Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Холево, Комплементарные каналы и проблема аддитивности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 1, 133–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:08:48

© 2006 г.

ХОЛЕВО А. С.*

КОМПЛЕМЕНТАРНЫЕ КАНАЛЫ И
ПРОБЛЕМА АДДИТИВНОСТИ¹⁾

Мы исследуем отношение комплементарности между выходной системой и окружением квантового канала (или, более общо, вполне положительного (в.п.) отображения) и отмечаем, что значения выходных характеристик комплементарных каналов совпадают. Поэтому выполнение гипотезы мультипликативности/аддитивности для некоторого класса в.п. отображений равносильно ее выполнению для комплементарных отображений. Описан класс в.п. отображений, комплементарных к отображениям, разрушающим сцепленность, и показано, что он содержит как подкласс диагональные в.п. отображения. Таким образом, построен новый класс в.п. отображений (каналов), для которых выполняется гипотеза мультипликативности/аддитивности. Кратко обсуждаются в этом контексте также ковариантные и гауссовские каналы.

Ключевые слова и фразы: квантовый канал, вполне положительное отображение, гипотеза аддитивности.

Проблема аддитивности — одна из наиболее глубоких математических проблем квантовой теории информации (относительно основных фактов и определений этой теории см. [2], [15]). В настоящем сообщении предлагается конструкция, позволяющая построить целый ряд новых примеров, для которых эта проблема имеет положительное решение.

1. В дальнейшем $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \dots$ обозначают унитарные пространства (конечных) квантовых систем $A, B, \dots$. Символ $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ обозначает алгебру всех операторов, $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ — выпуклое подмножество операторов плотности (состояний), а $\mathfrak{P}(\mathcal{H}) = \text{ext}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ — множество всех чистых состояний (одномерных проекторов) в $\mathcal{H}$. Для натурального числа d символ $\mathcal{H}_d$ обозначает унитарное пространство d -мерных комплексных векторов, а $\mathcal{M}_d$ — алгебру всех комплексных $(d \times d)$ -матриц. Линейное отображение $\Phi: \mathcal{M}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}_B)$ называется *положительным*, если $\rho \geq 0$ влечет $\Phi(\rho) \geq 0$, и *вполне положительным* (ВП), если отображение $\Phi \otimes \text{Id}_d$, где Id_d — тождественное отображение в $\mathcal{M}_d$, положительно для всех $d = 1, 2, \dots$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: holevo@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке научной программы «теоретические проблемы современной математики» Отделения математики РАН.

Пусть имеется три унитарных пространства $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_C$ и линейный оператор $V: \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$, тогда соотношения

$$\Phi_B(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_C} V \rho V^*, \quad \Phi_C(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_B} V \rho V^*; \quad \rho \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_A), \quad (1)$$

задают два в.п. отображения $\Phi_B: \mathcal{M}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}_B)$, $\Phi_C: \mathcal{M}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}_C)$, которые мы назовем взаимно *комплементарными*. Если V — изометрия, то оба отображения сохраняют след, т.е. являются *каналами*. Термин «комплементарные каналы» взят из работы [5], где они были использованы для определения квантовой версии вырожденных каналов.

Из известной теоремы Стайнспринга о расширении вытекает, что для заданного в.п. отображения всегда существует комплементарное. В приложении приводится доказательство конечномерной версии этой теоремы, которое также проясняет, в каком смысле комплементарное отображение единственно. Из него вытекает, что для данного в.п. отображения Φ_B любые два канала $\Phi_C, \Phi_{C'}$, комплементарные к Φ_B , эквивалентны в том смысле, что существует частичная изометрия $W: \mathcal{H}_C \rightarrow \mathcal{H}_{C'}$ такая, что

$$\Phi_{C'}(\rho) = W \Phi_C(\rho) W^*, \quad \Phi_C(\rho) = W^* \Phi_{C'}(\rho) W \quad (2)$$

для всех ρ . Расширения с минимальной размерностью d_C называются *минимальными*. Любые два минимальные расширения изометричны (т.е. W является изометрией из $\mathcal{H}_C$ на $\mathcal{H}_{C'}$). Расширение Стайнспринга для комплементарного в.п. отображения приводит к отображению, которое эквивалентно исходному в смысле (2). Таким образом, комплементарность является отношением между классами эквивалентности в.п. отображений.

Для упрощения обозначений мы будем также использовать обозначение $\tilde{\Phi}$ для отображения, комплементарного к Φ .

2. Рассмотрим следующие характеристики в.п. отображения Φ :

$$\nu_p(\Phi) = \max_{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})} [\text{Tr} \Phi(\rho)^p]^{1/p}, \quad 1 \leq p, \quad (3)$$

введенные в [1]. Для $p = \infty$ положим $\nu_\infty(\Phi) = \max_{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})} \|\Phi(\rho)\|$. В случае канала Φ другими важными характеристиками являются минимальная выходная энтропия

$$\check{H}(\Phi) = \min_{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})} H(\Phi(\rho)),$$

где $H(\sigma) = -\text{Tr} \sigma \ln \sigma$ — энтропия фон Неймана оператора плотности σ , и ее *выпуклое замыкание*

$$\hat{H}_\Phi(\rho) = \min_{\rho = \sum_x \pi(x) \rho(x)} \sum_x \pi(x) H(\Phi(\rho(x))),$$

где минимум берется по всевозможным разложениям оператора плотности ρ в выпуклые комбинации состояний $\rho(x) \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ [9]. В силу

свойств выпуклости, все эти характеристики сохраняют свою величину, если в их определениях заменить $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ на $\mathfrak{P}(\mathcal{H})$.

Теорема 1. Пусть Φ_1, Φ_2 — два в.п. отображения (канала). Если имеет место какое-либо из соотношений

$$\nu_p(\Phi_1 \otimes \Phi_2) = \nu_p(\Phi_1) \nu_p(\Phi_2), \quad (4)$$

$$\check{H}(\Phi_1 \otimes \Phi_2) = \check{H}(\Phi_1) + \check{H}(\Phi_2), \quad (5)$$

$$\hat{H}_{\Phi_1 \otimes \Phi_2}(\rho_{12}) \geq \hat{H}_{\Phi_1}(\rho_1) + \hat{H}_{\Phi_2}(\rho_2), \quad (6)$$

то аналогичное соотношение имеет место и для пары комплементарных каналов $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2$. Если какое-либо из этих соотношений выполняется для данного Φ_1 и произвольного Φ_2 , то аналогичное соотношение выполняется для комплементарного отображения $\tilde{\Phi}_1$ и произвольного Φ_2 .

З а м е ч а н и е. Напомним, что для двух данных каналов Φ_1, Φ_2 свойство мультипликативности (4) с $p \in [1, 1 + \epsilon]$ влечет аддитивность (5) предельным переходом $p \downarrow 1$ [1]. Свойство (6), которое эквивалентно аддитивности χ -пропускной способности с произвольными ограничениями на входе канала [9], влечет как аддитивность χ -пропускной способности, так и (5) аналогично [17]. С другой стороны, предположение, что (4) с $p \in [1, 1 + \epsilon]$ выполняется для всех в.п. отображений Φ_1, Φ_2 , влечет (5), (6) для всех каналов, а эти два свойства, как и аддитивность χ -пропускной способности, в свою очередь эквивалентны глобально, т.е. если одно из них выполняется для всех каналов, то и остальные верны для всех каналов [17].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ для некоторого $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A$, тогда эрмитовы операторы $\Phi(\rho), \tilde{\Phi}(\rho)$ имеют одинаковый ненулевой спектр. В самом деле, операторы $\Phi(\rho), \tilde{\Phi}(\rho)$ получаются взятием частичного следа от оператора $|\psi_{BC}\rangle\langle\psi_{BC}|$, где $|\psi_{BC}\rangle = V|\psi\rangle \in \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$, по взаимно дополнительным подсистемам, и доказательство аналогично случаю нормированных векторов (см., например, [15, теорема 2.7]).

Как $\text{Tr } \sigma^p$, так и $H(\sigma)$ являются универсальными функциями ненулевых собственных значений эрмитова оператора σ . Из определения $\nu_p, \check{H}$ и $\hat{H}$ следует, что для произвольного в.п. отображения Φ

$$\nu_p(\tilde{\Phi}) = \nu_p(\Phi). \quad (7)$$

Далее, если Φ — канал, то

$$\check{H}(\tilde{\Phi}) = \check{H}(\Phi), \quad (8)$$

$$\hat{H}(\tilde{\Phi}) = \hat{H}(\Phi). \quad (9)$$

Теперь заметим, что если $\Phi_j, \tilde{\Phi}_j, j = 1, 2$, — две пары взаимно комплементарных в.п. отображений, то $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ и $\tilde{\Phi}_1 \otimes \tilde{\Phi}_2$ комплементарны.

Для доказательства достаточно взять $\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{B_1} \otimes \mathcal{H}_{B_2}$, $\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_{C_1} \otimes \mathcal{H}_{C_2}$ и $V = V_1 \otimes V_2$. Суммируя все сказанное, получаем утверждение теоремы.

3. Предположим, что в.п. отображение $\Phi: \mathfrak{M}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{H}')$ дается представлением Крауса

$$\Phi(\rho) = \sum_{\alpha=1}^{\bar{d}} V_{\alpha} \rho V_{\alpha}^*, \quad (10)$$

тогда комплементарное отображение $\tilde{\Phi}: \mathfrak{M}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{M}_{\bar{d}}$ задается соотношением

$$\tilde{\Phi}(\rho) = [\text{Tr } V_{\alpha} \rho V_{\beta}^*]_{\alpha, \beta=1, \dots, \bar{d}} = [\text{Tr } \rho V_{\beta}^* V_{\alpha}]_{\alpha, \beta=1, \dots, \bar{d}}, \quad (11)$$

поскольку $V = \bigoplus_{\alpha=1}^{\bar{d}} V_{\alpha}$ является отображением из $\mathcal{H}$ в $\bigoplus_{\alpha=1}^{\bar{d}} \mathcal{H}' \simeq \mathcal{H}' \otimes H_{\bar{d}}$, из которого $\Phi, \tilde{\Phi}$ получаются взятием частичных следов (1), см. [8]. Выражая след в $\mathcal{H}'$ через ортонормированный базис $\{e'_j\}$, получаем представление Крауса

$$\tilde{\Phi}(\rho) = \sum_{j=1}^{d'} \tilde{V}_j \rho \tilde{V}_j^*, \quad (12)$$

где $(\tilde{V}_j)_{\alpha} = \langle e'_j | V_{\alpha}$. Непосредственно проверяется, что применяя такую же процедуру к $\tilde{\Phi}$, мы получаем отображение $\tilde{\tilde{\Phi}}$, изометричное Φ .

В.п. отображение $\Phi: \mathfrak{M}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{H}')$ называется *разрушающим сцепленностью*, если оно допускает представление Крауса с операторами V_{α} ранга 1 [11]:

$$\Phi(\rho) = \sum_{\alpha=1}^{\bar{d}} |\varphi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha} | \rho | \psi_{\alpha}\rangle \langle \varphi_{\alpha}|. \quad (13)$$

Такое отображение является каналом тогда и только тогда, когда выполняется условие полноты (переполненности)

$$\sum_{\alpha=1}^{\bar{d}} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \varphi_{\alpha} | \varphi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}| = I.$$

Комплементарное отображение $\tilde{\Phi}: \mathfrak{M}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{M}_{\bar{d}}$ имеет вид

$$\tilde{\Phi}(\rho) = [c_{\alpha\beta} \langle \psi_{\alpha} | \rho | \psi_{\beta}\rangle]_{\alpha, \beta=1, \dots, \bar{d}}, \quad (14)$$

где $c_{\alpha\beta} = \langle \varphi_{\beta} | \varphi_{\alpha}\rangle$. Заметим, что в силу колмогоровского представления произвольная неотрицательно определенная матрица может быть записана в такой форме. В частном случае, когда $\{\psi_{\alpha}\}_{\alpha=1, \dots, \bar{d}}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, отображение (14) является *диагональным* в.п. отображением [12]. Диагональные каналы, которые характеризуются дополнительным условием $c_{\alpha\alpha} \equiv 1$, рассматривались также ранее

в [5] под именем дефазирующих каналов. Из (13) мы видим, что диагональные отображения комплементарны специальному подклассу отображений, разрушающих сцепленность, а именно классически-квантовым отображениям [2]. Для другого специального подкласса — квантово-классических отображений, $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,\bar{d}}$ является ортонормированным базисом в $\mathcal{H}$, так что $c_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, и комплементарное отображение принадлежит этому же подклассу.

Запишем (14) в виде

$$\tilde{\Phi}(\rho) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\bar{d}} c_{\alpha\beta} |e_\alpha\rangle \langle\psi_\alpha| \rho |\psi_\beta\rangle \langle e_\beta|,$$

где $\{e_\alpha\}$ — канонический базис в $\mathcal{H}_{\bar{d}}$. Используя колмогоровское представление для ядра $c_{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{d'} \bar{v}_{\beta j} v_{\alpha j}$ и обозначая

$$\tilde{V}_j = \sum_{\alpha=1}^{\bar{d}} v_{\alpha j} |e_\alpha\rangle \langle\psi_\alpha|, \quad (15)$$

получаем представление Крауса (12) для комплементарного отображения. Для диагональных отображений $|\psi_\alpha\rangle = |e_\alpha\rangle$, поэтому из (15) получаем, что диагональные отображения характеризуются тем, что имеют представление Крауса с одновременно диагонализруемыми (т.е. коммутирующими нормальными) операторами $\tilde{V}_j$. Более общим образом, $\{|\psi_\alpha\rangle\}$ может быть ортонормированным базисом, отличным от $\{|e_\alpha\rangle\}$, в этом случае как $\tilde{V}_k^* \tilde{V}_j$, так и $\tilde{V}_j \tilde{V}_k^*$ являются семействами коммутирующих нормальных операторов.

Для каналов, разрушающих сцепленность, свойство аддитивности (5) (и фактически, хотя и в неявном виде, (6)) с произвольным вторым каналом было доказано в работе П. Шора [16], а свойство мультипликативности (4) для всех $p > 1$ — в работе К. Кинга [13], с использованием неравенства Либа–Тирринга. Это доказательство мультипликативности почти без изменений может быть обобщено на случай в.п. отображений, разрушающих сцепленность. Заметим, что для диагональных каналов (формула (14) с $\{|\psi_\alpha\rangle\} = \{|e_\alpha\rangle\}$ и $c_{\alpha\alpha} \equiv 1$) свойства (4), (5) могут быть доказаны просто, поскольку эти каналы оставляют инвариантным канонический базис в $\mathcal{H}_{\bar{d}}$ и, следовательно, $\nu_p(\Phi) = 1$, $\check{H}(\Phi) = 0$ для таких каналов. Докажем, например, (4). (Результаты для более общего класса каналов получены в [6].)

Пусть Φ_2 — произвольное в.п. отображение, а Φ_1 — канал такой, что $\nu_p(\Phi_1) = 1$. Имеем

$$\nu_p(\Phi_1 \otimes \Phi_2) = \nu_p((\text{Id}_1 \otimes \Phi_2) \circ (\Phi_1 \otimes \text{Id}_2)) \leq \nu_p(\text{Id}_1 \otimes \Phi_2),$$

где Id обозначает тождественный канал. Применяя равенство $\nu_p(\text{Id} \otimes \Phi) = \nu_p(\Phi)$, установленное в [1], получаем $\nu_p(\Phi_1 \otimes \Phi_2) \leq \nu_p(\Phi_2) = \nu_p(\Phi_1) \nu_p(\Phi_2)$, откуда следует мультипликативность.

Однако доказательство мультипликативности для диагональных в.п. отображений, не обязательно являющихся каналами, данное в [12], намного более сложно (оно использует тот же метод, что и для отображений, разрушающих сцепленность). Более того, это доказательство, по-видимому, не распространяется на более общий класс в.п. отображений (14), где $\{\psi_\alpha\}$ является не ортонормированным базисом, а произвольной системой векторов. С другой стороны, из теоремы 1 вытекают все свойства мультипликативности/аддитивности для этого более общего класса просто в силу его комплементарности отображениям, разрушающим сцепленность, и соответствующих результатов работ [16], [13]. В частности, из этой теоремы вытекает свойство супераддитивности (6), которое до этого было доказано лишь для прямых выпуклых сумм тождественного канала и каналов, разрушающих сцепленность (таких как стирающий канал), см. [9]. Точнее, теорема 1 в сочетании с предложением 3 из [9] влечет свойство (6) для прямых выпуклых сумм тождественного либо комплементарного ему полностью деполяризующего канала и каналов, разрушающих сцепленность, либо комплементарных к ним. Отсюда следует и аддитивность χ -пропускной способности (с произвольными ограничениями на входе) для таких прямых выпуклых сумм.

4. Пусть G — группа и $g \rightarrow U_g^A, U_g^B; g \in G$, — два (проективных) унитарных представления группы G в $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$. В.п. отображение $\Phi: \mathcal{M}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}_B)$ называется *ковариантным*, если

$$\Phi[U_g^A \rho U_g^{A*}] = U_g^B \Phi[\rho] U_g^{B*} \quad (16)$$

для всех $g \in G$ и всех ρ . Структура ковариантных в.п. отображений изучалась в контексте ковариантных динамических полугрупп, см., например, [7]. В частности, для произвольного ковариантного в.п. отображения имеется представление Крауса (10), в котором V_j являются компонентами тензорного оператора для группы G , т.е. удовлетворяют уравнениям $U_g^B V_j U_g^{A*} = \sum_k d_{jk}(g) V_k$, где $g \rightarrow D(g) = [d_{jk}(g)]$ — некоторое матричное унитарное представление группы G . Отсюда следует, что отображение, комплементарное к ковариантному в.п. отображению, само ковариантно, причем $D(g)$ играет роль второго представления.

Рассмотрим подробнее пример

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{d-1} [I \operatorname{Tr} \rho - \rho^T],$$

где ρ^T — транспонирование матрицы ρ в данном ортонормированном базисе $\{e_j\}$ в $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B$, $\dim \mathcal{H} = d$. Для этого канала мультипликативность (4) с $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ нарушается при $d \geq 3$ и достаточно больших p [18]. В то же время, имеет место мультипликативность при $1 \leq p \leq 2$ [3] и аддитивность (5), см. [14], [4]. Этот канал обладает следующим свойством ковариантности: $\Phi(U \rho U^*) = \bar{U} \Phi(\rho) \bar{U}^*$ для про-

извольного унитарного оператора U . Поскольку

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{2(d-1)} \sum_{j,k=1}^d (|e_j\rangle \langle e_k| - |e_k\rangle \langle e_j|) \rho (|e_k\rangle \langle e_j| - |e_j\rangle \langle e_k|), \quad (17)$$

то, вводя индекс $\alpha = (j, k)$, получаем представление Крауса (10) с операторами

$$V_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2(d-1)}} (|e_j\rangle \langle e_k| - |e_k\rangle \langle e_j|).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\rho) = [\text{Tr } V_\alpha \rho V_\beta^*]_{\alpha, \beta=1, \dots, d} &= \frac{1}{2(d-1)} \left[\delta_{jj'} \langle e_k | \rho | e_{k'} \rangle - \delta_{jk'} \langle e_k | \rho | e_{j'} \rangle \right. \\ &\quad \left. - \delta_{kj'} \langle e_j | \rho | e_{k'} \rangle + \delta_{kk'} \langle e_j | \rho | e_{j'} \rangle \right]. \end{aligned}$$

Пространство $\mathcal{H}_{12}$, в котором действует эта матрица, является тензорным произведением двух d -мерных координатных пространств с векторами, индексированными символами k (k') и j (j'). Пусть F — оператор в $\mathcal{H}_{12}$, который переставляет индексы j и k . Приведенное выше выражение приобретает вид

$$\tilde{\Phi}(\rho) = \frac{1}{2(d-1)} (I_{12} - F)(\rho \otimes I_2)(I_{12} - F). \quad (18)$$

Это и есть комплементарный канал, который имеет те же свойства мультипликативности/аддитивности, что и канал (17).

Используя разложение $I_2 = \sum_{j=1}^d |e_j\rangle \langle e_j|$, получаем представление Крауса (12) для комплементарного канала, где

$$\begin{aligned} \tilde{V}_j |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(d-1)}} (I_{12} - F)(|\psi\rangle \otimes |e_j\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(d-1)}} (|\psi\rangle \otimes |e_j\rangle - |e_j\rangle \otimes |\psi\rangle). \end{aligned}$$

Свойство ковариантности канала (18) имеет вид $\tilde{\Phi}(U\rho U^*) = (U \otimes U) \tilde{\Phi}(\rho) (U^* \otimes U^*)$, как вытекает из соотношения $F(U \otimes U) = (U \otimes U)F$.

Немного более сложен случай деполяризующего канала

$$\Phi(\rho) = (1-p)\rho + \frac{p}{d} I \text{Tr } \rho, \quad 0 \leq p \leq \frac{d^2}{d^2-1}. \quad (19)$$

Записывая уравнение канала в виде

$$\Phi(\rho) = (1-p)\rho + \frac{p}{d} \sum_{j,k=1}^d |e_j\rangle \langle e_k| \rho |e_k\rangle \langle e_j|,$$

имеем представление Крауса с операторами $V_0 = \sqrt{1-p}I$, $V_{jk} = \sqrt{p/d} |e_j\rangle \langle e_k|$. Поскольку количество этих операторов равно d^2+1 , представление не является минимальным, но, тем не менее, оно может быть

использовано для получения минимального представления для $\tilde{\Phi}$. Используя (11), находим

$$\tilde{\Phi}(\rho) = \begin{bmatrix} (1-p) \operatorname{Tr} \rho & \sqrt{\frac{p(1-d)}{d}} \langle e_k | \rho | e_j \rangle \\ \sqrt{\frac{p(1-d)}{d}} \langle e_{k'} | \rho | e_{j'} \rangle & \delta_{jj'} \delta_{kk'} \langle e_k | \rho | e_j \rangle \end{bmatrix} = T(\rho \otimes I_2) T^*,$$

где

$$T^* = \begin{bmatrix} \sqrt{d(1-p)} |\Omega_{12}\rangle & \sqrt{\frac{p}{d}} I_{12} \end{bmatrix}$$

и $|\Omega_{12}\rangle = d^{-1/2} \sum_{j=1}^d |e_j\rangle \otimes |e_j\rangle$ — максимально сцепленный вектор в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Рассмотрим полярное разложение $T = US$, в котором $S = |T| = \sqrt{T^*T}$ — положительный эрмитов оператор в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_{d^2}$, а U — изометрия из $\mathcal{H}_{d^2}$ в $\mathcal{H}_{d^2+1}$, которая несущественна для минимального представления. Поскольку оператор

$$T^*T = \frac{p}{d} I_{12} + d(1-p) |\Omega_{12}\rangle \langle \Omega_{12}|$$

легко диагонализуется, находим

$$S = \sqrt{T^*T} = \sqrt{\frac{p}{d}} I_{12} + \sqrt{d} \left[-\frac{\sqrt{p}}{d} + \sqrt{1-p \left(\frac{d^2-1}{d^2} \right)} \right] |\Omega_{12}\rangle \langle \Omega_{12}|,$$

и минимальное представление комплементарного канала имеет вид

$$\tilde{\Phi}(\rho) = S(\rho \otimes I_2) S.$$

Тогда как деполяризующий канал ковариантен относительно действия всех унитарных операторов, комплементарный ему канал имеет следующее свойство ковариантности:

$$\tilde{\Phi}[U\rho U^*] = (U \otimes \bar{U}) \tilde{\Phi}[\rho] (U \otimes \bar{U})^*$$

для произвольного унитарного оператора U в $\mathcal{H}$.

Заметим, что в обоих случаях комплементарный канал имеет вид

$$\Phi_C(\rho) = S(\rho \otimes I_B) S^*,$$

где $S: \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_C$ — оператор такой, что $\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_B} S^*S = I_A$. Имеется простое общее соотношение между этим представлением и второй формулой в (1) для произвольного в.п. отображения. А именно, для данного $V: \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ выберем ортонормированный базис $\{e'_j\}$ в $\mathcal{H}_B$ и определим $S: \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_C$ соотношением $\langle e'_j | V = S | e'_j \rangle$, или, более точно,

$$\langle \bar{\psi}_B \otimes \psi_C | V | \psi_A \rangle = \langle \psi_C | S | \psi_A \otimes \psi_B \rangle,$$

где $\bar{\psi}_B$ — комплексное сопряжение в базисе $\{e_j\}$. Меняя ролями пространства $\mathcal{H}_B, \mathcal{H}_C$, мы, конечно, получаем аналогичное представление

для исходного отображения Φ_B . Это, на самом деле, есть не что иное, как двойственная форма (22) представления Стайнспринга, если Φ_B, Φ_C рассматриваются как отображения в картине Гейзенберга, а не в картине Шрёдингера.

Следующий важный класс — бозонные гауссовские каналы [10]. Каждый такой канал описывается квадратичным взаимодействием с окружением. Отсюда вытекает, что комплементарный канал — также гауссовский (см. [10, раздел IVB], где дано явное описание). В качестве примера рассмотрим аттенюатор с коэффициентом ослабления $k < 1$, описываемый преобразованием

$$a' = ka + \sqrt{1 - k^2} a_0$$

в картине Гейзенберга (для упрощения обозначений мы пишем a вместо $a \otimes I_0$ и a_0 вместо $I \otimes a_0$), где мода a_0 описывается гауссовским состоянием. Дополняя это преобразованием $a'_0 = \sqrt{1 - k^2} a - ka_0$, получаем каноническое преобразование Боголюбова, которое реализуется гамильтонианом, квадратичным по $a, a_0, a^\dagger, a_0^\dagger$. Отсюда следует, что комплементарный канал также является аттенюатором, но с коэффициентом ослабления $\sqrt{1 - k^2}$. Аналогично, линейный усилитель с коэффициентом усиления $k > 1$, описываемый преобразованием $a' = ka + \sqrt{k^2 - 1} a_0^\dagger$, дополняется до $a'_0 = \sqrt{k^2 - 1} a^\dagger + ka_0$.

Дальнейшим результатам о комплементарных ковариантных и гауссовских каналах будут посвящены последующие публикации.

Примечание. Результаты настоящей работы приведены в препринте quant-ph/0509101 электронного архива arXiv.org. Аналогичные соображения, в контексте каналов, независимо развиты в препринте К. Кинга, К. Мадзумото, М. Натансона и М. Б. Рускаи quant-ph/0509126.

Приложение.

Теорема 2. Для произвольного в.п. отображения $\Phi_B: \mathcal{M}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}_B)$ найдутся унитарное пространство $\mathcal{H}_C$ размерности $d_C \leq d_A d_B$ и оператор $V: \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ такие, что выполняется первое соотношение в (1). Для любого другого такого оператора $V': \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ найдется частичная изометрия $W: \mathcal{H}_C \rightarrow \mathcal{H}_C$ такая, что

$$V' = (I_B \otimes W) V, \quad V = (I_B \otimes W^*) V'. \quad (20)$$

Доказательство. Рассмотрим алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{L} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{M}(\mathcal{H}_B)$, порожденное элементами $\Psi = \psi \otimes X$, $\psi \in \mathcal{H}_A$, $X \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_B)$. Введем псевдоскалярное произведение в $\mathcal{L}$, с квадратом псевдонормы

$$\left\| \sum_j \psi_j \otimes X_j \right\|^2 = \sum_{j,k} \langle \psi_j | \Phi^*(X_j^* X_k) | \psi_k \rangle = \text{Tr} \sum_{j,k} X_k \Phi(|\psi_k\rangle \langle \psi_j|) X_j^*,$$

где Φ^* — двойственное отображение. Эта величина неотрицательна для в.п. отображения Φ . Факторизуя по подпространству $\mathcal{L}_0$ элементов нулевой псевдонормы, получаем унитарное пространство $\mathcal{K} = \mathcal{L}/\mathcal{L}_0$. По построению, $\dim \mathcal{K} \leq d_A d_B^2$.

Положим $V\psi = \psi \otimes I$ и $\pi(Y)\Psi = \pi(Y)(\psi \otimes X) = \psi \otimes YX$. Тогда π является $*$ -гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{M}(\mathcal{H}_B)$ в $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$, т.е. линейным отображением, сохраняющим алгебраические операции и инволюцию: $\pi(XY) = \pi(X)\pi(Y)$, $\pi(X^*) = \pi(X)$. Далее,

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \Phi^*(X) | \psi \rangle &= \langle \varphi \otimes I | \psi \otimes X \rangle \\ &= \langle \varphi | V^* \pi(X) V | \psi \rangle, \quad X \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}_B). \end{aligned} \quad (21)$$

Однако всякий $*$ -гомоморфизм алгебры $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ унитарно эквивалентен поднятию $\pi(X) = X \otimes I_C$, где I_C — единичный оператор в унитарном пространстве $\mathcal{H}_C$, т.е. мы можем считать, что $\mathcal{K} = \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$, и (21) принимает вид $\langle \varphi | \Phi^*(X) | \psi \rangle = \langle \varphi | V^*(X \otimes I_C) V | \psi \rangle$, $X \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}_B)$, или

$$\Phi^*(X) = V^*(X \otimes I_C) V, \quad (22)$$

что эквивалентно первому уравнению в (1) с $\Phi_B = \Phi$. Отсюда также следует, что $\dim \mathcal{H}_C \leq d_A d_B$.

Чтобы доказать второе утверждение, рассмотрим подпространство

$$\mathcal{M} = \{(X \otimes I_C) V\psi : \psi \in \mathcal{H}_A, X \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}_B)\} \subset \mathcal{K} = \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C. \quad (23)$$

Оно инвариантно относительно умножения на операторы $Y \otimes I_C$, поэтому имеет вид $\mathcal{M} = \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{M}_C$, $\mathcal{M}_C \subset \mathcal{H}_C$. Для минимального представления должно быть $\mathcal{M}_C = \mathcal{H}_C$, иначе имелось бы собственное подпредставление.

Рассмотрим аналогичное подпространство $\mathcal{M}' = \mathcal{H}_{B'} \otimes \mathcal{M}_C$ пространства $\mathcal{K}' = \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_{C'}$ для другого расширения. Определим оператор R из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}'$ соотношением

$$R(X \otimes I_C) V\psi = (X \otimes I_{C'}) V'\psi. \quad (24)$$

Тогда R изометричен, поскольку нормы вектора и его образа под действием R равны величине $\langle \psi | \Phi^*(X^* X) | \psi \rangle$ в силу (21). Из (24) мы получаем для всех $Y \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}_B)$

$$R(YX \otimes I_C) V\psi = (Y \otimes I_{C'}) R(X \otimes I_C) V'\psi,$$

и поэтому

$$R(Y \otimes I_C) = (Y \otimes I_{C'}) R \quad (25)$$

на $\mathcal{M}$. Продолжим R на все $\mathcal{K}$, полагая его равным нулю на ортогональном дополнении к $\mathcal{M}$, тогда (25) выполняется на $\mathcal{K}$. Поэтому $R = I_C \otimes W$, где W изометрически отображает $\mathcal{M}_C$ на $\mathcal{M}_{C'}$. Соотношение (24) влечет (20).

Эта работа была закончена, когда автор был приглашенным профессором в Центре квантовых вычислений Кембриджского университета. Автор благодарен Ю.М. Сухову, Н. Датта и М.Е. Широкову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов Г. Г., Холево А. С., Вернер Р. Ф. О некоторых проблемах аддитивности в квантовой теории информации. — Пробл. передачи информ., 2000, т. 3, № 4, с. 25–34; <http://arxiv.org: math-ph/0003002>.
2. Холево А. С. Введение в квантовую теорию информации, М.: МЦНМО, 2002, 126 с.
3. Datta N. Multiplicativity of maximal p -norms in Werner–Holevo channels for $1 \leq p \leq 2$. — <http://arxiv.org: quant-ph/0410063>.
4. Datta N., Holevo A. S., Suhov Y. M. Additivity for transpose depolarizing channels. — <http://arxiv.org: quant-ph/0412034>.
5. Devetak I., Shor P. W. The capacity of a quantum channel for simultaneous transmission of classical and quantum information. — *Comm. Math. Phys.*, 2005, v. 256, № 2, p. 287–303; <http://arxiv.org: quant-ph/0311131>.
6. Fukuda M. Extending additivity from symmetric to asymmetric channels. — <http://arxiv.org: quant-ph/0505022>.
7. Holevo A. S. A note on covariant dynamical semigroups. — *Rep. Math. Phys.*, 1993, v. 32, № 2, p. 211–216.
8. Holevo A. S. On states, channels and purification. — *Quantum Inf. Process.*, 2002, v. 1, № 1–2, p. 1–4; <http://arxiv.org: quant-ph/0204077>.
9. Holevo A. S., Shirokov M. E. On Shor's channel extension and constrained channels. — *Comm. Math. Phys.*, 2004, v. 249, № 2, p. 417–430; <http://arxiv.org: quant-ph/0306196>.
10. Holevo A. S., Werner R. F. Evaluating capacities of bosonic Gaussian channels. — *Phys. Rev. A.*, 2001, v. 63, № 3, article 032312; <http://arxiv.org: quant-ph/9912067>.
11. Horodecki M., Shor P. W., Ruskai M. B. Entanglement breaking channels. — *Rev. Math. Phys.*, 2003, v. 15, № 6, p. 629–641; <http://arxiv.org: quant-ph/0302031>.
12. King C. An application of a matrix inequality in quantum information theory. — <http://arxiv.org: quant-ph/0412046>.
13. King C. Maximal p -norms of entanglement breaking channels. — *Quantum Inf. Comput.*, 2003, v. 3, № 2, p. 186–190; <http://arxiv.org: quant-ph/0212057>.
14. Matsumoto K., Yura F. Entanglement cost of antisymmetric states and additivity of capacity of some quantum channels. — *J. Phys. A*, 2004, v. 37, № 15, p. L167–L171; <http://arxiv.org: quant-ph/0306009>.
15. Nielsen M. A., Chuang I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, 676 p.
16. Shor P. W. Additivity of the classical capacity of entanglement breaking quantum channels. — *J. Math. Phys.*, 2002, v. 43, № 9, p. 4334–4340; <http://arxiv.org: quant-ph/0201149>.
17. Shor P. W. Equivalence of additivity questions in quantum information theory. — *Comm. Math. Phys.*, 2004, v. 246, № 3, p. 453–472; <http://arxiv.org: quant-ph/0305035>.
18. Werner R. F., Holevo A. S. Counterexample to an additivity conjecture for output purity of quantum channels. — *J. Math. Phys.*, 2002, v. 43, № 9, p. 4353–4357; <http://arxiv.org: quant-ph/0203003>.