Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Шерстнев, Случайная величина, равномерно распределенная на конечной абелевой группе, как сумма независимых слагаемых, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 2, 397–403

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:32:43

Частным случаем остановленных ветвящихся процессов являются ограниченные снизу ветвящиеся процессы, которые были рассмотрены в работах [3] (случай $m = 1$ и $S = \{1\}$) и [4] (случай $m > 1$ и $S = \{e(i_1), \dots, e(i_{m_1})\}$, $m_1 \leq m$). Ограниченные снизу ветвящиеся процессы с непрерывным временем и с одним типом частиц рассматривались также в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
2. Kesten H., Stigum B. P. A limit theorem for multidimensional Galton–Watson processes. — Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, № 5, p. 1211–1223.
3. Севастьянов Б. А. Вероятности вырождения ограниченных снизу ветвящихся процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 3, с. 556–564.
4. Севастьянов Б. А. Вероятности вырождения ограниченных снизу докритических многотипных ветвящихся процессов. — Дискретн. матем., 1997, т. 9, в. 1, с. 3–11.
5. Севастьянов Б. А. Ограниченные снизу ветвящиеся процессы. — Докл. АН СССР, 1978, т. 238, с. 511–513.

Поступила в редакцию
4.XII.1997

© 1998 г.

ШЕРСТНЕВ В. И.*

**СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА,
РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННАЯ НА
КОНЕЧНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ,
КАК СУММА НЕЗАВИСИМЫХ СЛАГАЕМЫХ¹⁾**

В статье найдены необходимые и достаточные условия того, что сумма независимых случайных величин на конечной абелевой группе имеет равномерное распределение.

Ключевые слова и фразы: распределение на конечных группах, равномерное распределение.

1. Введение. Пусть G — абелева группа порядка m . Рассмотрим независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$, принимающие значения в G . Цель данной работы — найти необходимые и достаточные условия на распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$, при выполнении которых сумма $\xi_1 + \dots + \xi_n$ имеет равномерное распределение на G .

Очевидно, что если хотя бы одно из слагаемых равномерно распределено на G , то сумма также имеет равномерное распределение. Но верно ли обратное? Для циклических групп этот вопрос исследовался в работах [1] и [2]. В [1] утверждалось,

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 96-01-00531, 96-15-96092.

что рассматриваемая сумма независимых случайных величин имеет равномерное распределение тогда и только тогда, когда равномерно распределено одно из слагаемых, однако в [2] был построен пример двух независимых случайных величин, имеющих неравномерные распределения на циклической группе четвертого порядка, сумма которых распределена равномерно. Более общий способ построения подобных примеров на циклических группах, использующий метод производящих функций, был предложен А. С. Амбросимовым и Н. Н. Шаровым. Классической работой по суммированию независимых случайных величин на конечных абелевых группах является работа [3].

В п. 2 настоящей работы для произвольной конечной абелевой группы описаны все возможные распределения независимых слагаемых, сумма которых распределена равномерно. В п. 3, в качестве примеров, рассматриваются случаи $m = 4$ и $m = 5$.

2. Основные результаты. Рассмотрим аддитивную абелеву группу G . Абелева группа разлагается в прямую сумму циклических подгрупп. Предположим, что группа G разлагается в прямую сумму циклических подгрупп порядков $m_1, \dots, m_s$. Теперь любой элемент g группы G можно представить в виде вектора $g = (a_1, \dots, a_s)$, где a_j — вычет по модулю m_j , $j = 1, \dots, s$. Упорядочим векторы g в лексикографическом порядке. Упорядоченные элементы обозначим $g_0, \dots, g_{m-1}$ ($g_0 = 0$ является нулевым элементом группы).

Вероятностное распределение $p^{(j)} = P\{\xi = g_j\}$ случайной величины ξ теперь задается вектором $p = (p^{(0)}, \dots, p^{(m-1)})$.

Каждому m -мерному вектору p взаимно однозначно ставится в соответствие матрица $\mathcal{P}$ размера $m \times m$, в которой на месте (k, l) стоит $p^{(l)}$ такое, что $g_k = g_l - g_k$, $k, l = 0, \dots, m-1$. Такие матрицы в [3] назывались G -матрицами. Заметим, что транспонированная матрица $\mathcal{P}^*$ также соответствует в этом смысле некоторому вектору. (Если группа G — циклическая, то матрица $\mathcal{P}$ является циркулянтной. Поэтому дальнейшие результаты для циклических групп могут быть получены непосредственно из свойств циркулянтных матриц.)

Обозначим

$$\chi_h(g) = \exp \left\{ 2\pi i \sum_{i=0}^{s-1} \frac{a_i b_i}{m_i} \right\}, \quad g = (a_1, \dots, a_s), \quad h = (b_1, \dots, b_s) \in G,$$

полную систему характеров группы G . Введем векторы

$$u_h = (\chi_h(g_0), \dots, \chi_h(g_{m-1})), \quad h = g_0, \dots, g_{m-1}. \quad (1)$$

Такая система векторов образует ортогональный базис в комплексном линейном m -мерном пространстве C^m .

Непосредственно проверяется, что векторы u_h являются левыми собственными векторами матрицы $\mathcal{P}$ при любом распределении p , и соответствующие им собственные значения равны

$$\sum_{l=0}^{m-1} p^{(l)} \bar{\chi}_h(g_l) = (p, u_h), \quad (2)$$

где (p, u_h) обозначает скалярное произведение. Таким образом, пространство C^m раскладывается в прямую сумму одномерных инвариантных пространств (см. также [3] и [4, с. 252–254]).

Из приведенной формулы (2) для собственных значений видно, что собственное значение, соответствующее вектору u_h , равно нулю тогда и только тогда, когда векторы p и u_h ортогональны.

Вероятностные распределения задаются действительными векторами. В действительном пространстве R^m пары комплексно сопряженных собственных векторов

u_h и u_{-h} матрицы $\mathcal{P}$ определяют взаимно ортогональные инвариантные подпространства размерности два. В качестве базисов этих подпространств можно взять действительные векторы $v_h = (u_h + u_{-h})/2$ и $v_{-h} = (u_h - u_{-h})/(2i)$. Исключениями являются действительные собственные векторы: собственный вектор $u_0 = (1, \dots, 1)$ и соответствующие элементам второго порядка собственные векторы u_h , которые определяют одномерные собственные подпространства.

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пространство R^m раскладывается в прямую ортогональную сумму подпространств, инвариантных для любой матрицы $\mathcal{P}$, соответствующей при фиксированной конечной абелевой группе G вектору p длины m ,*

$$R^m = U_0 \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_{t-1},$$

$t = (m + k + 1)/2$, где k — число элементов группы, совпадающих со своими обратными, U_0 — одномерное собственное подпространство, определяемое вектором $u_0 = (1, \dots, 1)$, остальные подпространства $U_1, \dots, U_{t-1}$ могут быть либо двумерными и определяться парами векторов $v_h = (u_h + u_{-h})/2$ и $v_{-h} = (u_h - u_{-h})/(2i)$ для элементов $h: h + h \neq 0$, либо одномерными и определяться вектором $v_h = u_h$ для элементов $h: h + h = 0$.

Предложенные в формулировке леммы пары векторов можно заменить другими линейно независимыми действительными векторами, являющимися линейными комбинациями векторов u_h и u_{-h} .

Так как инвариантные подпространства одинаковы для всех матриц, соответствующих векторам P , в дальнейшем будем ссылаться на них как на инвариантные подпространства, соответствующие группе.

З а м е ч а н и е 1. Ядро матрицы $\mathcal{P}$, соответствующей при фиксированной конечной абелевой группе G вектору p , совпадает с прямой суммой тех инвариантных подпространств, соответствующих группе, которым ортогонален вектор p . (Нулевой вектор ортогонален всему пространству.) Данное утверждение следует из формулы (2) для собственных значений.

Теперь перейдем к разложениям равномерно распределенных случайных величин.

Рассмотрим сначала сумму двух независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 . Распределения этих случайных величин определяются векторами $p_1 = (p_1^{(0)}, \dots, p_1^{(m-1)})$ и $p_2 = (p_2^{(0)}, \dots, p_2^{(m-1)})$, в которых $p_k^{(l)} = P\{\xi_k = l\}$, $k = 1, 2$, $l = 0, \dots, m-1$. Векторам p_1 и p_2 описанным выше образом поставим в соответствие матрицы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$. Тогда нетрудно видеть, что распределению суммы $\xi_1 + \xi_2$ будет соответствовать матрица $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$.

Пусть I обозначает матрицу размера $m \times m$, все элементы которой равны 1. Равномерному распределению на G соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} I.$$

Пусть при $k = 1, 2$

$$\tilde{P}_k = P_k - \frac{1}{m} I. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что вектор $(1/m, \dots, 1/m)$ принадлежит ядрам операторов $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$.

Теперь можно сформулировать критерий равномерности распределения суммы двух независимых слагаемых.

Теорема 1. Пусть независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 принимают значения в конечной абелевой группе G и имеют распределения $p_1 = (p_1^{(0)}, \dots, p_1^{(m-1)})$ и $p_2 = (p_2^{(0)}, \dots, p_2^{(m-1)})$. Сумма $\xi_1 + \xi_2$ имеет равномерное распределение на G тогда и только тогда, когда сумма инвариантных подпространств, соответствующих группе G , которым ортогонален вектор $\tilde{p}_1 = (p_1^{(0)} - 1/m, \dots, p_1^{(m-1)} - 1/m)$, и инвариантных подпространств, которым ортогонален вектор $\tilde{p}_2 = (p_2^{(0)} - 1/m, \dots, p_2^{(m-1)} - 1/m)$, совпадает со всем пространством R^m .

Доказательство. Сумма двух независимых случайных величин $\xi_1 + \xi_2$ имеет равномерное распределение тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = \frac{1}{m} I. \quad (4)$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\left(\mathcal{P}_1 - \frac{1}{m} I \right) \left(\mathcal{P}_2 - \frac{1}{m} I \right) = 0,$$

или

$$\tilde{\mathcal{P}}_1 \tilde{\mathcal{P}}_2 = 0.$$

Данное равенство выполняется в том и только том случае, когда образ линейного оператора $\tilde{\mathcal{P}}_1$ содержится в ядре линейного оператора $\tilde{\mathcal{P}}_2$. А это условие эквивалентно тому, что сумма ядер операторов $\tilde{\mathcal{P}}_1$ и $\tilde{\mathcal{P}}_2$ совпадает со всем пространством. По замечанию 1 ядро оператора $\tilde{\mathcal{P}}_1$ равно прямой сумме инвариантных подпространств, ортогональных вектору $\tilde{p}_1$, а ядро оператора $\tilde{\mathcal{P}}_2$ — прямой сумме инвариантных подпространств, ортогональных вектору $\tilde{p}_2$.

Окончательно, сумма ядер, совпадающая с суммой инвариантных подпространств, ортогональных вектору $\tilde{p}_1$, и инвариантных подпространств, ортогональных вектору $\tilde{p}_2$, покрывает все пространство R^m . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Условие на векторы $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ теоремы 1 можно переформулировать следующим образом: векторы $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ раскладываются по разным инвариантным подпространствам $U_1, \dots, U_{t-1}$. То есть если проекция вектора $\tilde{p}_1$ на какое-то подпространство U_i отлична от нулевого вектора, то проекция вектора $\tilde{p}_2$ на это же подпространство — нулевая, и наоборот. Заметим, что подпространство U_0 в разложении не участвует, так как векторы $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ всегда ему ортогональны.

Любая пара векторов $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$, удовлетворяющая условию замечания 2, обеспечивает выполнение равенства $\tilde{\mathcal{P}}_1 \tilde{\mathcal{P}}_2 = 0$, и соответствующая им пара векторов p_1 и p_2 обеспечивает выполнение равенства (4). Однако выбранные таким образом векторы p_1 и p_2 не всегда задают вероятностные распределения, так как могут иметь отрицательные координаты (равенство суммы координат единице выполняется всегда). Для того чтобы векторы p_1 и p_2 давали вероятностные распределения, векторы $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ следует нормировать так, чтобы все их координаты находились между $-1/m$ и $1 - 1/m$.

Исходя из вышеизложенного, получаем следствие, дающее полное описание всех возможных распределений слагаемых.

Следствие 1. Для того чтобы сумма двух независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 была равномерно распределена на G , необходимо и достаточно, чтобы слагаемые имели следующие распределения:

$$p_1 = \frac{1}{m} u_0 + \sum_{k \in K} (a_k v_k + b_k v_{-k}),$$

$$p_2 = \frac{1}{m} u_0 + \sum_{l \in L} (c_l v_l + d_l v_{-l}),$$

где $K, L \subseteq G \setminus \{0\}$ и $(K - K) \cap (L - L) = \{0\}$, коэффициенты a_k, b_k, c_1, d_1 — любые действительные числа, обеспечивающие неотрицательность всех координат векторов p_1 и p_2 .

Таким образом, получен некоторый аналог базиса, линейные комбинации векторов которого дают все возможные варианты искомых распределений.

З а м е ч а н и е 3. Множество всех пар распределений p_1, p_2 можно описать несколько по-другому. Возьмем любой набор действительных чисел $C = \{a_k, b_k, c_1, d_1 \mid k \in K, l \in L\}$. Векторы $p_1 = p_1(\theta C)$, $p_2 = p_2(\theta C)$ как функции $\theta \in [-\infty, \infty)$ линейны, и $p_1(0) = p_2(0) = (1/m)u_0$; множество всех значений θ , при которых все координаты векторов $p_1(\theta C)$ и $p_2(\theta C)$ неотрицательны, совпадает с отрезком $[\theta_1(C), \theta_2(C)]$, где $\theta_1(C)$ — максимальное значение $\theta < 0$, а $\theta_2(C)$ — минимальное значение $\theta > 0$, при которых хотя бы одна из координат $p_1(\theta C)$, $p_2(\theta C)$ равна 0.

Теорема 1 естественным образом обобщается на случай нескольких независимых слагаемых $\xi_1, \dots, \xi_n$. Пусть векторы $p_1, \dots, p_n$ задают распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$. Так же, как и ранее, по распределениям строятся матрицы $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$. Матрицы $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ и векторы $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n$ определяются равенством (3), где $k = 1, \dots, n$.

Теорема 2. Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ принимают значения в конечной абелевой группе G . Их сумма $\xi_1 + \dots + \xi_n$ имеет равномерное распределение на G тогда и только тогда, когда сумма n инвариантных подпространств, соответствующих группе G , которым ортогональны векторы $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n$, совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Для того чтобы сумма имела равномерное распределение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_n = \frac{1}{m} I.$$

Отсюда получаем равенство

$$\tilde{P}_1 \tilde{P}_2 \dots \tilde{P}_n = 0,$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда сумма ядер матриц $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ совпадает со всем пространством. Применение замечания 1 заканчивает доказательство.

3. Примеры. Опишем все возможные разложения равномерно распределенных случайных величин в сумму двух независимых слагаемых на абелевых группах четвертого и пятого порядков.

а) $m = 4$. Существуют две абелевы группы четвертого порядка: циклическая четвертого порядка и прямая сумма двух циклических групп второго порядка.

В первом случае по лемме 1 пространство $\mathbb{R}^4$ разлагается в прямую ортогональную сумму

$$\mathbb{R}^4 = U_0 \oplus U_1 \oplus U_2.$$

Собственные подпространства U_0 и U_2 определяются векторами $u_0 = (1, 1, 1, 1)$ и $u_2 = (1, -1, 1, -1)$ соответственно. Подпространство U_1 строится на векторах $v_1 = (u_1 + u_3)/2$ и $v_3 = (u_1 - u_3)/(2i)$, где по формуле (1) вектор $u_1 = (1, i, -1, -i)$ и вектор $u_3 = (1, -i, -1, i)$. Поэтому $v_1 = (1, 0, -1, 0)$ и $v_3 = (0, 1, 0, -1)$.

По следствию 1 сумма независимых случайных величин равномерно распределена тогда и только тогда, когда либо хотя бы одно из слагаемых имеет равномерное распределение, либо одна из случайных величин имеет распределение

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + a(1, -1, 1, -1)$$

с любым a таким, что $-\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{4}$, а другая — распределение

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + c(1, 0, -1, 0) + d(0, 1, 0, -1)$$

с любыми c и d такими, что $-\frac{1}{4} \leq c, d \leq \frac{1}{4}$. Границы на a, c, d получены из условия неотрицательности вероятностей, равенство суммы вероятностей единице выполняется автоматически.

Приведенный в [2] пример $\mathbf{p}_1 = (0.3, 0.2, 0.3, 0.2)$, $\mathbf{p}_2 = (0.1, 0.3, 0.4, 0.2)$ получается из приведенных выше формул при $a = 0.05$, $c = -0.15$, $d = 0.05$.

Во втором случае (прямая сумма циклических групп второго порядка) в группе нет элементов выше второго порядка, и по лемме 1 пространство $\mathbf{R}^4$ разлагается в прямую ортогональную сумму

$$\mathbf{R}^4 = U_0 \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus U_3.$$

Собственные подпространства U_0, U_1, U_2, U_3 определяются векторами $\mathbf{u}_0 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, -1, -1)$ и $\mathbf{u}_3 = (1, -1, -1, 1)$ соответственно. Заметим, что все разложения, указанные в предыдущем случае, подходят и здесь. Нетривиальные разложения предыдущего случая описываются векторами

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + a(1, -1, 1, -1), \\ &\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + b(1, 1, -1, -1) + c(1, -1, -1, 1). \end{aligned}$$

Кроме этого возможны разложения

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + a(1, 1, -1, -1), \\ &\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + b(1, -1, 1, -1) + c(1, -1, -1, 1) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + a(1, -1, -1, 1), \\ &\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + b(1, -1, 1, -1) + c(1, 1, -1, -1), \end{aligned}$$

где коэффициенты a, b, c можно выбирать любыми из множеств $|a| \leq \frac{1}{4}$, $|b| + |c| \leq \frac{1}{4}$.

б) $m = 5$. В этом случае группа является циклической, и $\mathbf{R}^5 = U_0 \oplus U_1 \oplus U_2$. Здесь U_0 — собственное подпространство, определяемое вектором $\mathbf{u}_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$. Подпространство U_1 строится на векторах

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_4}{2} = \left(\cos \frac{2\pi}{5}, -\cos \frac{\pi}{5}, -\cos \frac{\pi}{5}, \cos \frac{2\pi}{5}, 1\right)$$

и

$$\mathbf{v}_4 = \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_4}{2i} = \left(\sin \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{\pi}{5}, -\sin \frac{\pi}{5}, -\sin \frac{2\pi}{5}, 0\right).$$

Подпространство U_2 определяется векторами

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3}{2} = \left(-\cos \frac{\pi}{5}, \cos \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{2\pi}{5}, -\cos \frac{\pi}{5}, 1\right)$$

и

$$v_3 = \frac{u_2 - u_3}{2i} = \left(\sin \frac{\pi}{5}, -\sin \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{\pi}{5}, -\sin \frac{\pi}{5}, 0 \right).$$

По следствию 1 сумма двух независимых слагаемых равномерно распределена тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий: 1) хотя бы одно из слагаемых имеет равномерное распределение на всей группе, 2) одно из слагаемых имеет распределение $\frac{1}{5}u_0 + av_1 + bv_4$, а другое слагаемое — распределение $\frac{1}{5}u_0 + cv_2 + dv_3$, где коэффициенты a, b, c, d можно выбирать любыми, лишь бы получаемые векторы имели неотрицательные координаты (см. замечание 3).

4. Заключительные замечания. С практической точки зрения представляет интерес задача разложения равномерно распределенной на G случайной величины в сумму независимых слагаемых, равномерно распределенных на подмножествах G . Эта задача рассматривалась в работах [5] и [6], а также в работе [7], в которой найден критерий равномерности рассматриваемой суммы для циклических групп порядка q^l , где q — простое число, при условии, что мощности всех подмножеств, на которых равномерно распределены слагаемые, равны q . Применение общих результатов 2 оказывается в этом случае не совсем удобным.

Задача, близкая к рассматриваемой, исследовалась с применением характеров групп в работе [8].

В заключение автор выражает благодарность А. М. Зубкову за обсуждение затронутых в статье вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rizzi A. On the sum (modulo m) of two statistical variables. — Bol. Un. Mat. Ital., 1976, serie 5, v. 13-A, № 1, p. 163–167.
2. Arnold B. C. Non-uniform decompositions of uniform random variables under summation modulo m . — Bol. Un. Mat. Ital., 1979, serie 5, v. 16-A, № 1, p. 100–102.
3. Воробьев Н. Н. Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах. — Матем. сб., 1954, т. 34, (76), № 1, с. 89–126.
4. Ефимов Н. В., Розендорн З. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970, 528 с.
5. Redei L. Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajos. — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1965, v. 16, № 3–4, p. 329–373.
6. Szabo S. Multiple simulated factorizations. — Studia. Sci. Math. Hungar., 1996, v. 32, p. 23–29.
7. Рязанов Б. В., Шанкин Г. П. Критерий равномерности распределения суммы независимых случайных величин на примарной циклической группе. — Дискретн. матем., т. 9, в. 1, с. 95–102.
8. Севастьянов Б. А. Условное распределение выхода автоматов без памяти при заданных характеристиках входа. — Дискретн. матем., 1994, т. 6, в. 1, с. 34–39.

Поступила в редакцию
20.XI.1997