Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Надточий, Асимптотическое поведение случайного блуждания с взаимодействием, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 1, 126–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:22:52

© 2006 г.

НАДТОЧИЙ С. А.*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО
БЛУЖДЕНИЯ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

В работе рассматривается простейшее одномерное случайное блуждание, в котором статистический вес траектории имеет вид $\pi_\beta(\omega) = \exp\{-\beta \sum_{0 \leq i < j \leq n} V(|\omega_j - \omega_i|)\}$, где β играет роль обратной температуры, V — неотрицательная убывающая финитная функция. Мы показываем, что при $\beta > \beta_0$ распределение ω_n сосредоточено в области $\{|\omega_n| > cn\}$, где $c = c(\beta) > 0$, а при $\beta < 0$ траектория становится локализованной в том смысле, что ω_n заключено внутри некоторого фиксированного интервала.

Ключевые слова и фразы: потенциал, случайное блуждание, самоотталкивающее случайное блуждание, асимптотическое поведение.

Пусть $\{\omega_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ — простейшее случайное блуждание на целочисленной решетке, у которого вероятность каждой траектории определяется формулой

$$P_\beta(\omega) = P(\omega) c_{\beta,n} \exp\left\{-\beta \sum_{0 \leq i < j \leq n} V(|\omega_j - \omega_i|)\right\}, \quad (*)$$

где $P(\omega) = 1/2^n$ есть равномерная мера, $c_{\beta,n}$ — нормирующий множитель, равный $(E_P \exp\{-\beta \sum_{0 \leq i < j \leq n} V(|\omega_j - \omega_i|)\})^{-1}$, и $V(x)$ — функция взаимодействия, представимая в виде $V(x) = \sum_{k=0}^M a_k I_{\{x=k\}}$, где $\{a_k\}_{k=0,1,\dots,M}$ — убывающая последовательность положительных чисел. Параметр β играет роль обратной температуры в статистической механике, $-\infty < \beta < \infty$. Такой процесс будем называть *случайным блужданием с взаимодействием*.

Поведение такого блуждания существенно зависит от параметра β . В случае положительных β вероятность траектории тем больше, чем больше расстояние между ее значениями в произвольные моменты времени. Поэтому наиболее вероятной в данном случае является монотонно

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: snadtoch@princeton.edu

возрастающая (убывающая) траектория, у которой $\omega_i = i$ ($\omega_i = -i$). В этом случае блуждание естественно назвать *самоотталкивающим*.

Если же $\beta < 0$, то ситуация становится противоположной: более вероятными оказываются те траектории, значения которых близки друг к другу, т.е. случайное блуждание становится *локализованным*.

В данной работе изучается распределение ω_n . Интерес к этому распределению возник из задач теории вероятностей и статистической физики, см. [1]–[5]. Ниже будет доказано, что при больших положительных (фиксированных) β с вероятностью, стремящейся к единице, $|\omega_n| \geq \varepsilon n$, где $\varepsilon = \varepsilon(\beta)$, а при $\beta < 0$, также с вероятностью, стремящейся к единице, значение ω_n сосредоточено в некотором интервале. Случай значения $\beta = 0$ не рассматривается, поскольку тогда процесс превращается в простейшее случайное блуждание, т.е. $P_0(\omega) = P(\omega) = 1/2^n$. Наши результаты формально описываются в следующей теореме.

Теорема. В приведенных выше обозначениях

1) существует такое положительное β_0 , что для любого $\beta > \beta_0$ найдутся $\varepsilon = \varepsilon(\beta) > 0$ и $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ такие, что

$$P_\beta\{|\omega_n| < \varepsilon n\} = O(\exp\{-\alpha n\});$$

2) для любого $\beta < 0$ найдутся $C = C(\beta) > 0$ и $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ такие, что

$$P_\beta\{|\omega_n| > C\} = O(\exp\{-\alpha n\}).$$

П р и м е ч а н и е. Числа $\varepsilon(\beta)$ и $C(\beta)$ выбираются так:

$$\varepsilon < 1 - \frac{2 \ln 2}{\beta V(0)}, \quad C > 1 + \frac{2 \ln 2}{|\beta| (V(0) - V(1))}.$$

Однако было бы естественно предположить, что первое утверждение теоремы справедливо для любого $\varepsilon < 1$, а во втором можно положить $C = 1$. Это предположение пока не доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $\beta > 0$. Обозначим $f_{\beta,n}(\omega) = \exp\{-\beta \sum_{0 \leq i < j \leq n} V(|\omega_j - \omega_i|)\}$. Тогда $c_{\beta,n} = (E_P f_{\beta,n}(\omega))^{-1}$. Будем оценивать величину $P_\beta\{|\omega_n| < \varepsilon n\}$ для некоторого малого $\varepsilon > 0$. Имеем $P_\beta\{|\omega_n| < \varepsilon n\} = c_{\beta,n} E_P(f_{\beta,n} I_{\{|\omega_n| < \varepsilon n\}})$. Оценим сверху $f_{\beta,n}(\omega)$ на множестве $A_x = \{\omega: \omega_n = x\}$. Поскольку процесс симметричен, можно считать, что $x > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j \leq n} V(|\omega_j - \omega_i|) &= \sum_{k=0}^M a_k \sum_{0 \leq i < j \leq n} I_{\{|\omega_j - \omega_i| = k\}} \\ &= a_0 \# \{(i, j): 0 \leq i < j \leq n, |\omega_j - \omega_i| = 0\} \\ &\quad + \dots + a_M \# \{(i, j): 0 \leq i < j \leq n, |\omega_j - \omega_i| = M\}. \end{aligned}$$

Оценим снизу числа $N_k(\omega) = \#\{(i, j): 0 \leq i < j \leq n, |\omega_j - \omega_i| = k\}$. Для этого введем множества B_y , где каждое B_y есть множество траекторий, которые ровно в y моментов времени оказываются внутри полосы $[-M, M]$. Теперь оценим $N_k(\omega)$ на $A_x \cap B_y$.

Рассмотрим произвольную траекторию, ведущую из нуля в x и при этом ровно y раз попадающую внутрь полосы $[-M, M]$. У такой траектории есть по крайней мере $n - y$ моментов времени, когда процесс удален от нуля не менее, чем на M . Более формально: для всех $\omega \in A_x \cap B_y$ верно $\#\{0 \leq i \leq n: |\omega_i - \omega_0| \geq M\} \geq n - y$.

Процесс совершает только единичные скачки, поэтому если $|\omega_j - \omega_0| \geq M$, то для всякого натурального $k \leq M$ найдется $i < j$ такое, что $|\omega_j - \omega_i| = k$. А это означает, что для всех $k = 1, \dots, M$ на множестве $A_x \cap B_y$ верно $N_k(\omega) \geq n - y$.

Осталось оценить N_0 . Для этого нам понадобится следующая не-сложная лемма.

Лемма. Пусть $\{\xi_s\}_{s=1, \dots, k+m}$ — слово из ± 1 , в котором число -1 равно k , а число $+1$ равно m , причем $k \leq m$. Тогда существует по крайней мере k пар (i, j) , $i < j$ таких, что $\sum_{s=i}^j \xi_s = 0$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $k + m$. База для $k + m = 2$ очевидна. Пусть утверждение верно для $2, 3, \dots, n - 1$, докажем его справедливость для n .

Найдем в последовательности $\{\xi_s\}$ два различных числа, стоящих рядом, т.е. $\xi_{i_0} \neq \xi_{i_0+1}$ (это можно сделать всегда, если $k > 0$; если же $k = 0$, утверждение очевидно). Выкинув их из последовательности, получим новую последовательность $\{\tilde{\xi}_s\}_{s=1, \dots, n-2}$, в которой также число отрицательных элементов не превосходит числа положительных. К ней применимо предположение индукции. Получим $k - 1$ пар $i < j$ таких, что $\sum_{s=i}^j \tilde{\xi}_s = 0$. При этом $\tilde{\xi}_s = \xi_s$ для $s = 1, \dots, i_0 - 1$ и $\tilde{\xi}_s = \xi_{s+2}$ для $s = i_0, \dots, n - 2$. Таким образом, суммы, в которые входят только величины с номерами строго меньшими i_0 , как и те, в которых все индексы не меньше i_0 , нам подходят. Для таких пар (i, j) имеем $\sum_{s=i}^j \xi_s = \sum_{s=i}^j \tilde{\xi}_s = 0$. Если же $i < i_0 < j$, то $0 = \sum_{s=i}^j \xi_s = \sum_{s=i}^{j+2} \tilde{\xi}_s - (\xi_{i_0} + \xi_{i_0+1}) = \sum_{s=i}^{j+2} \tilde{\xi}_s$. Таким образом, для исходной последовательности $\{\xi_s\}$ мы получили $k - 1$ искомым пар (i, j) . Последняя же пара — это $(i_0, i_0 + 1)$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Нам осталось оценить

$$\begin{aligned} N_0(\omega) &= \#\{(i, j): 0 \leq i < j \leq n, |\omega_j - \omega_i| = 0\} \\ &= \#\{(i, j): 0 \leq i < j \leq n, \omega_j = \omega_i, |\omega_i| \leq M\} \\ &\quad \sqcup \{(i, j): 0 \leq i < j \leq n, \omega_j = \omega_i, |\omega_i| > M\} = N_0^{\leq M} + N_0^{> M} \end{aligned}$$

на множестве $A_x \cap B_y$. Поскольку по крайней мере y раз процесс принимает значение из множества $[-M, -M + 1, \dots, M]$, существует точка

в этом множестве, в которую он попадает по крайней мере $y/(2M+1)$ раз. Тогда

$$N_0^{\leq M} \geq \frac{1}{2} \frac{y}{2M+1} \left(\frac{y}{2M+1} - 1 \right).$$

Теперь оценим $N_0^{>M}$. Для этого рассмотрим произвольную траекторию $\omega = \{\omega_0, \dots, \omega_n\}$ из множества $A_x \cap B_y$. Выделим непрерывные компоненты траектории, лежащие вне полосы $[0, n] \times [-M, M]$, и запишем их как $\{\{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{j_1}\}, \dots, \{\omega_{i_r}, \dots, \omega_{j_r}\}\}$. Отметим, что каждый из этих участков либо строго положителен, либо строго отрицателен. Соединим их последовательно следующим образом. Не ограничивая общности, будем считать, что первый участок положителен. Перенесем его начало в начало координат и получим $\{\tilde{\omega}_{i_1} = 0, \tilde{\omega}_{i_1+1}, \dots, \tilde{\omega}_{j_1-1}, \tilde{\omega}_{j_1} = 0\}$. Затем действуем по правилу: если на k -м шаге конец уже существующей конструкции и начало следующего участка одного знака (условимся, что у нуля знак $+$), то они склеиваются, т.е. $\{\tilde{\omega}_{i_1} = 0, \tilde{\omega}_{i_1+1}, \dots, \tilde{\omega}_{j_1}\}, \{\omega_{i_k}, \dots, \omega_{j_k}\}$ объединяются в $\{\tilde{\omega}_{i_1} = 0, \tilde{\omega}_{i_1+1}, \dots, \tilde{\omega}_{j_1}, \tilde{\omega}_{i_k+1} + (\tilde{\omega}_{j_1} - \omega_{i_k}), \dots, \omega_{j_k} + (\tilde{\omega}_{j_1} - \omega_{i_k})\}$. Если же они разного знака, то отрицательный участок должен оказаться на единицу ниже. Если, например, $\tilde{\omega}_{j_1} = -1$ (из построения видно, что $\tilde{\omega}_{j_1}$ может принимать только значения 0 и -1), а $\omega_{i_k} > 0$, то $\{\tilde{\omega}_{i_1} = 0, \tilde{\omega}_{i_1+1}, \dots, \tilde{\omega}_{j_1-1}, \tilde{\omega}_{j_1} = -1\}, \{\omega_{i_k} > 0, \tilde{\omega}_{i_1+1}, \dots, \tilde{\omega}_{j_1-1}, \omega_{j_k} > 0\}$ перейдут в

$$\{\tilde{\omega}_{i_1} = 0, \tilde{\omega}_{i_1+1}, \dots, \tilde{\omega}_{j_1-1}, \tilde{\omega}_{j_1} = -1, \omega_{i_k} - \omega_{i_k} = 0, \\ \omega_{i_k+1} - \omega_{i_k}, \dots, \tilde{\omega}_{j_k-1} - \omega_{i_k}, \omega_{j_k} - \omega_{i_k} = 0\}.$$

В итоге мы получим новую траекторию $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_l\}$ длины $l \leq n - y$, поскольку она сконструирована из участков суммарной длины $n - y$. Однако при каждом «склеивании» мы уменьшали длину нового участка на единицу. Всего склеиваний может быть не больше, чем y , поэтому $l \geq n - 2y$.

Легко увидеть, что на новой траектории количество пар $i < j$ таких, что $\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_j$, не больше, чем количество пар $i < j$ на старой траектории таких, что $\omega_i = \omega_j, |\omega_i| > M$. Таким образом, $N_0(\tilde{\omega}) \leq N_0^{>M}(\omega)$. Заметим теперь, что траектория $\tilde{\omega}$ длины l ведет из 0 в $(x - M - 1)^+$. Поскольку для $\tilde{\omega}$ по построению верно $|\tilde{\omega}_{i+1} - \tilde{\omega}_i| = 1, i = 0, 1, \dots, l - 1$, ей можно естественным образом сопоставить $\{\xi_s\}_{s=1, \dots, l}$ — набор из ± 1 . При этом количество -1 в этом наборе равно $(l - (x - M - 1)^+)/2$. Значит, по лемме, существует по крайней мере столько же пар $i < j$, таких, что $\tilde{\omega}_j - \tilde{\omega}_i = \sum_{s=i+1}^j \xi_s = 0$. Объединим полученные неравенства

$$N_0^{>M}(\omega) \geq N_0(\tilde{\omega}) \geq \frac{l - (x - M - 1)^+}{2} \geq \frac{n - 2y - (x - M - 1)^+}{2}.$$

Теперь можно закончить оценку N_0 . Имеем

$$N_0 = N_0^{\leq M} + N_0^{> M} \geq \frac{1}{2} \frac{y}{2M+1} \left(\frac{y}{2M+1} - 1 \right) + \frac{n - 2y - (x - M - 1)^+}{2}.$$

Тогда на множестве $A_x \cap B_y$ верно

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} V(|\omega_j - \omega_i|) \geq a_0 \left(\frac{1}{2} \frac{y}{2M+1} \left(\frac{y}{2M+1} - 1 \right) + \frac{n - 2y - (x - M - 1)^+}{2} \right) + (n - y) \sum_{k=1}^M a_k.$$

Подсчитав минимум последнего выражения как функции от y , получаем

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} V(|\omega_j - \omega_i|) \geq a_0 \frac{n - x}{2} + n \sum_{k=1}^M a_k + \tilde{C},$$

где $\tilde{C}$ зависит только от функции V . Последнее выражение дает равномерную оценку уже на множестве A_x . Теперь, поскольку это выражение убывает по x , на множестве $\{\omega: 0 \leq \omega_n < \varepsilon n\}$ справедливо неравенство

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} V(|\omega_j - \omega_i|) \geq a_0 \frac{n(1 - \varepsilon)}{2} + n \sum_{k=1}^M a_k + \tilde{C}.$$

Осталось оценить сверху $c_{\beta, n} = (\mathbf{E}_{\mathbf{P}} f_{\beta, n}(\omega))^{-1}$. Для этого оценим снизу $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} f_{\beta, n}(\omega)$ значением $f_{\beta, n}(\omega)$ на монотонно возрастающей траектории, умноженным на вероятность этой траектории (в смысле равномерной меры $\mathbf{P}$). Тогда

$$c_{\beta, n} \leq 2^n \exp \left\{ \beta n \sum_{k=1}^M a_k \right\}.$$

Объединяя два последних неравенства, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\beta} \{|\omega_n| < \varepsilon n\} &\leq 2 \mathbf{P}_{\beta} \{0 \leq \omega_n < \varepsilon n\} = c_{\beta, n} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (f_{\beta, n} I_{\{0 \leq \omega_n < \varepsilon n\}}) \\ &\leq 2^n \exp \left\{ \beta n \sum_{k=1}^M a_k \right\} \exp \left\{ -\beta n \left(a_0 \frac{1 - \varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^M a_k \right) - \beta \tilde{C} \right\} \\ &= \exp \{-\beta \tilde{C}\} \exp \left\{ -n \left(\beta a_0 \frac{1 - \varepsilon}{2} - \ln 2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если взять $\beta > (2 \ln 2)/a_0$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что последнее выражение будет убывать экспоненциально по n . Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $\beta < 0$. Для удобства записи будем считать, что n — четное, т.е. всюду далее вместо n пишем $2n$.

Оценим сверху значение выражения $\sum_{0 \leq i < j \leq 2n} V(|\omega_j - \omega_i|)$ на множестве A_x . Для этого сначала оценим

$$N_0(\omega) = \#\{(i, j): 0 \leq i < j \leq 2n, \omega_j = \omega_i\}.$$

Заметим, что событие $\{\omega_i = \omega_j\}$ возможно, только если i и j имеют одинаковую четность. Посчитаем сначала четные пары. Для произвольной траектории, ведущей из нуля в x , рассмотрим множество ее значений в четные моменты времени $\{\omega_0, \omega_2, \dots, \omega_{2n}\}$. Пусть в этом множестве k различных чисел, которые встречаются там $n_1, \dots, n_k$ раз соответственно, и при этом $n_1 + \dots + n_k = n$. Будем считать, что $n_1 \geq \dots \geq n_l > 1$, $n_{l+1} = \dots = n_k = 1$. Тогда количество четных пар $i < j$ таких, что $\omega_i = \omega_j$, равно

$$N_{0,0}(\omega) = \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \dots + \frac{n_l(n_l - 1)}{2} = Q_k(n_1, \dots, n_k).$$

Теперь рассмотрим другой набор $\{n'_1, \dots, n'_k\}$, который отличается от исходного только двумя элементами: $n'_1 = n_1 + 1$ и $n'_l = n_l - 1$. При этом сумма элементов нового, штрихованного, набора будет также равна n , а значение выражения Q_k на новом наборе увеличится на $n_1 - n_l + 1 > 0$. Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока не получим $\tilde{n}_1 = n - k + 1$, $\tilde{n}_2 = \dots = \tilde{n}_k = 1$. Значение Q_k на этом наборе будет равно $Q_k^* = (n - k + 1)(n - k)/2$, и оно будет не меньше, чем значение на исходном наборе. Вспомним теперь, что мы рассматриваем траектории, идущие из нуля в x , поэтому в множество $\{\omega_0, \omega_2, \dots, \omega_{2n}\}$ входят по крайней мере все четные числа из отрезка $[0, x]$. Следовательно, $k \geq [x/2] + 1$. А значит, $Q_k^* \leq (n - [x/2])(n - [x/2] - 1)/2$. Эта оценка уже не зависит от k , поэтому на множестве A_x можно написать неравенство

$$N_{0,0}(\omega) \leq Q_k^* \leq \frac{(n - [x/2])(n - [x/2] - 1)}{2}.$$

Для нечетных пар $i < j$ получается аналогичное неравенство

$$N_{0,1}(\omega) \leq \frac{(n - [(x+1)/2] + 1)(n - [(x+1)/2])}{2}.$$

Суммируя их, получаем оценку на множестве A_x :

$$N_0(\omega) = N_{0,0}(\omega) + N_{0,1}(\omega) \leq n^2 - n \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8} = R(n, x).$$

Вспомним представление $\sum_{0 \leq i < j \leq 2n} V(|\omega_j - \omega_i|) = a_0 N_0 + \dots + a_M N_M$ и учтем, что $N_0 + \dots + N_M \leq 2n(2n+1)/2$ и что $a_k \downarrow$. Тогда на A_x верно

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j \leq 2n} V(|\omega_j - \omega_i|) &\leq a_0 N_0 + a_1 (n(2n+1) - N_0) \\ &\leq (a_0 - a_1) R(n, x) + a_1 n(2n+1). \end{aligned}$$

Но $R(n, x)$ убывает по x при $x \in [0, 2n]$. Таким образом, на множестве $\{\omega: \omega_{2n} > C\}$ справедливо неравенство

$$f_{\beta, 2n}(\omega) \leq \exp \left\{ -\beta \left(n^2(a_0 + a_1) - n \left((a_0 - a_1) \left(C - \frac{1}{2} \right) - a_1 \right) + (a_0 - a_1) C^2 \right) \right\}.$$

Теперь оценим снизу $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} f_{\beta, 2n}(\omega)$ значением $f_{\beta, 2n}(\omega)$ на траектории $\omega_{k+1} = \omega_k + (-1)^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2n-1$, умноженным на ее вероятность (в смысле меры $\mathbf{P}$). Получим

$$c_{\beta, 2n} = (\mathbf{E}_{\mathbf{P}} f_{\beta, 2n}(\omega))^{-1} \leq 2^{2n} \exp\{\beta(a_0 n^2 + a_1 n(n+1))\}.$$

Пользуясь двумя последними неравенствами, можно оценить искомую вероятность:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\beta}\{|\omega_{2n}| > C\} &= 2 \mathbf{P}_{\beta}\{\omega_{2n} > C\} = 2 c_{\beta, 2n} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f_{\beta, 2n}(\omega) I_{\{\omega_{2n} > C\}}) \\ &\leq \exp\{-\beta(a_0 - a_1) C^2\} \exp \left\{ n \left(2 \ln 2 + \beta(a_0 - a_1) \left(C - \frac{1}{2} \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Теперь выбором C можно сделать так, чтобы эта величина убывала экспоненциально по n . Доказательство теоремы закончено.

Я благодарю С. А. Пирогова и Я. Г. Синая за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Amit D. J., Parisi G., Peliti L. Asymptotic behaviour of the «true» self-avoiding walk. — Phys. Rev. B., 1983, v. 27, № 3, p. 1635–1645.
2. Coppersmith D., Diaconis P. Random walks with reinforcements. — Preprint, Stanford University, 1987.
3. Davis B. Reinforced random walk. — Probab. Theory Related Fields, 1990, v. 84, № 2, p. 203–229.
4. Durrett R. T., Rogers L. C. G. Asymptotic behaviour of Brownian polymers. — Probab. Theory Related Fields, 1992, v. 92, № 3, p. 337–349.
5. Pelit L., Pietronero L. Random walks with memory. — Riv. Nuovo Cimento, 1987, v. 10, p. 1–33.
6. Tóth B. The «true» self-avoiding walk with bond repulsion on $\mathbf{Z}$: limit theorems. — Ann. Probab., 1995, v. 23, № 4, p. 1523–1556.
7. Tóth B. «True» self-avoiding walks with generalized bond repulsion on $\mathbf{Z}$. — J. Statist. Phys., 1994, v. 77, № 1–2, p. 17–33.
8. Tóth B. Generalized Ray-Knight theory and limit theorems for self-interacting random walks on $\mathbf{Z}^1$. — Ann. Probab., 1996, v. 24, № 3, p. 1324–1367.

Поступила в редакцию
12.IX.2005