Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Ибрагимов, Об оценке многомерной аналитической плотности распределения по цензурированной выборке, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 1, 95–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:24:51

© 2006 г.

ИБРАГИМОВ И. А.*

ОБ ОЦЕНКЕ МНОГОМЕРНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ЦЕНЗУРИРОВАННОЙ ВЫБОРКЕ¹⁾

Изучается задача оценивания неизвестной плотности распределения $f(x)$ по d -мерной выборке $X_1, \dots, X_n$, $X_j \in \mathbb{R}^d$, в предположении, что наблюдаются лишь те элементы выборки, которые попадают в заданную ограниченную область $G \subset \mathbb{R}^d$.

Ключевые слова и фразы: плотность распределения, непараметрические оценки, аналитические функции, проективные оценки.

1. Постановка задачи. Результаты. Пусть

$$X_1, X_2, \dots, X_n \tag{1.1}$$

есть выборка из d -мерного распределения с неизвестной плотностью распределения $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$. Мы предполагаем, что $f \in \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ — некоторый известный класс функций. Задача заключается в оценивании f по выборке (1.1) в предположении, что наблюдателю доступны лишь те из наблюдений (1.1), которые попадают в область G . Наблюдения, не попавшие в G , не регистрируются и не могут быть использованы для построения оценки. Номера реально наблюдавшихся X_j не предполагаются известными. Общее количество наблюдений n , как зарегистрированных, так и незарегистрированных, предполагается известным.

Можно ожидать, и это действительно так, что определенное выше цензурирование не позволяет состоятельно оценить $f(x)$ для $x \notin G$, даже если $\mathbf{F}$ — класс бесконечно дифференцируемых функций (достаточно рассмотреть две бесконечно дифференцируемые плотности распределения, совпадающие на G и различающихся вне некоторой окрестности G). С другой стороны, цензурирование не очень сильно влияет на точность оценивания $f(x)$, когда $x \in G$, если $\mathbf{F}$ — класс бесконечно дифференцируемых функций.

* С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, математико-механический факультет СПбГУ С.-Петербург, Россия; e-mail: ibr32@pdmi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 05-01-00920, и РФФИ-DFG, грант 04-01-04000.

Аналитическая в комплексной области $\hat{G} \subset \mathbb{C}^d$, $G \subset \hat{G}$, функция $f(z) = f(z_1, \dots, z_d)$ однозначно определяется во всей области $\hat{G}$ своими значениями в вещественной области G и потому можно ожидать, во-первых, что по наблюдениям цензурированным областью G целую аналитическую плотность распределения $f(x)$ возможно состоятельно оценить в более широкой R_n -окрестности области G ($R_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$); и, во-вторых, что потеря наблюдений $X_j \notin G$ существенно снижает точность оценивания целой аналитической плотности $f(x)$ *внутри* множества G . Для $d = 1$ эти задачи рассмотрены в работе автора [4]; ниже исследуется случай $d > 1$.

Ответ на первый вопрос дают формулируемые ниже теоремы 1.1, 1.2 (ср. [8, теоремы 1.1, 1.2] и [4]). Обозначим $\mathbf{F} = \mathbf{F}_d(M, \sigma, \rho)$, где $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$, класс целых аналитических плотностей распределения таких, что

$$\sup_{|z_i| \leq R_i, i=1, \dots, d} |f(z)| \leq M \exp \left\{ \sum_1^d \sigma_i R_i^{\rho_i} \right\}. \quad (1.2)$$

Здесь $M > 0$, $\sigma_i > 0$, $\rho_i \geq 1$ — параметры, определяющие класс. Зависимость от размерности d ниже, как правило, не указывается. Ограничение $\rho_i \geq 1$ объясняется тем, что целых аналитических плотностей распределения с $\min_i \rho_i < 1$ не существует. (Действительно, пусть, например, $\rho_1 < 1$. При фиксированных $x_2, \dots, x_d$ функция $F(z) = \int_0^z f(u, x_2, \dots, x_d) du$ есть целая аналитическая функция z порядка $\rho_1 < 1$, ограниченная по модулю единицей на вещественной оси. В силу принципа Фрагмена–Линделефа $F(z)$ ограничена в верхней и нижней полуплоскостях и, следовательно, является константой.)

Теорема 1.1. Пусть $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M, \sigma, \rho)$. Обозначим $G_n(\alpha)$ R_n -окрестность множества G , где $R_n = R_n(\alpha) = (\ln n)^{\alpha/\rho}$. Здесь $\rho = \max \rho_i$ и $0 < \alpha < 1$. Существует такая оценка $\hat{f}(x)$ плотности $f(x)$, построенная по цензурированным наблюдениям (1.1), что для любых фиксированных α и β , $\beta < \alpha < 1$, выполняется неравенство

$$\sup_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{E}_f \left\{ \sup_{G_\beta} |f(x) - \hat{f}(x)| \right\} \leq C_{\alpha, \beta} n^{-(1-\alpha)/(2d)}. \quad (1.3)$$

Постоянные $C_{\alpha, \beta}$ зависят также от M, σ, ρ, d, G .

Следующая ниже теорема показывает, что размер области состоятельности G_n предыдущей теоремы не может быть существенно увеличен.

Теорема 1.2. Пусть $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M, \sigma, \rho)$. Пусть x — произвольная точка внешности множества $G_n(\alpha)$, $\alpha > 1$. Тогда для всех $n \geq n_0(\alpha, M, \sigma, \rho)$

$$\inf_{\hat{f}} \sup_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{E}_f |f(x) - \hat{f}|^2 > c_0, \quad (1.4)$$

c_0 зависит от α, M, σ, ρ .

При ответе на второй вопрос ограничимся плотностями класса $\mathbf{F}(M, \sigma, 1)$, т.е. плотностями, которые являются целыми функциями экспоненциального типа. В этом случае функция $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ и по теореме Пэли–Винера она допускает представление вида (см., например, [11])

$$f(x) = \int_K e^{-i(t,x)} \psi(t) dt, \quad \psi \in L_2, \quad (1.5)$$

где K — ограниченное симметричное выпуклое тело в $\mathbf{R}^d$ ($\psi(t)$, разумеется, характеристическая функция элементов выборки). Обозначим класс плотностей распределения, допускающих представление (1.5) через $\mathbf{F}(K)$. В работе [7] было доказано, что при оценивании плотностей класса $\mathbf{F}(K)$ по *нецензурированной* выборке (1.1) справедливо соотношение

$$\inf_{\hat{f}} \sup_{f \in \mathbf{F}_\sigma} \mathbf{E}_f \|f - \hat{f}\|_2^2 \sim \frac{1}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{n} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

Следующая теорема показывает, как меняется скорость сходимости в (1.6) при переходе к цензурированным выборкам.

Теорема 1.3. *В задаче оценивания плотностей f класса $\mathbf{F}(K)$ по цензурированной области G выборке (1.1)*

$$\inf_{\hat{f}} \sup_{f \in \mathbf{F}(K)} \mathbf{E}_f \int_G |f(x) - \hat{f}(x)|^2 dx \asymp \frac{1}{n} \left(\frac{\ln n}{\ln \ln n} \right)^d. \quad (1.7)$$

Порядок убывания правых частей в сформулированных выше теоремах не зависит от G . Поэтому естественно при доказательстве этих теорем выбрать в качестве G достаточно простые множества, скажем, кубы. Если теоремы будут доказаны для всех кубов, то в силу того, что для любой ограниченной области G найдутся кубы Γ_1, Γ_2 такие, что $\Gamma_1 \in G \in \Gamma_2$, теоремы будут доказаны для всех G . При этом ясно, что достаточно рассмотреть какой-нибудь один куб. Поэтому ниже в ходе доказательства мы всегда предполагаем, что $G = [-1, 1]^d$.

2. Верхние границы. Конструкция оценок. Доказательство теоремы 1.1. Ниже всюду рассматривается следующая единообразная схема построения «хороших» оценок (проекционные оценки Н. Н. Ченцова [14]). Именно, выбирается подходящее разложение

$$f(x) = \sum_j a_j \phi_j(x)$$

по базисным аналитическим функциям ϕ_j , коэффициенты a_j оцениваются оценками $\hat{a}_j$ и в качестве оценок для f рассматриваются статистики

$$\hat{f}(x) = \sum_0^N \hat{a}_j \phi_j(x),$$

причем выбор N зависит от априорных сведений $\mathbf{F}$ о плотности $f(x)$ (см. ниже, окончание доказательства теоремы).

В силу наших предположений относительно G , $G = [-1, 1]^d$, в качестве функций ϕ_j естественно выбрать классические полиномы Лежандра $P_j(x)$ (точнее их многомерные аналоги), свойства которых хорошо изучены (см., например, [10]). Именно, для $x = (x_1, \dots, x_d)$, $k = (k_1, \dots, k_d)$ положим $P_k(x) = P_{k_1}(x_1) \cdots P_{k_d}(x_d)$, где $P_{k_j}(x_j)$ — ортонормированные на $[-1, 1]$ полиномы Лежандра. Полиномы Лежандра $P_j(y)$ образуют ортонормальный базис в $L_2(-1, 1)$ и потому многомерные полиномы Лежандра образуют ортонормальный базис в $L_2(G)$. В частности, сужение плотности f на G разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра,

$$f(x) = \sum_k a_k P_k(x), \quad (2.1)$$

причем коэффициенты Фурье–Лежандра

$$a_k = \int_G f(x) P_k(x) dx. \quad (2.2)$$

Условимся ниже посредством c и C с индексами или без обозначать константы (не обязательно одни и те же даже при полном графическом совпадении), зависящие лишь от M, σ, ρ, d .

Лемма 2.1. Если $f \in \mathbf{F}(M, \sigma, \rho)$, то

$$|a_k| \leq cM \exp \left\{ -\frac{k_1}{\rho_1} \ln \frac{k_1}{e\rho_1\sigma_1} - \dots - \frac{k_d}{\rho_d} \ln \frac{k_d}{e\rho_d\sigma_d} \right\}. \quad (2.3)$$

Доказательство. По формуле Родрига для ортонормированных полиномов Лежандра ([10, с. 79])

$$P_j(y) = \sqrt{\frac{2j+1}{2}} \frac{(-1)^j}{2^j j!} \frac{d^j}{dy^j} \{(1-y^2)^j\}.$$

Подставляя последнее соотношение в (2.2) и интегрируя по частям, мы найдем, что

$$a_k = \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2k_j+1}{2}} \frac{1}{k_j!} \cdot \int_G D^k f(x) \prod_{j=1}^d (1-x_j^2)^{k_j} dx_1 \cdots dx_d, \quad (2.4)$$

где $D^k = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_d}}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_d^{k_d}}$. По формуле Коши для функций нескольких комплексных переменных (см., например, [13, теорема 2.2.1])

$$D^k f(x) = \frac{k_1! \cdots k_d!}{(2i\pi)^d} \int_{\Gamma} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_d} f(\zeta)}{(\zeta_1 - x_1)^{k_1+1} \cdots (\zeta_d - x_d)^{k_d+1}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_d,$$

интегрирование ведется по множеству $\Gamma = \{z: |z_j| = R_j, j = 1, \dots, d\}$, $R_j > 1$. Из последнего равенства следует, что для всех $f \in \mathbf{F}(M, \sigma, \rho)$, $x \in G$ и $R_j \geq 2$

$$|D^k f(x)| \leq M 2^d \prod_{j=1}^d 2^{k_j} R_j^{-k_j} \exp\{\sigma_j R_j^{\rho_j}\}.$$

Подставляя последнее неравенство в (2.4) и минимизируя по R_j , мы получим (2.3). Лемма доказана.

Лемма 2.2 (см. [10]). *Имеют место неравенства:*

$$\max_{|y| \leq 1} |P_j(y)| \leq |P_j(1)| = \sqrt{\frac{2j+1}{2}}. \quad (2.5)$$

Лемма 2.3 (см. [1, с. 74]). *Если $Q(z)$, $z \in \mathbf{C}^1$, — полином степени n , то*

$$|Q(z)| \leq \max_{|x| \leq 1} |Q(x)| \cdot |z + \sqrt{z^2 - 1}|^n. \quad (2.6)$$

Из трех последних лемм следует, что ряд в правой части (2.1) сходится для всех $z \in \mathbf{C}^d$ к некоторой целой аналитической функции; в G этот ряд сходится к $f(x)$ и, следовательно, для всех $z \in \mathbf{C}^d$

$$f(z) = \sum_k a_k P_k(z). \quad (2.7)$$

Определим статистики $f_N(x)$ равенствами

$$f_N(x) = \sum_{k_j \leq N} \hat{a}_k P_k(x), \quad (2.8)$$

где оценки $\hat{a}_k$ коэффициентов a_k в свою очередь определяются соотношениями $\hat{a}_k = n^{-1} \sum_{j: X_j \in G} P_k(X_j) = n^{-1} \sum_{j=1}^n P_k(X_j) I(X_j)$. Здесь и ниже $I(x)$ обозначает индикатор множества G . Статистики $\hat{a}_k$ суть несмещенные оценки для a_k , $\mathbf{E} \hat{a}_k = \int_G P_k(x) f(x) dx = a_k$. (Математическое ожидание вычисляется по отношению к «истинной» плотности распределения f и правильнее было бы писать $\mathbf{E}_f(\cdot)$. Но мы, как правило, опускаем индекс f , сохраняя его лишь в тех случаях, когда его отсутствие может привести к недоразумению.) Отсюда и из леммы 2.1 следует, что

$$\int_G |f(x) - \mathbf{E} f_N(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^d \sum_{k: k_j > N} |a_k|^2 \leq C \sum_{j=1}^d \exp \left\{ -\frac{N}{2\rho_j} \ln \frac{N}{\rho_j} \right\}. \quad (2.9)$$

Из лемм 2.1, 2.2 вытекает, что $\sup_{f \in \mathbf{F}} \|f\|_{L_\infty(G)} = C < \infty$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \int_G |f_N(x) - \mathbf{E} f_N(x)|^2 dx \right\} &= \sum_{k_i \leq N} \mathbf{E} |\hat{a}_k - a_k|^2 \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k_i \leq N} \int_G P_k^2(x) f(x) dx \leq C \frac{N^d}{n}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отсюда и из (2.9) следует, что

$$\mathbf{E} \int_G |f(x) - f_N(x)|^2 dx \leq C \left(\frac{N^d}{n} + \sum_1^d \exp \left\{ -\frac{N}{\rho_j} \ln \frac{N}{\rho_j} \right\} \right). \quad (2.11)$$

Выбирая $N \sim 2(\max_j \rho_j) \ln n / \ln \ln n$, и полагая $\hat{f}(x) = f_N(x)$, приходим к следующему результату, дающему нужную верхнюю границу в (1.7).

Теорема 2.1. Пусть $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M, \sigma, \rho)$. Существует такая оценка $\hat{f}(x)$ плотности $f(x)$ по цензурированной выборке (1.1), что

$$\sup_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{E}_f \int_G |f(x) - \hat{f}(x)|^2 dx \leq C \frac{1}{n} \left(\frac{\ln n}{\ln \ln n} \right)^d. \quad (2.12)$$

Чтобы доказать неравенство теоремы 1.1, заметим сперва, что в силу лемм 2.1–2.3

$$\begin{aligned} \sup_{|x_i| \leq R} |f(x) - \mathbf{E} f_N(x)| &\leq C \prod_{i=1}^d \sum_{j=0}^{\infty} R^j \exp \left\{ -\frac{j}{\rho_i} \ln \left(\frac{j}{e\sigma_i \rho_i} \right) \right\} \\ &\times \sum_{l=1}^d \sum_{N+1}^{\infty} R^j \exp \left\{ -\frac{j}{\rho_i} \ln \left(\frac{j}{e\sigma_i \rho_i} \right) \right\} \\ &\leq CR^N \exp \{c(R^{\rho_1} + \dots + R^{\rho_d})\} \exp \left\{ -\frac{N}{\varrho} \ln \frac{N}{\varrho} (1 + o(1)) \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Поэтому для таких R , что $\ln R < [(1-t)/\varrho] \ln N$, где $t > 0$,

$$\sup_{|x_i| \leq R} |f(x) - \mathbf{E} f_N(x)| \leq C_t R^N e^{-(N/\varrho) \ln(N/\varrho)}. \quad (2.14)$$

Далее, снова на основании лемм 2.1–2.3

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{|x| \leq R} |f_N(x) - \mathbf{E} f_N(x)| &\leq \sum_{k_i \leq N} R^{k_1} \dots R^{k_d} \mathbf{E} |\hat{a}_k - a_k| \\ &\leq CR^{Nd} \sum_{k_i \leq N} \int_G (|P_k(x)|^2 f(x) dx)^{1/2} \leq C \frac{N^d R^{dN}}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из (2.14) и (2.15) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{|x_i| \leq R} |f(x) - f_N(x)| &\leq C_t \left(\exp \left\{ \frac{(1-t)d}{\varrho} N \ln N \right\} N^d n^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. + \exp \left\{ -\frac{tN}{\varrho} \ln N \right\} \right). \end{aligned}$$

Полагая здесь $N \sim c \ln n / \ln \ln n$ и подбирая c должным образом, приходим к неравенству (1.3). Теорема 1.1 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.2. Мы докажем теорему 1.2 для случая $\rho > 1$. Случай $\rho = 1$ по существу разобран в работе [4]. Кроме того, для простоты мы не будем доказывать теорему для класса $\mathbf{F}(M, \sigma, \rho)$ с заданными M, σ , а проведем доказательство для класса $\mathbf{F}(M, \sigma, \rho)$ с заданным ρ и какими-то M и σ . Конструкцию доказательства легко дополнить так, чтобы рассмотреть заданные M, σ .

Изложим общую схему доказательства теоремы 1.2. Без потери общности можно предположить, что оценивается значение плотности $f(x)$ в точке $x^T = (T, 0, \dots, 0)$, $T > 0$. Рассмотрим однопараметрическое, зависящее от параметра $\theta \in [-\delta, \delta]$, семейство плотностей распределения $f(x, \theta)$ вида

$$f(x, \theta) = f_T(x, \theta) = \frac{1}{2} (\varphi(x - x^T) + \varphi(x + x^T)) \times \left(1 + \theta \sin \left(\frac{\pi x_1}{2T} \right) (g(x - x^T) + g(x + x^T)) \right). \quad (3.1)$$

Здесь $\varphi(x) = \prod_1^d \sin^2 x_i / (\pi x_i^2)$ есть плотность распределения класса $\mathbf{F}(M, \sigma, \rho)$, $\rho = (1, \dots, 1)$, а $g(x)$ — это четная равномерно ограниченная на всей вещественной гиперплоскости функция класса $\mathbf{F}(M, \sigma, \rho)$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$, $\rho_1 = \max_i \rho_i = \varrho > 1$. Функции $f(x, \theta)$ — действительно плотности распределения, во всяком случае для достаточно малых δ . Действительно, в силу ограниченности g для малых δ выполняется неравенство $f(x, \theta) \geq 0$, кроме того, в силу четности функции g

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x, \theta) dx = \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) dx = 1.$$

При всех значениях параметра $\theta \in [-\delta, \delta]$ плотности $f(x, \theta) \in \mathbf{F}$ и

$$\inf_{\hat{f}} \sup_{f \in \mathbf{F}} |f(x^T) - \hat{f}| \geq \inf_{\hat{f}} \sup_{\theta \in [-\delta, \delta]} |f(x^T, \theta) - \hat{f}|. \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь наряду с нашей основной задачей следующую первую вспомогательную задачу оценивания: оценить параметр θ по цензурированной выборке (1.1) с плотностью распределения элементов выборки равной $f(x; \theta)$ из семейства (3.1) (при этом мы, как и выше, предполагаем, что цензурирующее множество $G = [-1, 1]^d$). Если $\hat{f}$ — какая-нибудь оценка значения $f(x^T)$ плотности $f(x)$ в основной задаче, то статистика

$$\hat{\theta} = \frac{2\hat{f} - (\varphi(0) + \varphi(2x^T))}{g(0) + g(2x^T)}$$

может быть принята в качестве оценки параметра θ первой вспомогательной задачи. При этом

$$\mathbf{E}_{f(\cdot, \theta)} |\hat{\theta} - \theta|^2 = 2 \frac{\mathbf{F}_f |\hat{f} - f|^2}{g(0) + g(2x^T)}. \quad (3.3)$$

Если, поэтому, g выбрано так, что

$$g(0) = 1, \quad |g(2x^T)| \leq \frac{1}{2}, \quad (3.4)$$

то $\mathbf{E}|\hat{\theta} - \theta|^2 \leq 4\mathbf{E}|\hat{f} - f(x^T, \theta)|^2$ и, потому,

$$\inf_{\hat{f}} \sup_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{E}_f |f(x^T) - \hat{f}|^2 \geq 4^{-1} \inf_{\hat{\theta}} \sup_{\theta \in [-\delta, \delta]} \mathbf{E}_{\theta} |\theta - \hat{\theta}|^2, \quad (3.5)$$

причем слева нижняя грань берется по всем оценкам $\hat{f}$ основной задачи, а справа по всем оценкам $\hat{\theta}$ первой вспомогательной задачи. Таким образом, чтобы доказать теорему 1.2, нам достаточно показать, что для всех больших n правая часть в (3.5) больше положительной постоянной.

Введем в рассмотрение вторую вспомогательную задачу оценивания: оценить параметр θ по наблюдениям

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \quad (3.6)$$

где $Y_j = X_j I(X_j)$, а $I(x)$, как и выше, означает индикатор множества G . Если θ^* пробегает класс Θ^* всех статистик $\theta^*(Y_1, \dots, Y_n)$, а $\hat{\theta}$ — класс $\hat{\Theta}$ всех статистик, построенных по цензурированной выборке, то, очевидно, $\hat{\Theta} \subseteq \Theta^*$ и, потому,

$$\inf_{\Theta^*} \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} |\theta^* - \theta|^2 \leq \inf_{\hat{\Theta}} \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} |\hat{\theta} - \theta|^2. \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) вытекает, что неравенство (1.4) теоремы 1.2 следует из неравенства: для всех достаточно больших n

$$\inf_{\Theta^*} \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} |\theta^* - \theta|^2 \geq c_1 > 0. \quad (3.8)$$

Это последнее неравенство мы и будем доказывать.

Лемма 3.1. *Рассмотрим задачу оценивания параметра $\theta \in [-\delta, \delta]$ по выборке $Y_1, \dots, Y_n$ из распределения с плотностью $f(x, \theta)$ и информацией Фишера $I(\theta)$. Если для всех $\theta \in [-\delta, \delta]$ информация Фишера $I(\theta) \leq n^{-1}$, то*

$$\inf_{\hat{\theta}} \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} |\hat{\theta} - \theta|^2 \geq c(\delta), \quad c(\delta) > 0. \quad (3.9)$$

Неравенство леммы легко следует из неравенства Крамера–Рао, см. подробнее [4].

Лемма 3.2. *Информация Фишера $I(\theta)$ о параметре θ во второй вспомогательной задаче равна*

$$\int_G \frac{[\varphi(x + x^T) + \varphi(x - x^T)] \sin^2(\pi x/2T) [g(x - x^T) + g(x + x^T)]^2}{2(1 + \theta \sin(\pi x/2T)(g(x - x^T) + g(x + x^T)))} dx. \quad (3.10)$$

Разъяснение этим вычислениям см в [4].

Теперь для окончания теоремы достаточно построить функции g в (3.1) так, чтобы заданная выражением (3.10) информация Фишера удовлетворяла бы неравенствам (3.9). Мы построим функции $g(x)$ в виде

$$g(x) = \gamma(x_1) \frac{\sin x_2}{x_2} \dots \frac{\sin x_d}{x_d}.$$

При этом для того, чтобы $g_T(x) = g(x - x^T) \in \mathbf{F}$, достаточно потребовать, чтобы $\gamma \in \mathbf{F}_1(M, \sigma, \varrho)$. Ниже при построении функции γ точки x и z принадлежат соответственно $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{C}^1$. Мы рассмотрим по отдельности случаи, когда ϱ — целое четное число, целое нечетное число, нецелое число.

1. Начнем с самого простого случая — $\varrho = 2k$ есть целое четное число. Положим $\gamma(x) = e^{-x^{2k}}$ и убедимся, что при всех $T > 0$, $\gamma_T = \gamma(\cdot - T) \in \mathbf{F}_1$. Действительно, если $|z| \leq T/2$, то $|\gamma_T(z)| \leq \exp\{-T^{2k}/2^{2k} + O(T^{2k-2})\} \leq Me^{-\sigma|z|^\varrho}$, если же $|z| > T/2$, то $|\gamma(z)| \leq e^{2^\varrho|z|^\varrho}$. Далее, для $|x| \leq 1$ справедливо $|\gamma(x - T)| \leq Ce^{-cT^\varrho}$, $c > 0$, так что и $I(\theta) \leq Ce^{-cT^\varrho}$. Поэтому $I(\theta) < 1/n$ для $T > (2/c) \ln n$ и всех достаточно больших n . Тем самым для целых четных ϱ теорема доказана.

2. Пусть теперь $\varrho = 2k + 1$ — это нечетное целое число. Положим

$$\gamma(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x^\varrho n^{-(1+\varepsilon)}}{x^\varrho n^{-(1+\varepsilon)}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Для вещественных x в силу формулы Стирлинга для факториалов

$$|\gamma(x)| \leq \prod_{n < x^{\varrho/(1+\varepsilon)}} (x^\varrho n^{-(1+\varepsilon)})^{-1} \leq Ce^{-|x|^\varrho}. \quad (3.11)$$

Для $z = u + iv$

$$\left| \frac{\sin z}{z} \right| \leq \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{2|z|} \leq \frac{e^{|v|}}{|z|}.$$

Поэтому аналогично (3.11) найдем, что $|\gamma_T(z)| \leq Ce^{c|z|^\varrho}$ для $|z| \leq T/2$. Так как

$$\left| \frac{\sin z}{z} \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 e^{itz} dt \right| \leq e^{|z|},$$

то $|\gamma_T(z)| \leq Ce^{c|z|^\varrho}$ для $|z| > T/2$ и, следовательно, $\gamma \in \mathbf{F}_1$.

Из (3.11) следует, что информация Фишера $I(\theta) \leq Ce^{-cT^\varrho}$, а это, как мы уже видели, влечет неравенство теоремы 1.3.

3. Пусть теперь $p < \varrho < p + 1$, $p \geq 1$ — целое. Обозначим $G(u, p)$ первичный множитель Вейерштрасса,

$$G(u, p) = (1 - u) \exp \left\{ u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p} \right\}.$$

Полагая $a_r = r^{1/\varrho}$, составим каноническое произведение рода p (см. [9, гл. 1, § 3])

$$V(z) = \prod_1^\infty G\left(\frac{z}{a_r}, p\right). \quad (3.12)$$

Каноническое произведение (3.12) равномерно сходится на всех компактных подмножествах $\mathbf{C}$, определяя тем самым целую аналитическую функцию z . Кроме того,

$$\sup_{|z| \leq R} |V(z)| \leq c_p \exp \left\{ ((\varrho - p)^{-1} + (p + 1 - \varrho)^{-1}) R^\varrho \right\}. \quad (3.13)$$

Доказательство этих хорошо известных фактов см., например, в монографии [9, § 3, 4 гл. 1].

Лемма 3.3. Пусть $z = re^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$. Тогда равномерно в любом интервале вида $0 < \eta \leq \theta \leq 2\pi - \eta$ при $r \rightarrow \infty$

$$\ln V(re^{i\theta}) = \frac{\pi}{\sin \pi \varrho} r^\varrho e^{i\varrho(\theta - \pi)} + O(r^p). \quad (3.14)$$

Мы опустим доказательство леммы, поскольку она является частным случаем теоремы 25 гл. I из [9], но с тем отличием, что в цитируемой теореме отсутствует оценка остаточного члена. Доказательство леммы повторяет доказательство цитируемой теоремы, а специальный вид последовательности a_r , $a_r = r^{1/\varrho}$, позволяет без труда получить оценку остаточного члена.

Каноническое произведение $V(z)$ послужит нам основой для построения функций $g_T(x)$. Пусть $0 < \alpha < 2\pi$. Положим $V_\alpha(z) = V(ze^{-i\alpha})$. Функция $V_\alpha(z)$ имеет своими нулями числа $\nu^{1/\varrho} e^{i\alpha}$. В силу равенства (3.14) для положительных r

$$\begin{aligned} \ln |V_\alpha(r)| &= \frac{\pi}{\sin \pi \varrho} r^\varrho \cos \varrho(\pi - \alpha) + O(r^p), \\ \ln |V_\alpha(-r)| &= \frac{\pi}{\sin \pi \varrho} r^\varrho \cos \pi \varrho \alpha + O(r^p). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Выбирая $\alpha = (3\pi)/(2\varrho)$, получим, что

$$\ln |V_\alpha(r)| = -\pi r^\varrho + O(r^p), \quad \ln |V_\alpha(-r)| = O(r^p). \quad (3.16)$$

Далее, функция $U_\alpha(z) = V_\alpha(z) V_{-\alpha}(z)$ на вещественной оси равна

$$\prod_{r=1}^{\infty} |1 - re^{-i\alpha}|^2 \exp \left\{ \sum_1^p \frac{1}{k} \Re(re^{-i\alpha})^k \right\}$$

и, следовательно, вещественна там. При этом $|V_\alpha(z)| = |V_{-\alpha}(z)|$. Положим теперь

$$\gamma(x) = U_\alpha(x) U_\alpha(-x),$$

это и будет искомая функция γ .

Убедимся, что она действительно обладает всеми необходимыми свойствами. Заметим сперва, что если $|z| \leq \delta T$, δ — достаточно малое положительное число, то $|\arg(T - z)| \leq 2\delta$. Отсюда и из (3.14)–(3.16) следует, что для $|z| \leq \delta T$ выполняется неравенство $|\gamma_T(z)| \leq C_\delta$. В силу (3.13) для $|z| > \delta T$ выполняется неравенство $|\gamma_T(z)| \leq C e^{c_\delta |z|^\varrho}$. Таким образом $\gamma_T \in \mathbf{F}_1$. Далее, из (3.16) следует, что $\sup_{|x| \leq 1} |\gamma(x)| \leq$

Ce^{-cT^e} . Следовательно, опять информация Фишера второй вспомогательной задачи $I(\theta) \leq Ce^{-cT^e}$. Теорема 1.2 доказана полностью.

4. Доказательство теоремы 1.3. Рассмотрим следующую задачу оценивания (вторая вспомогательная задача п. 3): оценить плотность распределения $f \in \mathbf{F} = \mathbf{F}_d(M, \sigma, (1, \dots, 1))$ на кубе $G = [-1, 1]^d$ по наблюдениям

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \quad Y_j = X_j I(X_j). \quad (4.1)$$

Мы уже отмечали, что если f^* пробегает все статистики $f^*(Y_1, \dots, Y_n)$, а $\hat{f}$ — все статистики $\hat{f}$, построенные по цензурированной кубом G выборке (1.1), то

$$\inf_{f^*} \sup_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{E} \int_G |f^*(x) - f(x)|^2 dx \leq \inf_{\hat{f}} \sup_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{E} \int_G |\hat{f}(x) - f(x)|^2 dx. \quad (4.2)$$

Поэтому нам достаточно доказать, что в задаче оценивания f по выборке (4.1)

$$\inf_{f^*} \sup_{f \in \mathbf{F}} \int_G |f^*(x) - f(x)|^2 dx \geq c \frac{1}{n} \left(\frac{\ln n}{\ln \ln n} \right), \quad c > 0. \quad (4.3)$$

Это последнее неравенство и доказывается ниже.

Для оценки левой части (4.3) мы воспользуемся методом из [12]; точнее его вариантом из [4]. Обозначим $\|f\|$ норму f в $L_2(G)$. Рассмотрим некоторое конечное семейство плотностей $\{f_1, \dots, f_N\}$ из $\mathbf{F}$ такое, что $\|f_i - f_j\| \geq \delta$. Тогда для любой оценки f^*

$$\begin{aligned} \delta^{-2} \sup_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{E}_f \|f^* - f\|^2 &\geq \delta^{-2} \sup_{f_j} \mathbf{E}_{f_j} \|f^* - f\|^2 \\ &\geq (4N)^{-1} \sum_1^N \mathbf{P}_{f_j} \left\{ \|f^* - f_j\| > \frac{\delta}{2} \right\} = \frac{1}{4} p_e. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Если η — случайный элемент, принимающий значения f_j , $j = 1, \dots, N$, с вероятностями N^{-1} , то по лемме Фэнно (см., например, [5]; ср. также [12])

$$p_e \geq 1 - (\ln N)^{-1} I(\eta; (Y_1, \dots, Y_n)),$$

где через $I(\eta; \xi)$ обозначается информация Шеннона о случайном элементе η в случайном элементе ξ (относительно количества информации по Шеннону см., например, [3]). Поскольку для независимых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$I(\eta; (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) \leq \sum_1^n I(\eta; \xi_j),$$

то

$$p_e \geq 1 - n(\ln N)^{-1} I(\eta; Y_1). \quad (4.5)$$

Оценка $I(\eta; Y_1)$ осуществляется тем же способом, что и в [12]. Пусть μ, ν обозначают меру Лебега и считающую меру, сосредоточенную на множестве целых чисел соответственно, и пусть $m = \mu + \nu$.

Если величины X_j имеют плотность распределения f , то распределения величин Y_j имеют по отношению к t плотность распределения

$$p(x) = f(x)I(x)(1 - I_0(x)) + I_0(x) \int_{\mathbf{R}^d} f(x)(1 - I(x)) dx.$$

Здесь I, I_0 — индикаторы G и $\{0\}$ соответственно. Пусть f_0 — какая-нибудь плотность распределения и пусть $p_0(x) = f_0(x)I(x)(1 - I_0(x)) + I_0(x) \cdot \int_{\mathbf{R}^d} f_0(x)(1 - I(x)) dx$. Теми же методами, что и в [12], неравенство (3.3) этой работы, доказывается, что

$$I(\eta; Y_1) \leq \max_{1 \leq i \leq N} \int_G \frac{(p_i(x) - p_0(x))^2}{p_0(x)} dx$$

и, следовательно,

$$\sup_{f \in \mathbf{F}_\sigma} \mathbf{E}_f \|\hat{f} - f\|^2 \geq \frac{\delta^2}{4} \left(1 - \frac{n}{\ln N} \max_{1 \leq i \leq N} \int_G \frac{(f_i(x) - f_0(x))^2}{f_0(x)} dx \right). \quad (4.6)$$

Определим семейство плотностей $\mathbf{A} = \{f(x; \mathbf{a})\}$, $\mathbf{a} = \{a_\nu: \nu = (\nu_1, \dots, \nu_d), \nu_j = 1, 2, \dots, M\}$ равенством

$$f(x; \mathbf{a}) = \prod_1^d \frac{\sin^2 \gamma x_j}{\pi \gamma x_j^2} \left(1 + \prod_{j=1}^d \prod_{l=1}^{2M} \frac{\sin(\gamma l^{-2} x_j)}{x_j} \sum_\nu a_\nu P_\nu(x) \right).$$

Здесь, как и в п. 2 $P_\nu(x) = P_{\nu_1}(x_1) \cdots P_{\nu_d}(x_d)$, $P_{\nu_i}(x_i)$ — ортонормированные полиномы Лежандра. Коэффициенты $a_\nu = \pm 1$, если все ν_i — нечетные числа, коэффициенты $a_\nu = 0$, если хоть один из индексов ν_i — четное число. Общее число функций семейства $N = c_d M^d$. Ясно, что все $f(z; \mathbf{a})$ суть целые функции конечной степени не выше 3γ и для $\gamma \leq \sigma_i/3$, $i = 1, \dots, d$, все $f \in \mathbf{F}$ с заданным σ и некоторым M .

Поскольку $P_{2k+1}(x)$ — нечетные функции,

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x) dx = \left(\frac{1}{\pi \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma x}{x^2} dx \right)^d = 1.$$

Покажем теперь, что $f(x) \geq 0$. Имеем

$$\prod_{j=1}^d \prod_{l=1}^{2M} \left| \frac{\sin \gamma l^{-2} x_j}{x_j} \right| \left| \sum_\nu a_\nu P_\nu(x) \right| \leq h(x_1) \cdots h(x_d),$$

где

$$h(y) = \prod_1^{2M} \left| \frac{\sin \gamma l^{-2} y}{y} \right| \left| \sum_1^M |P_k(y)| \right| \leq \min \left(\frac{1}{(2M!)^2}, \frac{1}{|y|^{2M}} \right) \sum_1^M |P_k(y)|.$$

В силу (2.5) для $|y| \leq 1$

$$h(y) \leq \frac{2M\sqrt{M}}{(2M!)^2} \leq \frac{1}{2},$$

если $M > 2$. В силу (2.6) для $1 < |y| \leq 4$

$$h(y) \leq M\sqrt{2M} \cdot 8^M \cdot (2M!)^{-2} \leq \frac{1}{2},$$

если $M > 12$. Наконец, снова в силу (2.6), для $|y| > 4$

$$h(y) \leq M\sqrt{2M}(|y|)^{-2M}|y|^M \leq M\sqrt{2M}2^{-M} \leq \frac{1}{2},$$

если $M > 4$. Поэтому для всех $M > 12$ выполняются неравенства

$$f(x; \mathbf{a}) \geq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^d \frac{\sin^2 \gamma x_i}{\gamma \pi x_i^2} > 0,$$

и все функции семейства $\mathbf{A}$ суть плотности распределения из $\mathbf{F}$.

Семейство $\mathbf{A}$ послужит нам базой для построения семейства плотностей f_j из неравенства (4.6). Заметим сперва, что если $|y| \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, то

$$\gamma \left(1 - \frac{\gamma^2 y^2}{6}\right) \leq \frac{\sin \gamma y}{y} \leq \gamma \left(1 - \frac{\gamma^2 y^2}{8}\right).$$

Поэтому найдутся такие положительные постоянные $0 < c \leq C < \infty$, что для $0 < \gamma \leq 1$

$$\begin{aligned} c\gamma^{4dM}(2M!)^{-2d} \sum_{\nu} |a_{\nu} - b_{\nu}|^2 &\leq \|f(\cdot; \mathbf{a}) - f(\cdot; \mathbf{b})\|^2 \\ &\leq C\gamma^{4dM}(2M!)^{-2d} \sum_{\nu} |a_{\nu} - b_{\nu}|^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Лемма 4.1. Пусть функции $\mathbf{a}(\omega)$ определены на конечном множестве Ω , $\text{card } \Omega = L$, и принимают там значения ± 1 . Найдется такое множество $\mathbf{A}_0$ функций $\mathbf{a}$, что $\sum_{\omega} |\mathbf{a}(\omega) - \mathbf{a}'(\omega)| \geq L/4$ для всех пар $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$ из $\mathbf{A}_0$ и

$$\text{card } \mathbf{A}_0 \geq \left(2^{-L} \sum_{k=0}^{\lfloor L/4 \rfloor} C_L^k\right)^{-1} \geq \exp \left\{ \frac{L}{8} \right\}. \quad (4.8)$$

Первое из неравенств (4.8) — это неравенство Гилберта или Варшамова-Гилберта из теории кодирования, см. [2, с. 546–547], второе неравенство легко следует из элементарных теорем о вероятностях больших отклонений для испытаний Бернулли. Подробнее см. [6].

Из леммы 4.1 и неравенства (4.7) следует, что из семейства плотностей $\mathbf{A}$ можно выделить такое подмножество $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}$, что $\text{card } \mathbf{A}_0 \geq C \exp\{cM^d\}$, $C, c > 0$ и что

$$\delta^2 = \min \|f_i - f_j\|^2 \geq c_0 \gamma^{4dM} (2M!)^{-2d} M^d, \quad c_0 > 0, \quad (4.9)$$

где минимум берется по всем $f_i, f_j, i \neq j$ из $\mathbf{A}_0$. Примем за $\mathbf{A}_0$ семейство плотностей $f_i, i = 1, \dots, N, N \geq C e^{cM^d}$, из неравенства (4.6). Положим

$$f_0(x) = \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2 \gamma x_j}{\pi \gamma x_j^2}.$$

Из неравенств (4.9) и (4.6) следует тогда, что для любой оценки f^*

$$\sup_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{E}_f \|f^* - f\|^2 \geq \frac{\delta^2}{4} (1 - C \cdot n(\ln N)^{-1} \cdot \gamma^{4Md} (2M!)^{-2d} M^d). \quad (4.10)$$

Выберем в качестве M наименьшее целое число, для которого $C \gamma^{4Md} (2M!)^{-2d} M^d \cdot (\ln N)^{-1} \cdot n \leq \frac{1}{2}$. Тогда $M \asymp \ln n / \ln \ln n$ и для всех больших n

$$\sup_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{E}_f \|f^* - f\|^2 \geq \frac{\delta^2}{16} \geq \frac{c}{n} \left(\frac{\ln n}{\ln \ln n} \right)^d. \quad (4.11)$$

Последнее неравенство доставляет нам нужную нижнюю границу и вместе с теоремой 2.1 доказывает теорему 1.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций вещественной переменной. М.-Л.: ОНТИ, 1937, 203 с.
2. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. М: Советское радио, 1974, 720 с.
3. Гельфанд И. М., Яглом А. М. О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции. — Успехи матем. наук, 1957, т. 12, № 1, с. 3–52.
4. Ибрагимов И. А. Об оценивании аналитической плотности распределения по цензурированной выборке. — Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 2004, т. 311, с. 147–160.
5. Ибрагимов И. А., Хасминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 527 с.
6. Ибрагимов И. А., Хасминский Р. З. Об оценке плотности распределения. — Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1980, т. 98, с. 61–85.
7. Ибрагимов И. А., Хасминский Р. З. Об оценке плотности распределения, принадлежащей одному классу целых функций. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 3, с. 514–524.
8. Ибрагимов И. А. Об экстраполяции целых функций наблюдаемых в гауссовском белом шуме. — Укр. матем. журнал, 2000, т. 21, в. 3, с. 58–69.
9. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956, 632 с.
10. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962, 500 с.
11. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974, 331 с.
12. Nazminskii R., Ibragimov I. On density estimation in the view of Kolmogorov's ideas in approximation theory. — Ann. Statist., 1990, v. 18, № 3, p. 999–1010.
13. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968, 279 с.
14. Ченцов Н. Н. Оценка неизвестной плотности распределения по наблюдениям. — Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 1, с. 45–48.