Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Вахтель, Предельные теоремы для вероятностей больших отклонений критического процесса Гальтона–Ватсона со степенными хвостами, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 4, 644–659

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:32:33

© 2007 г.

ВАХТЕЛЬ В. И.*

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ КРИТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА СО СТЕПЕННЫМИ ХВОСТАМИ

В работе выводятся предельные теоремы для больших отклонений критического процесса Гальтона–Ватсона при условии конечности степенных моментов и при условии правильного изменения хвоста распределения числа непосредственных потомков отдельной особи.

Ключевые слова и фразы: процесс Гальтона–Ватсона, условие Крамера, большие отклонения, правильно меняющаяся функция.

1. Введение и формулировка результатов. Пусть $\{Z_n, n \geq 0\}$ — критический процесс Гальтона–Ватсона. Всюду, если не оговорено противное, будем предполагать, что $Z_0 = 1$. Пусть $\{p_k, k \geq 0\}$ обозначает распределение числа непосредственных потомков отдельной особи, а $f(s)$ — производящую функцию этого распределения. Положим $Q_n := \mathbf{P}\{Z_n > 0\}$, $B := f''(1)$ и через $\mathcal{A}_n(N)$ обозначим событие, состоящее в том, что каждая особь первых n поколений имеет не более N прямых потомков.

Основной целью настоящей работы является изучение вероятностей больших отклонений Z_n и $M_n := \max_{k \leq n} Z_k$.

При выполнении условия Крамера (существование экспоненциального момента распределения $\{p_k\}$) большие отклонения Z_n изучались в работах [4]–[8]. Более точно, статьи [4], [5], [7] посвящены доказательству предельных теорем для вероятностей больших отклонений процесса Z_n . Наиболее общие результаты в этом направлении представлены в [7], где выводятся асимптотики вероятностей $\mathbf{P}\{Z_n = k\}$ и $\mathbf{P}\{Z_n \geq k\}$ при $k = o(n^2)$. Вероятностные неравенства для $\mathbf{P}\{Z_n \geq k\}$ и $\mathbf{P}\{M_n \geq k\}$ были предметом исследования в работах [6] и [8]. В [6] предполагается существование экспоненциального момента, а в [8] уточняется оценка из [6] и выводятся неравенства при более слабых моментных ограничениях на процесс.

* Technische Universität München, Zentrum Mathematik, Bereich M 5, D-85747, Garching bei München, Germany; e-mail: vakhtel@wias-berlin.de

В настоящей работе доказываются предельные теоремы для больших отклонений при условии конечности степенных моментов и при условии правильного изменения хвоста распределения числа прямых потомков.

Теорема 1. Если $\mathbf{E}Z_1^r < \infty$ для некоторого $r \geq 3$, то

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq k\} = \frac{2}{Bn} \exp\left\{-\frac{2k}{Bn}\right\}(1 + o(1)) \quad (1)$$

при $n \rightarrow \infty$ и $k \leq B(r/2-1)n \ln n - B(r/2+\varepsilon)n \ln \ln n$, $\varepsilon > 0$. Если же это равенство выполнено при $k \leq B(r/2-1)n \ln n + B((r+1)/2+\varepsilon)n \ln \ln n$, то $\mathbf{E}Z_1^r < \infty$.

Напомним, что если предположить только конечность второго момента, то, согласно теореме Яглома (см., например, [10, с. 39]), равенство (1) будет верным при ограниченном k/n . Если же конечен экспоненциальный момент, то, как показано в [7], сходимость к экспоненциальному распределению будет иметь место при $k = o(n^2/\ln n)$.

Если величина $r_0 := \sup\{r: \mathbf{E}Z_1^r < \infty\}$ конечна, то условия сходимости к экспоненциальному распределению, приведенные в теореме 1, близки к необходимым и достаточным. Действительно, если $\bar{k}(n)$ обозначает верхнюю границу тех k , для которых выполнено (1), то из теоремы 1 вытекает равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{k}(n)}{n \ln n} = \frac{B}{2} (r_0 - 2).$$

Теорема 2. Пусть

$$\mathbf{P}\{Z_1 \geq x\} = x^{-t} L(x) \quad (2)$$

для некоторого $t > 1$ и некоторой медленно меняющейся функции $L(x)$. Если $B = \infty$, то

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \sim \mathbf{P}\{Z_n \geq k\} \sim \mathbf{P}(\bar{\mathcal{A}}_n(k)) \sim n\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\} \quad (3)$$

для k и $n = n_k$ таких, что $kQ_n \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Если же $B < \infty$, то (3) справедливо для k и $n = n_k$, удовлетворяющих условию $k/(n \ln n) \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что если имеет место (2), то величина B является конечной тогда и только тогда, когда $t > 2$ или $t = 2$ и $L(x)$ удовлетворяет условию $\int_1^\infty x^{-1} L(x) dx < \infty$.

Если выполнено условие (2) и $B = \infty$, то, согласно (3),

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq x_n Q_n^{-1}\} \sim n\mathbf{P}\{Z_1 \geq x_n Q_n^{-1}\} \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (4)$$

для любой последовательности $x_n \rightarrow \infty$. Используя тауберову теорему (см., например, [9, теорема XIII.5.5]) и следствия из леммы 5 работы [2], легко показать, что (2) при $t \in (1, 2)$ эквивалентно равенству

$$f(s) = s + (1-s)^t L^*((1-s)^{-1}), \quad (5)$$

где $L^*(x)$ медленно меняется и

$$\frac{L^*(x)}{L(x)} \sim (t-1)^{-1} \Gamma(2-t) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Далее, если (2) выполнено при $t = 2$ и $L(x)$ такова, что $B = \infty$, то (5) верно с функцией $L^*(x)$, удовлетворяющей соотношению

$$L^*(x) \sim \int_1^x y^{-1} L(y) dy \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (7)$$

В работах [13], [14] показано, что условие (5) является необходимым и достаточным для того, чтобы для любого фиксированного $x > 0$ имело место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^{-1} \mathbf{P}\{Z_n \geq x Q_n^{-1}\} = 1 - F^{(t)}(x), \quad (8)$$

где $F^{(t)}(x)$ — некоторая невырожденная функция распределения. Таким образом, в случае бесконечной дисперсии и выполнения условия (2) равенства (8) и (4) описывают асимптотическое поведение вероятностей всех уклонений.

При конечной дисперсии представленные выше результаты не покрывают всего спектра уклонений. Например, при $t > 3$ между зонами действия теорем 1 и 2 имеется зазор: асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{Z_n \geq k\}$ остается невыясненным при $k \in (cn \ln n, a_n n \ln n)$, где $c > B(t/2 - 1)$ и $a_n \rightarrow \infty$ сколь угодно медленно.

2. Вспомогательные результаты.

2.1. Свойства срезок. Положим $\tilde{f}(s) := \sum_{0 \leq k \leq N} p_k s^k$ и обозначим через $x_1 = x_1(N)$ максимальный корень уравнения $x = \tilde{f}(x)$.

Лемма 1. Если $\tilde{f}''(1) > 0$, то

$$0 \leq x_1 - 1 \leq \frac{1 - \tilde{f}'(1)}{\tilde{f}''(1)} + \left(\frac{(1 - \tilde{f}'(1))^2}{(\tilde{f}''(1))^2} + \frac{2(1 - \tilde{f}'(1))}{\tilde{f}''(1)} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Доказательство. Положим

$$\alpha(x) := \frac{\tilde{f}''(1)}{2} (x-1)^2 + \tilde{f}'(1)(x-1) + \tilde{f}(1).$$

Легко видеть, что

$$\alpha(1) = \tilde{f}(1), \quad \alpha'(1) = \tilde{f}'(1) \quad \text{и} \quad \alpha''(x) \leq \tilde{f}''(x) \quad \text{при } x \geq 1.$$

Отсюда следует, что x_1 меньше максимального корня уравнения $x = \alpha(x)$. Вычисляя этот корень, мы получаем верхнюю оценку из (9). Для доказательства нижней оценки достаточно заметить, что $\tilde{f}(1) \leq 1$ для всех N .

Положим $g(s) := \tilde{f}(sx_1)/x_1$, $A_g := g'(1)$ и $B_g := g''(1)$.

Лемма 2. *Предположим, что $\mathbf{E}Z_1^r < \infty$ для некоторого $r \geq 3$. Тогда при $N \rightarrow \infty$*

$$A_g = 1 + O(N^{-r/2}), \quad (10)$$

$$B_g = B + O(N^{-\theta}), \quad (11)$$

где $\theta := \min\{r/2, r-2\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что, в силу неравенства Маркова,

$$1 - \tilde{f}(1) = \mathbf{P}\{Z_1 > N\} \leq \frac{\mathbf{E}Z_1^r}{N^r} \quad (12)$$

и

$$1 - \tilde{f}'(1) = \mathbf{E}\{Z_1; Z_1 > N\} \leq \frac{\mathbf{E}Z_1^r}{N^{r-1}}. \quad (13)$$

Без ограничения общности мы можем считать N настолько большим, что $\tilde{f}''(1) \geq B/2$. Применяя эту оценку и неравенства (12) и (13) к правой части (9), мы имеем

$$0 \leq x_1 - 1 \leq cN^{-r/2}. \quad (14)$$

(Здесь и в дальнейшем символ c обозначает положительную постоянную, зависящую лишь от распределения $\{p_k\}$.)

Из определения $g(s)$ и формулы конечных приращений получаем

$$A_g = \tilde{f}'(x_1) \leq \tilde{f}'(1) + \tilde{f}''(x_1)(x_1 - 1) \leq 1 + Bx_1^N(x_1 - 1), \quad (15)$$

второе неравенство в этой цепочке вытекает из оценок

$$\tilde{f}''(x_1) \leq x_1^N \tilde{f}''(1) \leq x_1^N B.$$

Подставляя (14) в (15), мы получаем для всех достаточно больших N оценку

$$A_g \leq 1 + cN^{-r/2}. \quad (16)$$

С другой стороны, из определения x_1 вытекает, что $\tilde{f}'(x_1) \geq 1$. Следовательно, $A_g > 1$, и, тем самым, первая часть леммы доказана.

Очевидно, что

$$B_g = x_1 \tilde{f}''(x_1) > \tilde{f}''(1) > B - \mathbf{E}\{Z_1^2; Z_1 \geq N\}.$$

Применяя к математическому ожиданию в правой части неравенство Маркова, имеем

$$B_g > B - \frac{\mathbf{E}Z_1^r}{N^{r-2}}. \quad (17)$$

С другой стороны, по аналогии с (16),

$$B_g < B + cN^{-r/2}. \quad (18)$$

Комбинируя (17) и (18), мы получаем (11). Лемма 2 доказана.

Участвующие в дальнейших результатах величины y_0 и N будем считать функциями n , т.е. $y_0 = y_0(n)$ и $N = N(n)$. Кроме того, в оставшейся части данного пункта мы будем предполагать, что $f'''(1) < \infty$.

Лемма 3. Пусть последовательность y_j определяется уравнением

$$y_{j+1} = g^{-1}(1 + y_j) - 1,$$

где y_0 выбрано так, что величина $g'''(1 + y_0)$ ограничена для всех $n \geq 1$. Тогда

$$\sup_{j \leq n} \left| y_j \frac{y_0}{1 + B_j y_0/2} - 1 \right| = O(y_0 + nN^{-3/2} + N^{-1}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Согласно определению,

$$y_j = g(1 + y_{j+1}) - 1.$$

Очевидно, что $g(1 + y) > 1 + A_g y > 1 + y$ для любого $y > 0$. Следовательно, последовательность y_j убывает. Разлагая $g(1 + y)$ в ряд Тейлора, мы получаем

$$y_j = A_g y_{j+1} + \frac{B_g}{2} y_{j+1}^2 + \frac{g'''(\theta_j)}{6} y_{j+1}^3, \quad \theta_j \in (1, 1 + y_{j+1}).$$

Учитывая убывание y_j и ограниченность $g'''(1 + y_0)$, заключаем, что

$$y_j = A_g y_{j+1} + \frac{B_g}{2} y_{j+1}^2 + O(y_{j+1}^3). \quad (19)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1}}{y_j} &= \left(A_g + \frac{B_g}{2} y_{j+1} + O(y_{j+1}^2) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{A_g} - \frac{B_g}{2A_g^2} y_{j+1} + O(y_{j+1}^2) = \frac{1}{A_g} - \frac{B_g}{2A_g^3} y_j + O(y_j^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Деля обе части (19) на $y_j y_{j+1}$ и используя (20), мы имеем

$$\frac{1}{y_{j+1}} = \frac{A_g}{y_j} + \frac{B_g}{2A_g} + O(y_j) = \frac{A_g^{j+1}}{y_0} + \frac{B_g}{2A_g} \frac{A_g^{j+1} - 1}{A_g - 1} + O\left(\sum_{k=0}^j y_k A_g^{j-k}\right). \quad (21)$$

Используя (10) при $r = 3$, имеем

$$|A_g^i - 1| \leq c \frac{i}{N^{3/2}}, \quad i \geq 1,$$

и

$$\left| \frac{A_g^j - 1}{A_g - 1} - j \right| \leq c \frac{j^2}{N^{3/2}}, \quad j \geq 1.$$

Применяя эти неравенства и (11) к правой части (21) и учитывая, что $y_k < y_0$ для всех $k > 0$, для любого $j \geq 0$ получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_{j+1}} &= \left(\frac{1}{y_0} + \frac{B}{2}(j+1) + O(jy_0) + O(N^{-1}) \right) (1 + O(N^{-1} + jN^{-3/2})) \\ &= \left(\frac{1}{y_0} + \frac{B}{2}(j+1) \right) (1 + O(y_0 + N^{-1} + jN^{-3/2})). \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Положим $r_0 = 1 + y_n$ и для каждого $j = 1, \dots, n$ определим вероятностную производящую функцию

$$\rho_j(s) := \frac{g(g_{j-1}(r_0)s)}{g_j(r_0)}.$$

Введем также обозначения

$$a_j := \rho'_j(1), \quad a(j) := \prod_{i=1}^j a_i, \quad b_j := \rho''_j(1),$$

$$T(n) := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_{i+1}}{2a_{i+1}} a(i).$$

Лемма 4. Если $g'''(1 + y_0)$ ограничена, $y_0 \ln n \rightarrow 0$ и $nN^{-3/2} \rightarrow 0$, то при $n \rightarrow \infty$

$$a(n) = \left(1 + \frac{Bny_0}{2}\right)^2 (1 + o(1)), \quad (23)$$

$$T(n) = \frac{Bn}{2} \left(1 + \frac{Bny_0}{2}\right) (1 + o(1)). \quad (24)$$

Доказательство. Согласно определению $a(j)$,

$$a(j) = \frac{r_0}{g_j(r_0)} \prod_{i=0}^{j-1} g'(1 + y_{n-i}) = \frac{r_0}{g_j(r_0)} \exp \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} \ln g'(1 + y_{n-i}) \right\}.$$

Используя равенства

$$g'(1 + z) = A_g \left(1 + \frac{B_g z}{A_g} + O(z^2)\right), \quad \ln(1 + t) = t + O(t^2),$$

мы имеем

$$a(j) = \frac{r_0}{g_j(r_0)} A_g^j \exp \left\{ \frac{B_g}{A_g} \sum_{i=0}^{j-1} y_{n-i} + O \left(\sum_{i=0}^{j-1} y_{n-i}^2 \right) \right\}. \quad (25)$$

Применяя лемму 3 и оценки (23)–(25) из [7], получаем

$$\sum_{i=0}^{j-1} y_{n-i} = \frac{2}{B} \ln \left(\frac{1 + Bny_0/2}{1 + B(n-j)y_0/2} \right) + O \left(\ln n (y_0 + nN^{-3/2} + N^{-1}) \right),$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} y_i^2 = O(y_0).$$

Подставляя эти равенства в (25) и применяя лемму 1, получаем для любого $j \leq n$ равенство

$$a(j) = \left(\frac{1 + Bny_0/2}{1 + B(n-j)y_0/2} \right)^2 \left(1 + O \left(\ln n (y_0 + nN^{-3/2} + N^{-1}) \right) \right). \quad (26)$$

Полагая здесь $j = n$, приходим к (23).

Используя ограниченность $g'''(1+y_0)$, равенство (26) и лемму 1, мы убеждаемся, что

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1 + Bny_0/2}{1 + B(n-i)y_0/2} \right)^2 \left(1 + O(\ln n (y_0 + nN^{-3/2} + N^{-1})) \right).$$

В силу (30) из [7]

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1 + Bny_0/2}{1 + B(n-i)y_0/2} \right)^2 = \frac{Bn}{2} \left(1 + \frac{Bny_0}{2} \right) (1 + O(y_0)).$$

Из двух последних равенств вытекает (24). Лемма 4 доказана.

Пусть $Z^* = \{Z_k^*; 0 \leq k \leq n\}$ — неоднородный во времени ветвящийся процесс, переходные распределения которого задаются с помощью равенств

$$\mathbf{E}\{s^{Z_k^*} \mid Z_{k-1} = 1\} = \rho_{n-k+1}(s), \quad k = 1, \dots, n. \quad (27)$$

Положим

$$F_n(x) := \mathbf{P}\{Z_n^* < xT(n) \mid Z_n^* > 0\}. \quad (28)$$

Лемма 5. Если выполнены условия предыдущей леммы, то

$$\delta_n := \sup_x |F_n(x) - 1 + e^{-x}| \leq c(y_0 + n^{-1}) \ln^2 n \quad (29)$$

и

$$\mathbf{P}\{Z_n^* > 0\} = \left(\frac{2}{Bn} + y_0 \right) (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Доказательство. Легко видеть, что $a_i > 1$ для всех $i \geq 1$. С другой стороны,

$$\sup_{1 \leq i \leq n} a_i < \sup_{1 \leq i \leq n} g'(1 + y_{n-i+1}) < A_g + y_0 g''(1 + y_0).$$

Используя лемму 1 и замечая, что из ограниченности $g'''(1+y_0)$ вытекает ограниченность $g''(1+y_0)$, мы получаем оценку

$$\sup_{1 \leq i \leq n} a_i < 1 + c(N^{-3/2} + y_0).$$

В результате имеем

$$\sup_{1 \leq i \leq n} |a_i - 1| \rightarrow 0. \quad (31)$$

Легко видеть, что

$$\sup_{1 \leq i \leq n} b_i \geq \frac{B}{2} \quad (32)$$

для всех достаточно больших n и N . Вновь используя ограниченность $g'''(1+y_0)$, получаем

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \rho_i'''(1) \leq c. \quad (33)$$

Соотношения (31)–(33) означают, что процесс Z^* удовлетворяет условиям теоремы 3 из [1], согласно которой

$$\delta_n \leq c \max_{i \leq n} a(i) \frac{\ln^2 T(n)}{T(n)} = ca(n) \frac{\ln^2 T(n)}{T(n)}$$

и

$$\mathbf{P}\{Z_n^* > 0\} = \frac{a(n)}{T(n)} (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Из этих соотношений и леммы 4 вытекают желаемые утверждения. Лемма 5 доказана.

2.2. Нижние оценки для больших отклонений.

Лемма 6. Для любого $k \geq 2(B \vee 1)$ выполнены неравенства

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} > \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_n(k-1)) > n\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\} \exp\left(-\frac{(2B+1)n}{k-1}\right).$$

Доказательство. Очевидно, что для любого $j \geq 1$ справедливы оценки

$$\tilde{f}_j(1) - \tilde{f}_{j+1}(1) \geq \tilde{f}'(x_0)(\tilde{f}_{j-1}(1) - \tilde{f}_j(1)) \geq (\tilde{f}'(x_0))^j (1 - \tilde{f}(1)),$$

где $x_0 = x_0(N)$ — минимальное положительное решение уравнения $x = \tilde{f}(x)$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_n(N)) = 1 - \tilde{f}_n(1) = \sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{f}_j(1) - \tilde{f}_{j+1}(1)) \geq \frac{1 - (\tilde{f}'(x_0))^n}{1 - \tilde{f}'(x_0)} (1 - \tilde{f}(1)). \quad (34)$$

Легко видеть, что

$$\tilde{f}'(x_0) > \tilde{f}'(1) - \tilde{f}''(1)(1 - x_0). \quad (35)$$

Полагая $r = 2$ в (13), имеем

$$\tilde{f}'(x_0) > 1 - (B+1)N^{-1} - \tilde{f}''(1)(1 - x_0). \quad (36)$$

Согласно (45) из [8],

$$1 - x_0 < N^{-1}. \quad (37)$$

Подставляя (37) в (36), получаем

$$\tilde{f}'(x_0) > 1 - \frac{2B+1}{N}.$$

Применяя эту оценку к правой части (34), приходим к неравенству

$$\mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_n(N)) \geq \frac{N}{2B+1} \left(1 - \left(1 - \frac{2B+1}{N}\right)^n\right) \mathbf{P}\{Z_1 > N\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$1 - (1-x)^n \geq 1 - e^{-nx} \geq nxe^{-nx} \quad (38)$$

для любого $x \in [0, 1]$. Отсюда заключаем, что для любого $N \geq 2B + 1$ имеет место оценка

$$\mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_n(N)) \geq n\mathbf{P}\{Z_1 > N\} \exp\left(-\frac{(2B+1)n}{N}\right).$$

Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что выполнено включение $\overline{\mathcal{A}}_n(k-1) \subset \{M_n \geq k\}$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Предположим, что $\mathbf{E}Z_1^3 < \infty$. Если $n = n_k$ такое, что $k/n \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n \geq k\}}{\mathbf{P}\{Z_n \geq k\}} \leq 2.$$

Доказательство. Согласно оценке Берри-Эссеена (см., например, [12, гл. V, теорема 4]),

$$\mathbf{P}\{Z_i \geq k \mid Z_0 = k\} \geq \frac{1}{2} - c_0 k^{-1/2} \frac{\mathbf{E}|Z_i - 1|^3}{(\mathbf{E}(Z_i - 1)^2)^{3/2}},$$

где c_0 — некоторая абсолютная постоянная.

Так как $\mathbf{E}|Z_i - 1|^3 \leq ci^2$ и $\mathbf{E}(Z_i - 1)^2 = Bi$, то

$$\mathbf{P}\{Z_i \geq k \mid Z_0 = k\} \geq \frac{1}{2} - c \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{k}},$$

и, следовательно,

$$\min_{i < n} \mathbf{P}\{Z_i \geq k \mid Z_0 = k\} \geq \frac{1}{2} - c \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}. \quad (39)$$

В работе [3] доказано, что

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq \frac{\mathbf{P}\{Z_n \geq \nu k\}}{\min_{i < n} \mathbf{P}\{Z_i \geq \nu k \mid Z_0 = k\}}, \quad \nu \in [0, 1]. \quad (40)$$

Полагая здесь $\nu = 1$ и применяя к знаменателю неравенство (39), мы приходим к требуемому соотношению. Лемма 7 доказана.

3. Доказательство основных результатов.

3.1. Доказательство теоремы 1. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq k\} = \mathbf{P}\{Z_n \geq k; \mathcal{A}_n(N)\} + \mathbf{P}\{Z_n \geq k; \overline{\mathcal{A}}_n(N)\} \quad (41)$$

для любого $N \geq 1$. Согласно определению $g(s)$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{Z_n = j; \mathcal{A}_n(N)\} s^j = \tilde{f}_n(s) = x_1 g_n\left(\frac{s}{x_1}\right). \quad (42)$$

Далее, в силу (27)

$$\mathbf{E}s^{Z_n^*} = \frac{g_n(sr_0)}{g_n(r_0)} = \frac{g_n(sr_0)}{g_n(1+y_n)} = \frac{g_n(sr_0)}{1+y_0}. \quad (43)$$

Комбинируя (42) и (43), заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Z_n \geq k; \mathcal{A}_n(N)\} &= x_1(1+y_0) \sum_{j=k}^{\infty} (x_1 r_0)^{-j} \mathbf{P}\{Z_n^* = j\} \\ &= x_1(1+y_0) \mathbf{E}\{e^{-hZ_n^*}; Z_n^* \geq k\}, \end{aligned}$$

где $h := \ln(x_1 r_0)$. Вспоминая определение (28) функции $F_n(x)$, мы приходим к равенству

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq k; \mathcal{A}_n(N)\} = x_1(1+y_0) \mathbf{P}\{Z_n^* > 0\} \int_{k/T(n)}^{\infty} e^{-hT(n)x} dF_n(x). \quad (44)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_{k/T(n)}^{\infty} e^{-hT(n)x} dF_n(x) = hT(n) \int_{k/T(n)}^{\infty} F_n(x) e^{-hT(n)x} dx - F_n\left(\frac{k}{T(n)}\right) e^{-hk}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{e^{-hk-k/T(n)}}{1+hT(n)} &= \int_{k/T(n)}^{\infty} e^{-hT(n)x} d(1-e^{-x}) \\ &= hT(n) \int_{k/T(n)}^{\infty} (1-e^{-x}) e^{-hT(n)x} dx - (1-e^{-k/T(n)}) e^{-hk}. \end{aligned}$$

Вычитая одно из другого, получаем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{k/T(n)}^{\infty} e^{-hT(n)x} dF_n(x) - \frac{e^{-hk-k/T(n)}}{1+hT(n)} \right| \\ &\leq \sup_x |F_n(x) - 1 + e^{-x}| \left(e^{-hk} + hT(n) \int_{k/T(n)}^{\infty} e^{-hT(n)x} dx \right). \end{aligned}$$

Вычисляя интеграл в правой части этого неравенства, приходим к оценке

$$\left| \int_{k/T(n)}^{\infty} e^{-hT(n)x} dF_n(x) - \frac{e^{-hk-k/T(n)}}{1+hT(n)} \right| \leq 2\delta_n e^{-hk}. \quad (45)$$

Положим

$$N = \frac{n}{\ln n}, \quad y_0 = \frac{4k}{B^2 n^2} - \frac{2}{Bn}$$

и докажем ограниченность $g'''(1+y_0)$ для указанных значений N и y_0 . Очевидно, что

$$g'''(1+y_0) = x_1^2 \tilde{f}'''(x_1(1+y_0)) \leq \tilde{f}'''(1) x_1^{N+2} (1+y_0)^N. \quad (46)$$

Согласно (14) при $r = 3$,

$$x_1^{N+2} \leq \exp\{c_1 N^{-3/2}(N+2)\} \leq c_2. \quad (47)$$

С другой стороны, нас интересуют не очень большие значения k , а именно, $k \leq cn \ln n$. Это означает, что $y_0 \leq cn^{-1} \ln n$ и, следовательно,

$$(1+y_0)^N \leq c \quad (48)$$

для $N = n/\ln n$. Комбинируя (46)–(48), мы заключаем, что величина $g'''(1+y_0)$ ограничена. Это означает, что мы можем использовать доказанные ранее леммы 3, 4 и 5. Полагая $y_0 = 4k/(B^2n^2) - 2/(Bn)$ в (24), (29) и (30), мы получаем при $n \rightarrow \infty$

$$T(n) = k(1 + o(1)), \quad (49)$$

$$\delta_n \leq c \frac{\ln^3 n}{n} \quad (50)$$

и

$$\mathbf{P}\{Z_n^* > 0\} = \frac{4k}{B^2n^2} (1 + o(1)) \quad (51)$$

(величина δ_n определена в (29)).

Используя лемму 3, имеем

$$y_n = \frac{2}{Bn} - \frac{1}{k} + O\left(\frac{\ln^{3/2} n}{n^{3/2}}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (52)$$

С другой стороны, из (14) вытекает оценка

$$x_1 - 1 < c \frac{\ln^{3/2} n}{n^{3/2}}. \quad (53)$$

Из (52) и (53) заключаем, что

$$\begin{aligned} h &= \ln(x_1(1+y_n)) = (x_1 - 1) + y_n + O(y_n^2 + (x_1 - 1)^2) \\ &= \frac{2}{Bn} - \frac{1}{k} + O\left(\frac{\ln^{3/2} n}{n^{3/2}}\right). \end{aligned} \quad (54)$$

Комбинируя (45), (49), (50) и (54), мы получаем

$$\int_{k/T(n)}^{\infty} e^{-hT(n)x} dF_n(x) = \frac{Bn}{2k} \exp\left(-\frac{2k}{Bn}\right) (1 + o(1)). \quad (55)$$

Подставляя (51) и (55) в (44), приходим при $k \leq cn \ln n$ к равенству

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq k; \mathcal{A}_n(N)\} = \frac{2}{Bn} \exp\left(-\frac{2k}{Bn}\right) (1 + o(1)). \quad (56)$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в правой части (41). Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq k; \overline{\mathcal{A}}_n(N)\} \leq \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_n(N)).$$

С другой стороны, вследствие (43) из [8] и неравенства Маркова

$$\mathbf{P}\{\overline{\mathcal{A}}_n(N)\} \leq n\mathbf{P}\{Z_1 \geq N\} \leq n\mathbf{E}Z_1^r N^{-r}.$$

Полагая $N = n/\ln n$, имеем

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq k; \overline{\mathcal{A}}_n(N)\} \leq \mathbf{E}Z_1^r \frac{\ln^r n}{n^{r-1}}. \quad (57)$$

Сравнивая правые части (56) и (57), заключаем, что

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq k; \overline{\mathcal{A}}_n(N)\} = o(\mathbf{P}\{Z_n \geq k; \mathcal{A}_n(N)\})$$

при $k \leq B(r/2 - 1)n \ln n - B(r/2 + \varepsilon)n \ln \ln n$ и $\varepsilon > 0$. Таким образом, первое утверждение теоремы 1 доказано.

Из лемм 6 и 7 заключаем, что для всех достаточно больших n и k

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq k\} \geq cn\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\}. \quad (58)$$

Положим

$$k = \left[B\left(\frac{r}{2} - 1\right)n \ln n + B\left(\frac{r+1}{2} + \varepsilon\right)n \ln \ln n \right]. \quad (59)$$

Если (1) выполнено для указанного в (59) значения k , то из (58) вытекает оценка

$$\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\} \leq cn^{-r} \ln^{-r-1-\varepsilon} n. \quad (60)$$

Кроме того, из (59) заключаем, что

$$n = \frac{2}{B(r-2)} \frac{k}{\ln k} (1 + o(1)) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Подставляя в (60), имеем для всех достаточно больших k неравенство

$$\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\} \leq ck^{-r} \ln^{-1-\varepsilon} k.$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1} \mathbf{P}\{Z_1 \geq k\} < \infty$, что равносильно конечности $\mathbf{E}Z_1^r$.

3.2. Доказательство теоремы 2 для случая конечной дисперсии. Предположим сначала, что соотношение

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \sim n\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\} \quad (61)$$

выполнено при $k/(n \ln n) \rightarrow \infty$, и покажем, что $\mathbf{P}\{Z_n \geq k\}$ имеет ту же самую асимптотику. Поскольку $\mathbf{P}\{Z_n \geq k\} < \mathbf{P}\{M_n \geq k\}$, нам достаточно вывести нижнюю оценку

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{Z_n \geq k\}}{\mathbf{P}\{M_n \geq k\}} \geq 1. \quad (62)$$

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Полагая в (40) $\nu = (1 + \varepsilon)^{-1}$, имеем

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq k\} \geq \mathbf{P}\{M_n \geq (1 + \varepsilon)k\} \min_{i < n} \mathbf{P}\{Z_i \geq k \mid Z_0 = [(1 + \varepsilon)k]\}. \quad (63)$$

Используя неравенство Чебышёва, получаем

$$\mathbf{P}\{Z_i < k \mid Z_0 = [(1 + \varepsilon)k]\} \leq \frac{(1 + \varepsilon)kBi}{\varepsilon^2 k^2} = \frac{B(1 + \varepsilon)i}{\varepsilon^2 k}.$$

Следовательно,

$$\min_{i < n} \mathbf{P}\{Z_i \geq k \mid Z_0 = [(1 + \varepsilon)k]\} \geq 1 - \frac{B(1 + \varepsilon)n}{\varepsilon^2 k}. \quad (64)$$

Комбинируя (61), (63) и (64) и принимая во внимание правильное изменение $\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\}$, мы заключаем, что

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{Z_n \geq k\}}{\mathbf{P}\{M_n \geq k\}} \geq (1 + \varepsilon)^{-t}.$$

Из этой оценки и произвольности ε вытекает (62).

Обратимся теперь к выводу (61). Согласно теореме 3 из [8], для любых $r \geq 2, N \geq 1, y_0 > 0$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq & \left(y_0 + \frac{1}{N}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r \overline{B}n/2 + n\overline{\beta}_r e^{y_0N}/N^{r-2}}\right)^k - 1\right]^{-1} \\ & + n\mathbf{P}\{Z_1 \geq N\} \end{aligned} \tag{65}$$

где $\overline{B} = \mathbf{E}\{Z_1(Z_1 - 1); Z_1 \leq N\}, \overline{\beta}_r = \mathbf{E}\{Z_1^{r-1}(Z_1 - 1); Z_1 \leq N\}/2$. Положим $r = t$. Нетрудно видеть, что

$$\overline{\beta}_t \leq \frac{t}{2} \int_0^N x^{t-1} \mathbf{P}\{Z_1 \geq x\} dx =: L_1(N). \tag{66}$$

Так как $\mathbf{P}\{Z_1 \geq x\}$ правильно меняется с показателем $-t$, то по теореме VIII.9.1 из [9] функция $L_1(x)$ является медленно меняющейся. Кроме того, из условия конечности B следует, что $L_1(N)$ ограничена при $t = 2$. Отсюда заключаем, что для всех достаточно больших N величина

$$y_0 := \frac{1}{N} \ln\left(\frac{N^{t-1}}{n}\right) - \frac{2}{N} \ln \ln\left(\frac{N^{t-1}}{n}\right) - \frac{1}{N} \ln L_1(N)$$

положительна. Нетрудно видеть, что если $N/n \rightarrow \infty$, то

$$\frac{n\overline{\beta}_t e^{y_0N}}{N^{t-2}} = \frac{N}{\ln^2(N^{t-1}/n)} = o(y_0^{-1}). \tag{67}$$

Далее, если $N/(n \ln n) \rightarrow \infty$, то

$$\frac{e^t \overline{B}n}{2} \leq \frac{e^t Bn}{2} = o(y_0^{-1}). \tag{68}$$

Полагая $N = (1 - \varepsilon)k$ в (65) и используя (67) и (68), мы заключаем, что для всех k , удовлетворяющих неравенству $k > cn \ln n$, справедлива оценка

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} < (y_0 + (1 - \varepsilon)^{-1}k^{-1}) \left[\left(1 + \frac{y_0}{1 + \varepsilon/2}\right)^k - 1\right]^{-1} + n\mathbf{P}\{Z_1 \geq (1 - \varepsilon)k\}.$$

Подставляя выбранное значение y_0 , приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{M_n \geq k\} < c(\varepsilon) \frac{\ln k}{k} \left(\frac{n \ln L_1(k) \ln^2 k}{k^{t-1}}\right)^{1/((1-\varepsilon)(1+\varepsilon/2))} \\ + n\mathbf{P}\{Z_1 \geq (1 - \varepsilon)k\}. \end{aligned}$$

Замечая, что первое слагаемое в правой части этого неравенства есть $o(nk^{-t-\delta})$ для некоторого $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, и используя правильное изменение $\mathbf{P}\{Z_1 \geq x\}$, заключаем, что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n \geq k\}}{n\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\}} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{n\mathbf{P}\{Z_1 \geq (1-\varepsilon)k\}}{n\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\}} \leq (1-\varepsilon)^{-t}.$$

Следовательно, при $k/(n \ln n) \rightarrow \infty$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n \geq k\}}{n\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\}} \leq 1 \quad (69)$$

в силу произвольности ε . С другой стороны, по лемме 6

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n \geq k\}}{n\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\}} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_n(k))}{n\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\}} \geq 1 \quad \text{при} \quad \frac{k}{n} \rightarrow \infty. \quad (70)$$

Комбинируя (69) и (70), мы получаем (61) и, кроме того, соотношение $\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \sim \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_n(k))$ при $k/(n \ln n) \rightarrow \infty$. Тем самым, доказательство теоремы при $t > 2$ завершено.

3.3. Доказательство теоремы 2 для случая бесконечной дисперсии. Рассмотрим сначала случай $t < 2$. При этом условии мы имеем асимптотические равенства

$$\begin{aligned} 1 - \tilde{f}'(1) &= \mathbf{E}\{Z_1; Z_1 \geq N\} \\ &= N\mathbf{P}\{Z_1 \geq N\} + \int_N^\infty \mathbf{P}\{Z_1 \geq x\} dx \sim \frac{t}{t-1} N^{1-t} L(N) \end{aligned} \quad (71)$$

и

$$\tilde{f}''(1) = \overline{B} \leq 2 \int_0^N x \mathbf{P}\{Z_1 \geq x\} dx \sim \frac{2}{2-t} N^{2-t} L(N) \quad (72)$$

при $N \rightarrow \infty$.

Комбинируя (35), (37), (71) и (72), мы заключаем, что

$$\tilde{f}'(x_0) > 1 - c_0 N^{1-t} L(N).$$

Применяя это неравенство к правой части (34) и используя (38), мы получаем при $c_0 k^{1-t} L(k) \leq 1$ оценку

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} > \mathbf{P}\{\overline{\mathcal{A}}_n(k-1)\} \geq n\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\} \exp(-c_0 n k^{1-t} L(k))$$

для k таких, что $c_0 k^{1-t} L(k) \leq 1$. Отсюда следует, что (70) выполнено при $n k^{1-t} L(k) \rightarrow 0$.

Выведем теперь верхнюю оценку для $\mathbf{P}\{M_n \geq k\}$. Полагая в (65) $r = 2$ и используя (72), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{M_n \geq k\} &< \left(y_0 + \frac{1}{N}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + c n e^{y_0 N} N^{2-t} L(N)}\right)^k - 1 \right]^{-1} \\ &+ n\mathbf{P}\{Z_1 \geq N\}, \end{aligned} \quad (73)$$

где $c = c(t)$ — некоторая положительная постоянная. Полагая в этой оценке

$$N = (1 - \varepsilon)k, \quad y_0 = \frac{1}{N} \ln \left(\frac{N^{t-1}}{nL(N)} \right) - \frac{2}{N} \ln \ln \left(\frac{N^{t-1}}{nL(N)} \right)$$

и действуя аналогично случаю $t > 2$, мы заключаем, что (69) верно при $nk^{1-t}L(k) \rightarrow 0$. Тем самым,

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \sim \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_n(k)) \sim n\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\} \quad \text{при } nk^{1-t}L(k) \rightarrow 0. \quad (74)$$

Если же $t = 2$, то вместо (72) мы имеем оценку

$$\tilde{f}''(1) = \overline{B} \leq 2 \int_0^N x \mathbf{P}\{Z_1 \geq x\} dx \sim \tilde{L}(N) \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

где $\tilde{L}(N) := \int_1^N x^{-1}L(x) dx$. Легко проверить, что использованные при выводе (74) рассуждения остаются верными и при $t = 2$, если заменить $L(x)$ на $\tilde{L}(x)$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \sim \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_n(k)) \sim n\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\} \quad \text{при } nk^{-1}\tilde{L}(k) \rightarrow 0. \quad (75)$$

В работе [15] показано, что для любого критического процесса Гальтона–Ватсона

$$\int_0^{1-Q_n} \frac{ds}{f(s) - s} \sim n \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (76)$$

Поскольку из условия (2) вытекает (5), делая в интеграле в (76) замену $s = 1 - y^{-1}$, получаем

$$\int_0^{1-Q_n} \frac{ds}{f(s) - s} = \int_0^{Q_n^{-1}} \frac{y^{t-2}}{L^*(y)} dy = \frac{(1 + o(1))}{t-1} \frac{Q_n^{1-t}}{L^*(Q_n^{-1})} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (76) вследствие (6) и (7) получаем при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{Q_n^{1-t}}{L(Q_n^{-1})} \sim \Gamma(2-t)n \quad \text{при } t < 2, \quad \frac{Q_n^{-1}}{\tilde{L}(Q_n^{-1})} \sim n \quad \text{при } t = 2.$$

Используя эти соотношения, легко проверить, что если $kQ_n \rightarrow \infty$, то $nk^{1-t}L(k) \rightarrow 0$ при $t < 2$ и $nk^{-1}\tilde{L}(k) \rightarrow 0$ при $t = 2$. Стало быть, мы можем объединить (74) и (75) следующим образом:

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \sim \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_n(k)) \sim n\mathbf{P}\{Z_1 \geq k\} \quad \text{при } kQ_n \rightarrow \infty. \quad (77)$$

Найдем теперь асимптотику вероятности $\mathbf{P}\{Z_n \geq k\}$. Согласно неравенству теоремы 2 из работы [11], $\mathbf{E}|\sum_1^n X_i|^r \leq 2 \sum_1^n \mathbf{E}|X_i|^r$, $1 \leq r \leq 2$, где $\{\sum_1^n X_i; n \geq 1\}$ — мартингал. Применяя это неравенство к процессу Z_n , начинающемуся с k частиц в нулевом поколении, мы имеем при $i \leq n$ оценку $\mathbf{E}\{|Z_i - k|^r | Z_0 = k\} \leq 2k\mathbf{E}|Z_i - 1|^r < 2k(1 + \mathbf{E}Z_i^r) \leq 4k\mathbf{E}Z_i^r$. Следовательно, по неравенству Маркова

$$\min_{i < n} \mathbf{P}\{Z_i > (1 - \delta)k \mid Z_0 = k\} \geq 1 - \frac{4k \max_{i < n} \mathbf{E}Z_i^r}{\delta^r k^r}. \quad (78)$$

Оценивая математическое ожидание в правой части (78) с помощью полученной в [16] оценки

$$\mathbf{E}Z_i^r < cQ_i^{1-r} \quad \text{для любого } r \in (1, t) \text{ и } i \geq 1, \quad (79)$$

мы получаем

$$\min_{i < n} \mathbf{P}\{Z_i > (1 - \delta)k \mid Z_0 = k\} \geq 1 - c(kQ_n)^{1-r}.$$

Применяя эту оценку и (77) к правой части (63), заключаем, что (62) справедливо при $kQ_n \rightarrow \infty$. Тем самым, доказательство теоремы завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков К. А. Анализ переходных явлений для ветвящихся процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 3, с. 449–468.
2. Ватутин В. А. Критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с эмиграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 3, с. 482–497.
3. Карпенко А. В. Предельные теоремы и вероятностные неравенства для полного и максимального числа потомков ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Новосибирск, 1990.
4. Макаров Г. Д. Большие отклонения для критического процесса Гальтона–Ватсона. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, в. 3, с. 490–501.
5. Макаров Г. Д. Асимптотика вероятностей больших отклонений для критических марковских ветвящихся процессов. — Вестн. МГУ, сер. матем., мех., 1983, с. 7–9.
6. Нагаев С. В., Ватрушев Н. В. Оценка вероятностей больших отклонений для критического процесса Гальтона–Ватсона. — Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. 20, в. 1, с. 181–182.
7. Нагаев С. В., Ваттель В. И. Предельные теоремы для вероятностей больших отклонений процесса Гальтона–Ватсона. — Дискрет. матем., 2003, т. 15, № 1, с. 3–27.
8. Нагаев С. В., Ваттель В. И. Вероятностные неравенства для критического процесса Гальтона–Ватсона. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 266–291.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1967, 752 с.
10. Athreya K. B., Ney P. E. Branching Processes. Berlin: Springer, 1972, 287 p.
11. von Bahr B., Esseen C.-G. Inequalities for the r th absolute moment of a sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, p. 299–303.
12. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
13. Slack R. S. A branching process with mean one and possibly infinite variance. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1968, v. 9, p. 139–145.
14. Slack R. S. Further notes on branching process with mean one. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1972, v. 25, p. 31–38.
15. Sze M. Markov processes associated with critical Galton–Watson processes with application to extinction probabilities. — Adv. Appl. Probab., 1976, v. 8, № 2, с. 278–295.
16. Ватутин В. А., Ваттель В., Флейшман К. Критические процессы Гальтона–Ватсона: максимум общего числа частиц внутри большого окна. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 419–445.

Поступила в редакцию
20.IV.2006