} \\ &\geq P\{\mu(t) = r, \eta'(t-1) = (r_0 + 1 - \bar{r})e(1), \eta(t) = \bar{r}e(1) \mid \mu(0) = n\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Правую часть (19) можно записать как произведение $P_1(n, t) P_2(t)$, где

$$P_1(n, t) = P\{\eta'(t-1) = (r_0 + 1 - \bar{r})e(1), \eta(t) = \bar{r}e(1) \mid \mu(0) = n\}$$

зависит от n и t , а

$$P_2(t) = P\{\mu(t) = r \mid \mu(0) = n, \eta'(t-1) = (r_0 + 1 - \bar{r})e(1), \eta(t) = \bar{r}e(1)\}$$

зависит только от t . Из определения случайных векторов $\eta(t)$ и $\eta'(t-1)$ следует

$$\begin{aligned} P_1(n, t) &= \frac{n_1!}{(n_1 - r_0 - 1)!(r_0 + 1 - \bar{r})!\bar{r}} [p_{e(1),0}(t-1)]^{n_1 - r_0 - 1} \\ &\quad \times (1 - p_{e(1),0}(t-1))^{r_0 + 1 - \bar{r}} (1 - p_{e(1),0}(t))^{\bar{r}} \\ &\quad \times \prod_{i=2}^m [p_{e(i),0}]^{n_i} P\{\mu'(t) = 0 \mid \mu'(0) = (r_0 + 1 - \bar{r})e(1), \mu'(t-1) \neq 0\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$P_2(t) = \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{r_k} P\{\mu^{(jk)}(t) = e(k) \mid \mu^{(jk)}(t) \neq 0, \mu^{(jk)}(0) = e(1)\}. \quad (21)$$

Здесь $\mu(t)$, $\mu'(t)$, $\mu^{(jk)}(t)$ — ветвящиеся процессы, эволюция которых определяется производящей функцией $h(s) = (h_1(s), h_2(s), \dots, h_m(s))$.

Выбирая далее $t \rightarrow \infty$ так, чтобы $\bar{n}R^t \rightarrow V > 0$ при $\bar{n} \rightarrow \infty$, получаем в правой части равенства (20) положительную константу, умноженную на стоящую в конце формулы условную вероятность. С помощью предельного соотношения

$$P\{\mu'(t-1) = k \mid \mu'(t-1) \neq 0\} \rightarrow p_k^*$$

(теорема В) и равенства $\sum_{k \in N_0^m} p_k^* p_{e(1),0}^{k_1} \dots p_{e(m),0}^{k_m} = \varphi(h(0))$ получаем, что эта условная вероятность в пределе равна $\varphi(h(0)) > 0$. Выражение (21) не зависит от n и при $t \rightarrow \infty$ равно произведению $\prod_{i=1}^m [p_{e(i)}^*]^{r_i}$. По лемме 1 это произведение положительно, что и завершает доказательство.

З а м е ч а н и е. Условие С) носит технический характер. Если условие С) не выполняется, то в теореме 3 утверждение (13) сохраняется, однако для некоторых $r \in S$ имеет место равенство $q_r^n = 0$ ($\forall n$).

Частным случаем остановленных ветвящихся процессов являются ограниченные снизу ветвящиеся процессы, которые были рассмотрены в работах [3] (случай $m = 1$ и $S = \{1\}$) и [4] (случай $m > 1$ и $S = \{e(i_1), \dots, e(i_{m_1})\}$, $m_1 \leq m$). Ограниченные снизу ветвящиеся процессы с непрерывным временем и с одним типом частиц рассматривались также в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
2. Kesten H., Stigum B. P. A limit theorem for multidimensional Galton–Watson processes. — Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, № 5, p. 1211–1223.
3. Севастьянов Б. А. Вероятности вырождения ограниченных снизу ветвящихся процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 3, с. 556–564.
4. Севастьянов Б. А. Вероятности вырождения ограниченных снизу докритических многотипных ветвящихся процессов. — Дискретн. матем., 1997, т. 9, в. 1, с. 3–11.
5. Севастьянов Б. А. Ограниченные снизу ветвящиеся процессы. — Докл. АН СССР, 1978, т. 238, с. 511–513.

Поступила в редакцию
4.XII.1997

© 1998 г.

ШЕРСТНЕВ В. И.*

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА,
РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННАЯ НА
КОНЕЧНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ,
КАК СУММА НЕЗАВИСИМЫХ СЛАГАЕМЫХ¹⁾

В статье найдены необходимые и достаточные условия того, что сумма независимых случайных величин на конечной абелевой группе имеет равномерное распределение.

Ключевые слова и фразы: распределение на конечных группах, равномерное распределение.

1. Введение. Пусть G — абелева группа порядка m . Рассмотрим независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$, принимающие значения в G . Цель данной работы — найти необходимые и достаточные условия на распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$, при выполнении которых сумма $\xi_1 + \dots + \xi_n$ имеет равномерное распределение на G .

Очевидно, что если хотя бы одно из слагаемых равномерно распределено на G , то сумма также имеет равномерное распределение. Но верно ли обратное? Для циклических групп этот вопрос исследовался в работах [1] и [2]. В [1] утверждалось,

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 96-01-00531, 96-15-96092.