Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Я. Кельберт, Ю. М. Сухов, Асимптотическое поведение ветвящейся диффузии на гиперболическом пространстве, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 4, 660–684

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1528>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:12:59

© 2007 г.

КЕЛЬБЕРТ М. Я.*, СУХОВ Ю. М.**

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВЕТВЯЩЕЙСЯ
ДИФФУЗИИ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается ветвящийся диффузионный процесс на пространстве Лобачевского $\mathbf{H}^d$. Проблема состоит в оценке хаусдорфовой размерности предельного множества на границе (абсолюте) $\partial\mathbf{H}^d$. В случае однородной ветвящейся диффузии элегантная формула для хаусдорфовой размерности была получена С. Лалли и Т. Селке [5] при $d = 2$ и Ф. И. Карпелевичем, Е. А. Печерским и Ю. М. Суховым [3] для общего d . Затем М. Я. Кельберт и Ю. М. Сухов [4] распространили эту формулу на случай, когда ветвящаяся диффузия в некотором смысле асимптотически однородна (т.е. ее основной параметр, так называемый потенциал ветвления, стремится к постоянному предельному значению вблизи абсолюта). В этой статье доказывается, что хаусдорфова размерность предельного множества оценивается сверху и снизу в терминах максимальных и минимальных значений потенциала ветвления. Как и в [4], метод основан на свойствах минимальных положительных решений задачи Штурма–Лиувилля с общим потенциалом и элементах гармонического анализа на $\mathbf{H}^d$. Мы исследуем связь хаусдорфовой размерности со свойствами рекуррентности и транзиентности (возвратности и невозвратности) ветвящейся диффузии, как они определены А. Григоряном и М. Я. Кельбертом [1] на общих римановых многообразиях.

Ключевые слова и фразы: гиперболическое пространство, возвратность, невозвратность, предельное множество, хаусдорфова размерность, орисферическая проекция, эллиптические уравнения с частными производными, задача Штурма–Лиувилля, минимальное положительное решение.

1. Введение. В этой статье изучаются геометрические аспекты асимптотического поведения ветвящихся диффузионных процессов на пространстве Лобачевского. Хотя ветвящиеся диффузионные процессы (ВДП) довольно популярная модель в теории вероятностей и

* Mathematics Department, University of Wales Swansea, Singleton Park, Swansea, SA2 8PP, UK; e-mail: M.Kelbert@swansea.ac.uk

** Statistical Laboratory, DPMMS/CMS, University of Cambridge, Cambridge CB3 0WB, UK; e-mail: yms@statslab.cam.ac.uk

ее приложениях, многие их асимптотические свойства остаются относительно неизученными. Мы следуем подходу, предложенному в работе [5], где однородный ветвящийся диффузионный процесс (ОВДП), по-видимому, впервые рассматривался на плоскости Лобачевского $\mathbf{H}^2$ и обсуждались его асимптотические свойства. В частности, свойство возвратности означает, что с вероятностью 1 любой компакт посещается в сколь угодно большие моменты времени хотя бы одним потомком в ветвящемся процессе, а свойство невозвратности означает, что это происходит с вероятностью, меньшей 1. Возможно, наиболее интересным наблюдением, сделанным в [5], был тот факт, что для ОВДП случайное множество Λ предельных точек на границе (абсолюте) $\partial\mathbf{H}^2$ имеет с вероятностью 1 детерминированное значение хаусдорфовой размерности, которое может быть вычислено явно.

Результаты работы [5] были перенесены в [3] на ОВДП на пространстве Лобачевского $\mathbf{H}^d$. Оказалось, что хаусдорфова размерность h предельного множества Λ на абсолюте $\partial\mathbf{H}^d$, как функция естественных параметров процесса, испытывает своеобразный «фазовый переход», а именно, она непрерывно возрастает от 0 до $(d-1)/2$, а затем меняется скачком до $d-1$ (в этом случае предельное множество Λ совпадает со всем абсолютом $\partial\mathbf{H}^d$). Это связано с деликатными спектральными свойствами генератора процесса на $\mathbf{H}^d$, который в случае ОВДП равен $-\Delta/2$, где Δ — оператор Лапласа–Бельтрами. С вероятностной точки зрения важный факт состоит в том, что любая траектория ветвящейся диффузии на $\mathbf{H}^d$ экспоненциально быстро притягивается к случайной точке $w \in \partial\mathbf{H}^d$, равномерно распределенной на $\partial\mathbf{H}^d$, так что после некоторого случайного времени эта траектория не посещает любой выделенный компакт в $\mathbf{H}^d$. Однако если механизм ветвления является достаточно сильным (суперкритическим), то в процессе появляется столь большое число потомков, что некоторые из них могут (и будут) посещать этот компакт в сколь угодно большие моменты времени. Из этого факта выводится, что $\Lambda = \partial\mathbf{H}^d$ в суперкритическом случае.

В данной статье мы изучаем неоднородные ветвящиеся диффузионные процессы (НВДП) на $\mathbf{H}^d$. Некоторые вспомогательные результаты получены для НВДП на областях в $\mathbf{H}^d$ с индуцированной римановой метрикой. На первый взгляд представляется, что свойство однородности является критическим для всех доказательств в работах [5], [2] и [3]. С другой стороны, в недавней работе [4] было показано, что описанные выше результаты верны в случае «асимптотической» однородности ветвящегося процесса вблизи абсолюта. Поскольку хаусдорфова размерность является «локальной» характеристикой, можно ожидать, что она связана с поведением параметров ветвящегося процесса вблизи (соответствующим образом определяемых) экстремальных точек.

Указанное соображение и является исходной точкой настоящей ра-

боты. Для корректного определения ветвящейся диффузии нужно задать закон индивидуального движения частиц и закон ветвления. В этой статье мы все еще предполагаем, что индивидуальное движение частиц является однородной диффузией на $\mathbf{H}^d$, и наш анализ связан со спектральными свойствами оператора Лапласа–Бельтрами. Однако механизм ветвления является совершенно общим. Он задается измеримой функцией $\lambda(z)$, определяющей интенсивность ветвления, и набором измеримых функций $p_k(z)$, $k = 1, 2, \dots$, определяющих вероятности получить k потомков при ветвлении в точке $z \in \mathbf{H}^d$. Нижние и верхние оценки для хаусдорфовой размерности даются в терминах поведения функций $\lambda(z)$ и $p_k(z)$ вблизи экстремальных точек. Более точно, рассмотрим локальный потенциал ветвления (ЛПВ)

$$V(z) = 2\lambda(z)(\kappa(z) - 1), \quad (1.1)$$

где $\kappa(z)$ — среднее число потомков при ветвлении в точке $z \in \mathbf{H}^d$:

$$\kappa(z) = \sum_{k \geq 0} k p_k(z). \quad (1.2)$$

Хаусдорфова размерность предельного множества оценивается сверху и снизу в терминах, связанных с поведением функции $V(z)$ вблизи точек ее максимума и минимума.

В частности, существуют два типа локальных максимумов потенциала $V(z)$: на границе $\partial\mathbf{H}^d$ и строго внутри $\mathbf{H}^d$ (т.е. вдали от границы), и между ними происходит «соревнование», в котором «приз» — это максимальное значение h и тесно связанные с ним свойства возвратности или невозвратности. Интуитивная точка зрения, что максимум на абсолюте «более важен», чем внутри $\mathbf{H}^d$, обычно (но далеко не всегда) справедлива. Сложным является случай, когда максимальное значение V_b^+ потенциала $V(z)$ на $\partial\mathbf{H}^d$ меньше, а максимальное значение V_{in}^+ внутри $\mathbf{H}^d$ больше, чем наименьшее собственное значение оператора $-\Delta/2$. В этом случае вероятностная интуиция недостаточна, и требуются детальные аналитические вычисления, результат которых и определяет ответ. С другой стороны, минимальные значения ЛПВ $V(z)$ появляются в нижней оценке хаусдорфовой размерности и не влияют на свойства возвратности и невозвратности.

С нашей точки зрения модель НВДП на $\mathbf{H}^d$ имеет серьезные преимущества (отмеченные уже в [5]), которые стоит использовать при асимптотическом исследовании моделей случайного роста. Эта модель имеет богатую аналитическую и геометрическую структуру, позволяющую явно вычислять ее параметры. Аналогичная задача в отсутствие подобной структуры потребует тщательного (и трудного) качественного анализа, и с нашей точки зрения ответы, полученные в этой статье, могут облегчить такую работу.

2. Основные понятия и результаты. Пространство Лобачевского $\mathbf{H}^d$ можно определить как внутренность единичного шара в $\mathbf{R}^d$, снабженную метрикой Клейна. (При $d = 2$ обычно используют модель с метрикой Пуанкаре, а $\mathbf{H}^2$ представляется как внутренность круга или полуплоскость. Однако модели Клейна и Пуанкаре изоморфны.) Краткое изложение основных понятий, адресованное неспециалистам, можно найти в [3]. Метрика Клейна совместима с обычной евклидовой топологией (но не с евклидовой метрикой) в $\mathbf{R}^d$, и абсолют, т.е. бесконечно удаленная граница $\partial\mathbf{H}^d$ пространства $\mathbf{H}^d$, отвечает единичной сфере в $\mathbf{R}^d$. Снабдим абсолют обычной евклидовой топологией.

Геодезическая линия в $\mathbf{H}^d$ — это направленная хорда γ , соединяющая точки $w, w' \in \partial\mathbf{H}^d$ (будем говорить, что γ выходит из w и входит в w'). Она «канонически» изоморфна направленной прямой $\mathbf{R}$ с обычной евклидовой метрикой. Более точно, при канонической изометрии: а) начало координат на прямой $\mathbf{R}$ соответствует орисферической проекции $\pi^{\text{ho}}(0)$ центра $0 \in \mathbf{H}^d$, б) гиперболическое расстояние между точками $z, z' \in \gamma$ равно евклидову расстоянию между их образами на $\mathbf{R}$. Центр $0 \in \mathbf{H}^d$ играет роль точки отсчета и может быть заменен любой другой точкой; это не повлияет на формулировки наших теорем. С другой стороны, свобода выбора точки отсчета дает больше возможностей для проверки наложенных ниже условий и, таким образом, расширяет границы применимости результатов.

Семейство геодезических, исходящих из данной точки $w \in \partial\mathbf{H}^d$ (соответственно входящих в $w' \in \partial\mathbf{H}^d$), образует геодезический пучок $\mathfrak{S}_w^-$ с полюсом выхода w (соответственно геодезический пучок $\mathfrak{S}_w^+$ с полюсом входа w'). гиперповерхность $\mathbf{S}_w \subset \mathbf{H}^d$, ортогональная геодезическим из пучка $\mathfrak{S}_w^-$, называется орисферой (с полюсом w); в метрике Клейна — это проколота граница эллипсоида, касающегося абсолюта в точке w . При естественной стереографической проекции орисфера $\mathbf{S}_w$ изоморфна $\mathbf{R}^{d-1}$. Стереографическая проекция естественным образом продолжается на проколотый абсолют и тем самым порождает так называемую стереографическую метрику χ_w на $\partial\mathbf{H}^d$ с полюсом в w . Ясно, что эта метрика зависит от выбора точки w . (В модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, где $\mathbf{H}^2$ представляется как верхняя полуплоскость $\mathbf{C}^+$, абсолют отвечает вещественной прямой $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, и при $w = \infty$ метрика χ_w — это обычная евклидова метрика на $\mathbf{R}$.)

В дальнейшем, говоря о стереографической проекции, мы используем евклидовы термины, относящиеся к орисфере $\mathbf{S}_w$ или абсолюту $\partial\mathbf{H}^d$ (например, говорим о $(d-1)$ -мерном кубе, лежащем в $\mathbf{S}_w$ или $\partial\mathbf{H}^d$). Хаусдорфова размерность $h(\Lambda)$ предельного множества $\Lambda \subseteq \partial\mathbf{H}^d$ вычисляется в стереографической метрике χ_w для некоторой выбранной точки $w_* \in \partial\mathbf{H}^d$. Выбор этой точки не влияет на утверждения приводимых ниже теорем и не будет далее обсуждаться. Более того, все резуль-

таты остаются справедливыми и для другого хорошо известного типа метрик на $\partial\mathbf{H}^d$, так называемых угловых метрик. Угловая метрика φ_z также зависит от выбора точки отсчета $z \in \mathbf{H}^d$; в этой метрике расстояние $\varphi_z(w, w')$ между точками $w, w' \in \partial\mathbf{H}^d$ равно евклидову углу между геодезическими γ и γ' , выходящими из w и w' соответственно и проходящими через z . (В модели Пуанкаре, где плоскость Лобачевского представляется открытым единичным кругом, абсолютом — это единичная окружность $S^1 \in \mathbf{C}$, и при $z = 0$ метрика φ_z — это евклидова метрика на S^1 .)

Рис. 1

Орисферы с полюсом в w образуют слоение в пространстве $\mathbf{H}^d$; вместе с проколотым абсолютом $\partial\mathbf{H}^d \setminus \{w\}$ они образуют слоение в $\bar{\mathbf{H}}^d \setminus \{w\}$, где $\bar{\mathbf{H}}^d$ — это замкнутый единичный шар в $\mathbf{R}^d$. Открытый эллипсоид с границей S_w называется оришаром с полюсом w и обозначается $\mathbf{B}(S_w)$. См. рис. 1.

В дальнейшем мы опускаем индекс d в обозначениях типа $\mathbf{H}^d$. Пусть $\gamma \in \mathfrak{G}_w^-$ — геодезическая линия. Геодезическая проекция π_γ^{ho} отображает точку $z \in \mathbf{H}$ в $\pi_\gamma^{\text{ho}}(z)$ — точку, в которой γ пересекает орисферу S_w , проходящую через z . Напомним, что при канонической изометрии между γ и $\mathbf{R}$ образ $\pi_\gamma^{\text{ho}}(0)$ центра $0 \in \mathbf{H}$ совпадает с началом координат на $\mathbf{R}$. В дальнейшем мы многократно используем каноническую изометрию между прямой $\mathbf{R}$ и геодезической γ , не оговаривая этого каждый раз. В частности, это устанавливает, как определяются подмножества в $\mathbf{H}$, образами которых являются полубесконечные интервалы $(-\infty, \pi_\gamma^{\text{ho}}(z))$ и $(\pi_\gamma^{\text{ho}}(z), \infty)$ на геодезической γ , где $z \in \mathbf{H}$.

Однородный гиперболический диффузионный процесс (ОГДП) на $\mathbf{H}$ — это марковский процесс с генератором $-\Delta/2$, где Δ — оператор Лапласа–Бельтрами на $\mathbf{H}$. Важное свойство состоит в том, что для каждой геодезической $\gamma \in \mathfrak{G}_w^-$ образом ОГДП при отображении π_γ^{ho} является броуновское движение на $\mathbf{R}^1$ со сносом $-(d-1)/2$ и единичной диффу-

зией. Это придает точный смысл утверждению, что траектория ОГДП на $\mathbf{H}$ экспоненциально быстро притягивается к $\partial\mathbf{H}$. (Образом ОГДП на орисфере при дуальной проекции является стандартное броуновское движение с нулевым сносом и матрицей диффузии, пропорциональной единичной матрице $\mathbf{I}$.)

Теперь рассмотрим ВДП Θ_{z_0} на $\mathbf{H}$, начинающийся из точки $z_0 \in \mathbf{H}$, в котором индивидуальное движение частиц задается ОГДП, а ветвление в точке $z \in \mathbf{H}$ имеет интенсивность $\lambda(z)$ и при этом k потомков возникают с вероятностями $p_k(z)$, $k = 0, 1, \dots$. Движение и ветвление различных потомков независимы. Функции $\lambda(z)$ и $p_k(z)$ предполагаются борелевскими и определенными на замыкании $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cup \partial\mathbf{H}$ в топологии замкнутого единичного шара в $\mathbf{R}^d$. Для простоты мы в дальнейшем предполагаем, что $p_0 \equiv 0$. С другой стороны, мы не накладываем условий глобальной непрерывности функций λ и p_k , хотя это и упростило бы изложение. Глобальные условия непрерывности неестественны потому, что гиперболическая метрика на $\mathbf{H}$ является сингулярной по отношению к евклидовой метрике на $\bar{\mathbf{H}}$ вблизи абсолюта $\partial\mathbf{H}$. Однако в точках локального максимума потенциала ветвления V функции $\lambda(z)$ и $p_k(z)$ предполагаются непрерывными.

Обозначим $P(z)$ распределение числа потомков и $\kappa(z)$ среднее число потомков в точке $z \in \bar{\mathbf{H}}$ (ср. с (1.2)). Напомним, что $V(z)$ обозначает ЛПВ в точке $z \in \mathbf{H}$ (см. (1.1)). Вообще говоря, мы не исключаем случая, когда $\kappa(z)$ и, следовательно, $V(z)$ принимают значение $+\infty$.

Важную роль играют значения V_b^+ , V_{gl}^+ и V_b^- . Значения V_b^+ и V_{gl}^+ определяются формулами

$$V_b^+ = \sup_{z \in \partial\mathbf{H}} V(z) \quad \text{и} \quad V_{gl}^+ = \sup_{z \in \bar{\mathbf{H}}} V(z); \quad (2.1a)$$

очевидным образом, $V_{gl}^+ \geq V_b^+$. Далее,

$$V_b^- = \inf_{z \in \partial\mathbf{H}} V(z). \quad (2.1b)$$

Мы разбираем различные случаи взаимного расположения максимумов V_b^+ и V_{gl}^+ и поведения интенсивности ветвления $\lambda(z)$ и распределения $P(z)$ вблизи точек этих максимумов. Введем некоторые технические предположения. Символ $\preceq$ используется для стохастического порядка между вероятностными распределениями на $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$: $P^{(1)} \preceq P^{(2)}$ означает, что $\sum_{l \geq k} p_l^{(1)} \leq \sum_{l \geq k} p_l^{(2)}$ для всех $k \geq 1$. Будем говорить, что $w^+ \in \partial\mathbf{H}$ есть точка локального максимума для пары (λ, P) , если существует евклидова окрестность $U = U(w^+) \subset \mathbf{R}^d$ точки w^+ такая, что для всех $z \in U \cap \bar{\mathbf{H}}$

$$\lambda(z) \leq \lambda(w^+) \quad \text{и} \quad P(z) \preceq P(w^+). \quad (2.2)$$

Будем говорить, что $w^+ \in \partial \mathbf{H}$ — точка глобального максимума для пары (λ, P) , если (2.2) выполняется для всех $z \in \bar{\mathbf{H}}$. Аналогичным образом определяется точка $z^+ \in \mathbf{H}$ локального или глобального максимума. Точки локального и глобального минимума задаются заменой неравенств на противоположные.

С другой стороны, $w^- \in \partial \mathbf{H}$ называется точкой орисферического минимума для (λ, P) , если для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют точка $w(\varepsilon) \in \partial \mathbf{H}$ и орисфера $S_{w(\varepsilon)} \in \mathfrak{G}_{w(\varepsilon)}^-$ с полюсом $w(\varepsilon)$ такие, что для любого $z \in \mathbf{H} \setminus \mathbf{B}(S_{w(\varepsilon)})$

$$\lambda(z) \geq \lambda(w^-)(1 - \varepsilon) \quad \text{и} \quad p_k(z) \geq p_k(w^-)(1 - \varepsilon) \quad \forall k \geq 2. \quad (2.3a)$$

Наглядно это означает, что точки $z^- \in \mathbf{H}$ локального минимума для пары (λ, P) не накапливаются на «массивном» подмножестве абсолюта $\partial \mathbf{H}$. Определение орисферического максимума дается аналогичным образом, с заменой неравенства на противоположное и $1 - \varepsilon$ на $1 + \varepsilon$. Соответственно оно означает, что точки локального максимума для пары (λ, P) не накапливаются на «массивном» подмножестве абсолюта.

Далее, введем свойства непрерывности пары (λ, P) в точках w^+ или z^+ локального или глобального максимума. Будем говорить, что точка максимума z^+ является точкой непрерывности (снизу) для (λ, P) , если для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует евклидова окрестность $O = O_\varepsilon(z^+) \subset \mathbf{R}^d$ точки z^+ такая, что для любого $z \in O \cap \bar{\mathbf{H}}$

$$(1 - \varepsilon) \lambda(z^+) \leq \lambda(z) \quad \text{и} \quad (1 - \varepsilon) p_k(z^+) \leq p_k(z) \quad \forall k \geq 2. \quad (2.3b)$$

Аналогичное определение дается для точки максимума $w^+ \in \partial \mathbf{H}$. Различие между (2.3a) и (2.3b) — в областях, где выполняются соответствующие неравенства. См. рис. 2.

Рис. 2

Мы рассматриваем следующие случаи.

Случай 1: $V_b^+ = V_{gl}^+$. В этом случае мы предполагаем, что значение V_b^+ достигается в некоторой точке $w^+ \in \partial \mathbf{H}$, которая является точкой глобального максимума и непрерывности для пары (λ, P) . Мы также предполагаем, что значение V_b^- достигается в точке $w^- \in \partial \mathbf{H}$ орисферического минимума для (λ, P) .

Случай 1 можно разбить на два подслучая: **1А** (более трудный), когда $V_b^+ = V_{gl}^+ \leq \frac{1}{8}(d-1)^2$, и **1Б** (более простой), когда $V_b^+ = V_{gl}^+ > \frac{1}{8}(d-1)^2$. Отметим, что принятая здесь форма технических условий обслуживает нужды проводимого ниже анализа.

Случай 2А: $V_b^+ \leq V_{gl}^+ < \frac{1}{8}(d-1)^2$. В этом случае мы предположим, что V_b^+ достигается в некоторой точке $w^+ \in \partial \mathbf{H}$ локального и орисферического максимума и непрерывности для пары (λ, P) . Мы также предположим, что V_b^- достигается в некоторой точке $w^- \in \partial \mathbf{H}$ локального и орисферического минимума для (λ, P) .

Случай 2Б: $V_b^+ \leq \frac{1}{8}(d-1)^2 < V_{gl}^+$. Чтобы подчеркнуть, что «большой» локальный максимум лежит внутри $\mathbf{H}$, положим $V_{gl}^+ = V_{in}^+$. В этом случае мы предполагаем, что V_b^+ и V_{in}^+ достигаются в некоторых точках $w^+ \in \partial \mathbf{H}$ и $z^+ \in \mathbf{H}$ непрерывности для пары (λ, P) таких, что w^+ является точкой локального, а $z^+ \in \mathbf{H}$ — точкой глобального максимума для пары (λ, P) . Мы также предположим, как и выше, что V_b^- достигается в точке орисферического минимума для (λ, P) .

Простым является **случай 2В**, когда $\frac{1}{8}(d-1)^2 < V_b^- \leq V_b^+ \leq V_{gl}^+$. Здесь мы снова предположим, что V_b^- достигается в некоторой точке глобального и орисферического минимума для (λ, P) .

Резюмируя, всюду ниже в этой статье мы предполагаем, что индивидуальное движение в процессе Θ_{z_0} задается однородной диффузией на $\mathbf{H}$, а интенсивность ветвления $\lambda(z)$ и распределение числа потомков $P(z)$ в точке $z \in \bar{\mathbf{H}}$ удовлетворяют одному из перечисленных выше условий. Обозначим $\mathbb{P}_{z_0}$ распределение вероятностей процесса Θ_{z_0} . Пусть Λ_{z_0} — случайное замкнутое множество на $\partial \mathbf{H}$, образованное предельными точками НВДП Θ_{z_0} в евклидовой топологии на $\bar{\mathbf{H}}$. Символ $h(z_0)$ обозначает хаусдорфову размерность множества Λ_{z_0} , вычисленную в некоторой фиксированной метрике, χ_{w_*} или φ_{z_*} , на $\partial \mathbf{H}$; это есть случайная величина, распределение которой зависит от z_0 . Будем говорить, что процесс Θ_{z_0} возвратный, если для любого $t_0 > 0$ и любого открытого множества $O \subset \mathbf{H}$ с вероятностью 1 хотя бы один потомок начальной частицы попадет в O при некотором $t > t_0$. Процесс Θ_{z_0} является невозвратным, если эта вероятность меньше 1 (в [1] даются необходимые и достаточные условия возвратности и невозвратности на римановых многообразиях).

Теорема 1. А. В случае 1А для любой начальной точки $z_0 \in \mathbf{H}$ процесс Θ_{z_0} является невозвратным и

$$\mathbb{P}_{z_0} \left\{ \frac{1}{2} \left[d - 1 - \sqrt{(d-1)^2 - 8V_b^-} \right] \leq h(z_0) \leq \frac{1}{2} \left[d - 1 - \sqrt{(d-1)^2 - 8V_b^+} \right] \right\} = 1. \quad (2.4)$$

Более того, для любого $z_0 \in \mathbf{H}$

$$\mathbb{P}_{z_0} \left\{ \frac{1}{2} \left[d - 1 - \sqrt{(d-1)^2 - 8V_b^+} \right] - \varepsilon < h(z_0) \right\} > 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (2.5)$$

т.е. верхняя граница в (2.4) является точной.

Б. В случае 1Б для любого $z_0 \in \mathbf{H}$

$$\mathbb{P}_{z_0} \{ \Lambda_{z_0} = \partial \mathbf{H} \} > 0, \quad (2.6)$$

т.е. Λ_{z_0} с положительной вероятностью совпадает с $\partial \mathbf{H}$. Более того, если $\mathbb{P}_{\bar{z}^0} \{ \Lambda_{\bar{z}^0} = \partial \mathbf{H} \} = 1$ для некоторого $\bar{z}^0 \in \mathbf{H}$, то для любого $z_0 \in \mathbf{H}$ процесс Θ_{z_0} является возвратным и $\mathbb{P}_{z_0} \{ \Lambda_{z_0} = \partial \mathbf{H} \} = 1$.

Теорема 2. А. В случае 2А для любого $z_0 \in \mathbf{H}$ процесс Θ_{z_0} является невозвратным и справедливы соотношения (2.4) и (2.5).

Б. В случае 2Б, как и в теореме 1А, если $\mathbb{P}_{\bar{z}^0} \{ \Lambda_{\bar{z}^0} = \partial \mathbf{H} \} = 1$ для некоторого $\bar{z}^0 \in \mathbf{H}$, то для любого $z_0 \in \mathbf{H}$ процесс Θ_{z_0} является возвратным и $\mathbb{P}_{z_0} \{ \Lambda_{z_0} = \partial \mathbf{H} \} = 1$.

В. В случае 2В процесс Θ_{z_0} всегда является возвратным и $\mathbb{P}_{z_0} \{ \Lambda_{z_0} = \partial \mathbf{H} \} = 1$.

Теорема 2.Б оставляет открытым вопрос о том, является ли процесс Θ_{z_0} возвратным или невозвратным, а также выполняются ли соотношения (2.4) и (2.6). Отметим, что условия (2.4) и (2.6) являются взаимоисключающими и, по-видимому, исчерпывают все возможности для предельного множества Λ_{z_0} при весьма слабых ограничениях.

В теоремах 3.А и 3.Б (см. ниже) даются достаточные условия в случае 2Б для того, чтобы выполнялось соотношение (2.4) или (2.6). Эти условия формулируются в терминах функций Бесселева типа $\mathcal{J}_\nu^1$ и $\mathcal{J}_\nu^2$ соответственно первого и второго рода с соответствующим образом выбранным индексом ν . Более точно, $\mathcal{J}_\nu^1(y) = J_{i\nu}^{(1)}(iy)$ и $\mathcal{J}_\nu^2(y) = J_{i\nu}^{(2)}(iy)$, $y \in \mathbf{R}$, где $J_\nu^{(1)}$ и $J_\nu^{(2)}$ — стандартные функции Бесселя (см. [6]). Другими словами, $\mathcal{J}_\nu^1$ и $\mathcal{J}_\nu^2$ — решения уравнения типа Бесселя, имеющие специальные асимптотики при $y \rightarrow 0$: $\mathcal{J}_\nu^1(y) \sim \operatorname{Re} y^{i\nu}$ и $\mathcal{J}_\nu^2(y) \sim \operatorname{Im} y^{i\nu}$. Обе функции $\mathcal{J}_\nu^1$ и $\mathcal{J}_\nu^2$ являются вещественными осциллирующими функциями вещественного аргумента.

В доказательствах теорем 3.А и 3.Б фигурируют множества $\mathcal{O}_\nu^{(1)}$ и $\mathcal{O}_\nu^{(2)}$ вещественных нулей функций $\mathcal{J}_\nu^1(y)$ и $\mathcal{J}_\nu^2(y)$ соответственно.

А именно, мы измеряем «массивность» максимумов ЛПВ $V(z)$, сравнивая их относительную позицию, высоту и ширину в терминах множеств $\mathcal{O}_\nu^{(1)}$ и $\mathcal{O}_\nu^{(2)}$. Более точно, результаты формулируются в терминах существования специальных верхних и нижних процессов, являющихся оценками ВДП и обладающих дополнительными свойствами симметрии.

Удобным понятием является локально орисферически однородная (ЛОО) пара (λ, P) . Здесь, как и ранее, $\lambda = \lambda(z)$ есть неотрицательная функция, а $P = P(z)$ — набор вероятностей, которые постоянны в конечном числе слоев между орисферами с фиксированным полюсом w . Точнее, пусть $S_w^{(1)}, S_w^{(2)}, \dots, S_w^{(2\ell-1)}, S_w^{(2\ell)}$ — набор попарно различных орисфер с полюсом $w \in \partial\mathbf{H}$ таких, что $S_w^{(i+1)}$ лежит внутри оришара $\mathbf{B}(S_w^{(i)})$, ограниченного орисферой $S_w^{(i)}$, $i = 1, \dots, 2\ell - 1$. Обозначим $L_w^{(j)}$ «орисферический слой» между $S_w^{(2j-1)}$ и $S_w^{(2j)}$, $j = 1, \dots, \ell$. Наконец, положим

$$L_w = \bigcup_{j=1}^{\ell} L_w^{(j)}, \quad L_w^{(0)} = \overline{\mathbf{H}} \setminus L_w.$$

Орисферу $S_w^{(i)}$ можно отнести к одному из примыкающих слоев или к $L_w^{(0)}$. См. рис. 3.

Рис. 3

Назовем (λ, P) ЛОО-парой с полюсом $w \in \partial\mathbf{H}$ и орисферическими слоями $L_w^{(1)}, \dots, L_w^{(\ell)}$, если: а) $\lambda(z)$ принимает постоянное значение $\lambda^{(j)}$ при $z \in L_w^{(j)}$ и постоянное значение $\lambda^{(0)}$ при $z \in L_w^{(0)}$, б) $P(z)$ совпадает с некоторым заданным распределением вероятностей $P^{(j)}$ при $z \in L_w^{(j)}$ и с распределением вероятностей $P^{(0)}$ при $z \in L_w^{(0)}$. Далее ЛОО-пара $(\bar{\lambda}(z), \bar{P}(z))$ со слоями $L_w^{(1)}, \dots, L_w^{(\ell)}$ называется мажорантой для пары (λ, P) , если $\lambda(z) \leq \bar{\lambda}(z)$ и $P(z) \preceq \bar{P}(z)$ для любого $z \in \overline{\mathbf{H}}$.

Другими словами, $\lambda(z) \leq \bar{\lambda}^{(j)}$ и $P(z) \preceq \bar{P}^{(j)}$ при $z \in \mathbf{L}_w^{(j)}$, $j = 1, \dots, \ell$, и $\lambda(z) \leq \bar{\lambda}^{(0)}$ и $P(z) \preceq \bar{P}^{(0)}$ при $z \in \mathbf{L}_w^{(0)}$.

Рис. 4

Теорема 3.А. В случае 2Б предположим, что пара $(\lambda(z), P(z))$ допускает ЛОО-мажоранту $(\bar{\lambda}(z), \bar{P}(z))$ с полюсом $\bar{w} \in \partial \mathbf{H}$ и слоями $\bar{\mathbf{L}}_w^{(1)}, \dots, \bar{\mathbf{L}}_w^{(\ell)}$ и $\bar{\mathbf{L}}_w^{(0)} = \bar{\mathbf{H}} \setminus (\bigcup_{j=1}^{\ell} \bar{\mathbf{L}}_w^{(j)})$. Положим $\bar{\kappa}(z) = \sum_{k \geq 1} k \bar{p}_k(z)$. Пусть $\bar{\lambda}^{(j)} = \bar{\lambda}(z)$, $\bar{P}^{(j)} = \bar{P}(z)$ и $\bar{\kappa}^{(j)} := \sum_{k \geq 1} k \bar{p}_k^{(j)}$ при $z \in \bar{\mathbf{L}}_w^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, \ell$. Зададим

$$\bar{V}^{(j)} = 2\bar{\lambda}^{(j)} (\bar{\kappa}^{(j)} - 1), \quad j = 0, 1, \dots, \ell,$$

и предположим, что

$$\bar{V}^{(0)} \leq \frac{(d-1)^2}{8} \quad \text{и} \quad \bar{V}^{(1)}, \dots, \bar{V}^{(\ell)} > \frac{(d-1)^2}{8}$$

(см. рис. 4.) Далее выберем геодезическую $\gamma \in \mathfrak{G}_w^-$ и рассмотрим каноническую координату на γ . Пусть $I^{(j)}$ — это интервал прямой $\mathbf{R}$, соответствующий пересечению γ с $\mathbf{L}_w^{(j)}$. Предположим, что при всех $j = 1, \dots, \ell$ функции бесселева типа $\mathcal{J}_{\bar{V}^{(j)}}^1(y)$ и $\mathcal{J}_{\bar{V}^{(j)}}^2(y)$ не имеют нулей в $I^{(j)}$. Тогда для всех $z_0 \in \mathbf{H}$ процесс Θ_{z_0} является невозвратным и выполняются свойства (2.4), (2.5).

В теореме 3.Б мы используем понятие орисферо-геодезического параллелепипеда (ОГП) и ОГП-миноранты $(\lambda^-(z), P^-(z))$. Прежде всего определим геодезический конус $\mathbf{G}_{w,D}$ с полюсом в $w \in \partial \mathbf{H}$ и базой $D \subset \partial \mathbf{H} \setminus \{w\}$, где D — открытый $(d-1)$ -мерный куб (в стереографической проекции). Конус $\mathbf{G}_{w,D}$ состоит из всех геодезических γ из пучка $\mathfrak{G}_w^-$, которые пересекают $\partial \mathbf{H}$ в точках $\tilde{w} \in D$. Определим ОГП (с полюсом w и базой D) как множество $\Pi \subset \mathbf{H}$ между двумя различными орисферами $\mathbf{S}_w^{(1)}$ и $\mathbf{S}_w^{(2)}$ с полюсом $w \in \partial \mathbf{H}$, которое является пересечением соответствующего орисферического слоя $\mathbf{L}_w^{(1)}$ и геодезического конуса $\mathbf{G}_{w,D}$. См. рис. 5.

Рис. 5

Далее ОГП-пара (для ОГП Π) — это пара $(\lambda(z), P(z))$ такая, что функция $\lambda(z)$ и распределение вероятности $P(z)$ остаются постоянными на Π и на дополнении $\bar{\mathbf{H}} \setminus \Pi$. Иными словами, $\lambda(z) = \lambda_{\text{in}}$ и $P(z) = P_{\text{in}}$ при $z \in \Pi$ и $\lambda(z) = \lambda_{\text{out}}$ и $P(z) = P_{\text{out}}$ при $z \in \bar{\mathbf{H}} \setminus \Pi$, где λ_{in} и λ_{out} — две заданные константы, а P_{in} и P_{out} — два заданных распределения вероятностей.

Наконец, ОГП-пара $(\underline{\lambda}(z), \underline{P}(z))$ называется ОГП-минорантой для пары $(\lambda(z), P(z))$, если $\underline{\lambda}(z) \leq \lambda(z)$ и $\underline{P}(z) \preceq P(z)$ для любого $z \in \bar{\mathbf{H}}$. Другими словами, $\underline{\lambda}_{\text{in}} \leq \lambda(z)$ и $\underline{P}_{\text{in}} \preceq P(z)$ при $z \in \Pi$, и $\underline{\lambda}_{\text{out}} \leq \lambda(z)$ и $\underline{P}_{\text{out}} \preceq P(z)$ при $z \in \bar{\mathbf{H}} \setminus \Pi$. Для определенности будем говорить, что $(\underline{\lambda}(z), \underline{P}(z))$ является ОГП-минорантой на ОГП Π с полюсом w .

Теорема 3.Б. В случае 2Б предположим, что пара $(\lambda(z), P(z))$ допускает ОГП-миноранту $(\underline{\lambda}(z), \underline{P}(z))$ на ОГП Π с полюсом $\underline{w} \in \partial\mathbf{H}$. Положим $\underline{\kappa}_{\text{in}} = \sum_k \kappa p_k(z)$ и $\underline{V}_{\text{in}} = 2\underline{\lambda}_{\text{in}}(\underline{\kappa}_{\text{in}} - 1)$ и предположим, что $\underline{V}_{\text{in}} > \frac{1}{8}(d-1)^2$ (см. рис. 6). Положим также

$$\underline{\nu}_{\text{in}} = \sqrt{\underline{V}_{\text{in}} - \frac{1}{8}(d-1)^2}.$$

Далее, зафиксируем геодезическую линию $\gamma \in \mathfrak{G}_{\underline{w}}^-$ с $\gamma \cap \Pi \neq \emptyset$ и, как и в теореме 3.А, рассмотрим каноническую координату на γ . Пусть $I^{(1)}$ — это интервал прямой $\mathbf{R}$, соответствующий пересечению γ и Π . Предположим, что каждая из функций бесселева типа $\mathcal{J}_{\underline{\nu}_{\text{in}}}^1(y)$ и $\mathcal{J}_{\underline{\nu}_{\text{in}}}^2(y)$ имеет по меньшей мере два нуля в $I^{(1)}$. Тогда для каждого $z_0 \in \bar{\mathbf{H}}$ справедлива оценка (2.6). Более того, как и в теоремах 1.А и 2.Б, если $\mathbb{P}_{\bar{z}^0}\{\Lambda_{\bar{z}^0} = \partial\mathbf{H}\} = 1$ для некоторого $\bar{z}^0 \in \mathbf{H}$, то для любого $z_0 \in \mathbf{H}$ процесс Θ_{z_0} возратен и $\mathbb{P}_{z_0}\{\Lambda_{z_0} = \partial\mathbf{H}\} = 1$.

Рис. 6

З а м е ч а н и е 2.1. В отличие от теоремы 3.А, теорема 3.Б применима и в случае неограниченного ЛПВ $V(z)$.

З а м е ч а н и е 2.2. Как отмечалось ранее, теоремы 3.А и 3.Б остаются справедливыми, когда начало отсчета, определяющее канонические координаты на геодезических линиях, переносится из 0 в произвольную точку $z^* \in \mathbf{H}$. Другими словами, в теореме 3.Б играет роль только положение интервалов $I^{(1)}, \dots, I^{(\ell)}$ относительно друг друга.

3. Логарифмические асимптотики решений эллиптических уравнений с частными производными и связанных с ними задач Штурма–Лиувилля. Доказательство оценки (2.5) основано на следующем аналитическом результате.

Лемма 3.1. Пусть $B = (-l, +\infty) \times D \subset \mathbf{R}^d$ — полубесконечная призма в $\mathbf{R}^d$, где D — открытый куб в $\mathbf{R}^{d-1}$:

$$D = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_{d-1}) : |x_1| < \kappa, \dots, |x_{d-1}| < \kappa\}. \quad (3.1a)$$

Зафиксируем $b > 0$ и зададим функцию

$$\phi(\underline{x}) = \prod_{j=1}^{d-1} \cos\left(\frac{\pi}{2\kappa} x_j\right), \quad \underline{x} = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in D. \quad (3.1b)$$

Рассмотрим следующую эллиптическую граничную задачу для функции $B \ni (y, \underline{x}) \mapsto u(y, \underline{x})$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, \underline{x}) + e^{2by} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(y, \underline{x}) \right] \\ & - \frac{d-1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}(y, \underline{x}) + v(y) u(y, \underline{x}) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

с граничным условием

$$u(y, \underline{x})|_{\underline{x} \in \partial D} = 0 \quad (3.3)$$

и потенциалом v вида

$$v(y) = \begin{cases} v_0, & -l < y < \ln a, \\ v_1, & y \geq \ln a, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $a > e^{-l}$ и

$$0 \leq v_0, v_1 \leq \frac{(d-1)^2}{8}. \quad (3.5)$$

Наконец, пусть $u^0(y; \underline{x}) (= u_{l, \kappa, a, b, v_0, v_1}^0(y; \underline{x}))$ обозначает минимальное положительное решение задачи (3.2)–(3.4). Тогда для всех $y \in \mathbf{R}$ и $\underline{x} \in D$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln u^0(y; \underline{x})}{l} = \frac{d-1}{2} - \sqrt{\frac{(d-1)^2}{4} - 2v_0}. \quad (3.6)$$

Лемма 3.2. В условиях леммы 3.1 предположим, что вместо (3.5) справедливо неравенство

$$\max[v_0, v_1] > \frac{(d-1)^2}{8}. \quad (3.7)$$

Тогда для всех достаточно больших l задача (3.2)–(3.4) не имеет положительных решений.

Лемма 3.3. Рассмотрим случай, где $V_b^+ < V_{gl}^+ \leq \frac{1}{8}(d-1)^2$. Обозначим $w^0(y)$ минимальное положительное решение следующей задачи на $(-l, \infty)$:

$$\frac{1}{2} w''(y) - \frac{(d-1)}{2} w'(y) + v(y)w(y) = 0 \quad (3.8)$$

с граничным условием

$$w(-l) = 1. \quad (3.9)$$

Предположим, что

$$v(y) = \begin{cases} V_b^+ + \varepsilon, & -l < y < \ln a, \\ V_{gl}^+, & y \geq \ln a, \end{cases}$$

где $a > e^{-l}$. Тогда для любого $y \in \mathbf{R}$ и при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln w^0(y)}{l} = \frac{d-1}{2} - \sqrt{\frac{(d-1)^2}{4} - 2(V_b^+ + \varepsilon)}. \quad (3.10)$$

З а м е ч а н и е 3.1. Задача (3.8)–(3.9) может рассматриваться как аналог задачи Штурма–Лиувилля с условием минимальности, играющим роль второго граничного условия.

Лемма 3.4. Рассмотрим задачу (3.8)–(3.9), где потенциал $v(y)$ принимает $\ell + 1$ значение, $\ell \geq 1$. Более точно, пусть $e^{-l} < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_{\ell-1} < b_{\ell-1}$. Положим

$$v(y) = \begin{cases} V_b^+ + \varepsilon, & -l < y < \ln a_1, \\ \frac{(d-1)^2}{8}, & \ln a_j \leq y < \ln b_j, \quad j = 1, \dots, \ell-1, \\ V_j^+, & \ln b_j \leq y < \ln a_{j+1}, \quad j = 1, \dots, \ell-2, \\ \frac{(d-1)^2}{8}, & y > \ln b_{\ell-1}, \end{cases} \quad (3.11)$$

где $V_b^+ + \varepsilon \leq \frac{1}{8}(d-1)^2 \leq V_j^+$, $j = 1, \dots, \ell-1$. Предположим, что интервал $(\ln b_j, \ln a_{j+1})$ не пересекается с объединением $\mathcal{O}_{\bar{\nu}_j}^{(1)} \cup \mathcal{O}_{\bar{\nu}_j}^{(2)}$. Здесь $\mathcal{O}_{\bar{\nu}_j}^{(1)}$ и $\mathcal{O}_{\bar{\nu}_j}^{(2)}$ — множества вещественных нулей функций Бесселя типа $\mathcal{J}_{\bar{\nu}_j}^1(y) = J_{i\bar{\nu}_j}^{(1)}(iy)$ и $\mathcal{J}_{\bar{\nu}_j}^2(y) = J_{i\bar{\nu}_j}^{(2)}(iy)$ с индексом $\bar{\nu}_j$, $j = 1, \dots, \ell-1$ соответственно, где

$$\bar{\nu}_j = \sqrt{V_j^+ - \frac{(d-1)^2}{8}}. \quad (3.12)$$

Тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln w^0(y)}{l} = \frac{d-1}{2} - \sqrt{\frac{(d-1)^2}{4} - 2(V_b^+ + \varepsilon)}. \quad (3.13)$$

для всех $y \in \mathbf{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Лемма 3.5. Рассмотрим задачу (3.2)–(3.4) с потенциалом $v(y) = v(y, \underline{x})$ вида

$$v(y) = \begin{cases} V_b^+ - \varepsilon, & -l < y < \ln a, \\ 0, & \ln a \leq y < \ln b, \\ V_{\text{gl}}^+ - \varepsilon, & \ln b \leq y < \ln c, \\ 0, & y \geq \ln c, \end{cases} \quad (3.14)$$

где $V_b^+ \leq \frac{1}{8}(d-1)^2 < V_{\text{gl}}^+$. Предположим, что интервал $(\ln b, \ln c)$ содержит пару последовательных нулей каждой из функций Бесселя типа $\mathcal{J}_{\underline{\nu}}^1(y) = J_{i\underline{\nu}}^{(1)}(iy)$ и $\mathcal{J}_{\underline{\nu}}^2(y) = J_{i\underline{\nu}}^{(2)}(iy)$ с индексом

$$\underline{\nu} (= \underline{\nu}(\varepsilon)) = \sqrt{V_{\text{gl}}^+ - \varepsilon - \frac{(d-1)^2}{8}}. \quad (3.15)$$

Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого l задача (3.2)–(3.4) с потенциалом вида (3.14) не имеет неотрицательных решений. Более того, задача (3.8)–(3.9) с потенциалом (3.14) также не имеет неотрицательных решений при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и достаточно больших l .

Доказательства лемм 3.1–3.5 аналогичны друг другу. По этой причине мы разберем в деталях только доказательство леммы 3.1, после чего прокомментируем изменения, которые потребуются для доказательства леммы 3.2. Тогда изменения, необходимые для доказательства других лемм, станут очевидными.

Доказательство леммы 3.1. Будем искать решение в виде

$$u(y; \underline{x}) = w(y) e^{(d-1)y/2} \prod_{j=1}^{d-1} \cos\left(\frac{\pi}{2\kappa} x_j\right). \quad (3.16)$$

Тогда для функции $w(y)$ мы получим задачу

$$\frac{1}{2} w''(y) + \left[v(y) - \frac{(d-1)^2}{8} - \frac{\pi^2(d-1)}{8\kappa^2} e^{2by} \right] w(y) = 0, \quad y > -l, \quad (3.17)$$

с граничным условием

$$w(-l) = 1. \quad (3.18)$$

Затем, переходя к экспоненциальной шкале по y , где

$$t = \frac{\pi\sqrt{d-1}}{2b\kappa} e^{by}, \quad g(t) = w(y), \quad (3.19)$$

получаем уравнение

$$t^2 g''(t) + t g'(t) - \left[b^{-2} \nu^2(y(t)) + t^2 \right] g(t) = 0, \quad t > \frac{\pi\sqrt{d-1}}{2b\kappa} e^{-bl}, \quad (3.20)$$

с граничным условием

$$g\left(\frac{\pi\sqrt{d-1}}{2b\kappa} e^{-bl}\right) = e^{(d-1)l/2}. \quad (3.21)$$

Функция $\nu^2(\tau)$ задается соотношением

$$\nu^2(\tau) = \frac{(d-1)^2}{4} - 2v(y(\tau)), \quad \tau \in \mathbf{R}, \quad (3.22)$$

где $y(\tau) = b^{-1}[\ln(b\tau) - \ln(\pi\sqrt{d-1}/(2\kappa))]$. Это завершает подготовительный этап доказательства леммы 3.1.

Теперь мы воспользуемся предположением, что v принимает два значения, см. (3.4). Таким образом, вместо (3.20) возникают два уравнения

$$t^2 g''(t) + t g'(t) - [b^{-2} \nu_0^2 + t^2] g(t) = 0, \quad \frac{\pi\sqrt{d-1}}{2b\kappa} e^{-bl} < t < \frac{\pi\sqrt{d-1}a^b}{2b\kappa} \quad (3.23)$$

и

$$t^2 g''(t) + t g'(t) - [b^{-2} \nu_1^2 + t^2] g(t) = 0, \quad (3.24)$$

$$t \geq \frac{\pi \sqrt{d-1} a^b}{2b\kappa}.$$

Здесь

$$\nu_0^2 = \frac{(d-1)^2}{4} - 2\nu_0, \quad \nu_1^2 = \frac{(d-1)^2}{4} - 2\nu_1. \quad (3.25)$$

Каждое из уравнений (3.23) и (3.24) есть хорошо известное дифференциальное уравнение Кельвина (Томсона) с индексами $\nu_0 > 0$ и $\nu_1 > 0$ соответственно (см. [6, с. 77]). Общие решения уравнений (3.23) и (3.24) имеют вид

$$g_0(t) = C_0 K_{\nu_0/b}^{(1)}(t) + D_0 K_{\nu_0/b}^{(2)}(t), \quad g_1(t) = C_1 K_{\nu_1/b}^{(1)}(t) + D_1 K_{\nu_1/b}^{(2)}(t) \quad (3.26)$$

соответственно, здесь $K_\nu^{(1)}$ и $K_\nu^{(2)}$ обозначают функции Кельвина индекса ν и рода 1 и 2 соответственно, а C_0, D_0, C_1 и D_1 суть произвольные константы.

Хорошо известно, что при $t \rightarrow 0+$ функция $K_\nu^{(1)}(t)$ стремится к нулю, а функция $K_\nu^{(2)}(t)$ имеет двойственную сингулярность:

$$K_\nu^{(1)}(t) \sim \alpha_\nu^{(1)} t^\nu, \quad K_\nu^{(2)}(t) \sim \frac{\alpha_\nu^{(2)}}{t^\nu}, \quad (3.27)$$

где $\alpha_\nu^{(1)}$ и $\alpha_\nu^{(2)}$ — некоторые (известные) положительные константы. Таким образом, произвольное решение уравнения (3.20) в случае потенциала v , принимающего два значения v_0 и v_1 , получается с помощью условий «склейки» функций (3.26) в точке $t = \pi \sqrt{d-1} a^b / (2b\kappa)$ (нам необходимо гарантировать непрерывность решения и его производной). Это дает два уравнения на параметры C_0, D_0, C_1 и D_1 , что отвечает сокращению числа степеней свободы с четырех до двух.

Соответственно, общее решение уравнения (3.20) имеет вид

$$w(y; p) = C_0 e^{(d-1)y/2} K_{\nu_0/b}^{(1)} \left(p \frac{e^{by}}{b} \right) + D_0 e^{(d-1)y/2} K_{\nu_0/b}^{(2)} \left(p \frac{e^{by}}{b} \right) \quad \text{при } -l < y < \ln a, \quad (3.28)$$

$$w(y; p) = C_1 e^{(d-1)y/2} K_{\nu_1/b}^{(1)} \left(p \frac{e^{by}}{b} \right) + D_1 e^{(d-1)y/2} K_{\nu_1/b}^{(2)} \left(p \frac{e^{by}}{b} \right) \quad \text{при } \ln a < y.$$

Здесь $p = \pi \sqrt{d-1} / (2\kappa)$, а $C_0(p), D_0(p), C_1(p)$ и $D_1(p)$ выбираются так, чтобы функция $w(y)$ принадлежала классу C^1 при $y = \ln a$.

Теперь напомним, что мы ищем минимальное положительное решение задачи (3.2)–(3.4). Отсюда немедленно следует, что $C_1 = 0$. Остается найти C_0 , D_0 и D_1 из трех линейных уравнений

$$C_0 K_{\nu_0/b}^{(1)} \left(p \frac{a^b}{b} \right) + D_0 K_{\nu_0/b}^{(2)} \left(p \frac{a^b}{b} \right) = D_1 K_{\nu_1/b}^{(2)} \left(p \frac{a^b}{b} \right), \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} & C_0 \left[K_{\nu_0/b-1}^{(1)} \left(p \frac{a^b}{b} \right) - K_{\nu_0/b+1}^{(1)} \left(p \frac{a^b}{b} \right) \right] \\ & + D_0 \left[K_{\nu_0/b-1}^{(2)} \left(p \frac{a^b}{b} \right) - K_{\nu_0/b+1}^{(2)} \left(p \frac{a^b}{b} \right) \right] \\ & = D_1 \left[K_{\nu_1/b-1}^{(2)} \left(p \frac{a^b}{b} \right) - K_{\nu_1/b+1}^{(2)} \left(p \frac{a^b}{b} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

и

$$C_0 K_{\nu_0/b}^{(1)} \left(\frac{p}{b} e^{-bl} \right) + D_0 K_{\nu_0/b}^{(2)} \left(\frac{p}{b} e^{-bl} \right) = e^{(d-1)l/2}. \quad (3.31)$$

Отсюда получаем:

$$D_0 = e^{(d-1)l/2} \left[\widehat{K}_{20} + \widehat{K}_{10} \frac{(K_{20}^{\text{left}} - K_{20}^{\text{right}})K_{21} - K_{20}(K_{21}^{\text{left}} - K_{21}^{\text{right}})}{K_{10}(K_{21}^{\text{left}} - K_{21}^{\text{right}}) - K_{21}(K_{10}^{\text{left}} - K_{10}^{\text{right}})} \right]^{-1}, \quad (3.32)$$

$$C_0 = D_0(p) \frac{(K_{20}^{\text{left}} - K_{20}^{\text{right}})K_{21} - (K_{21}^{\text{left}} - K_{21}^{\text{right}})K_{20}}{(K_{21}^{\text{left}} - K_{21}^{\text{right}})K_{10} - (K_{10}^{\text{left}} - K_{10}^{\text{right}})K_{21}} \quad (3.33)$$

и

$$D_1 = \frac{1}{K_{21}} (K_{20}D_0 + K_{10}C_0). \quad (3.34)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{20} &= K_{\nu_0/b}^{(2)} \left(\frac{p}{b} e^{-bl} \right), & \widehat{K}_{10} &= K_{\nu_0/b}^{(1)} \left(\frac{p}{b} e^{-bl} \right), \\ K_{20}^{\text{left}} &= K_{\nu_0/b-1}^{(2)} \left(p \frac{a^b}{b} \right), & K_{20}^{\text{right}} &= K_{\nu_0/b+1}^{(2)} \left(p \frac{a^b}{b} \right), \\ K_{21} &= K_{\nu_1/b}^{(2)} \left(p \frac{a^b}{b} \right), & K_{20} &= K_{\nu_0/b}^{(2)} \left(p \frac{a^b}{b} \right), \\ K_{21}^{\text{left}} &= K_{\nu_1/b-1}^{(2)} \left(p \frac{a^b}{b} \right), & K_{21}^{\text{right}} &= K_{\nu_1/b+1}^{(2)} \left(p \frac{a^b}{b} \right), \\ K_{10} &= K_{\nu_0/b}^{(1)} \left(p \frac{a^b}{b} \right), & K_{11} &= K_{\nu_1/b}^{(1)} \left(p \frac{a^b}{b} \right), \\ K_{11}^{\text{left}} &= K_{\nu_1/b-1}^{(1)} \left(p \frac{a^b}{b} \right), & K_{11}^{\text{right}} &= K_{\nu_1/b+1}^{(1)} \left(p \frac{a^b}{b} \right), \\ K_{10}^{\text{left}} &= K_{\nu_0/b-1}^{(1)} \left(p \frac{a^b}{b} \right), & K_{10}^{\text{right}} &= K_{\nu_0/b+1}^{(1)} \left(p \frac{a^b}{b} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Определив константы C_0 , D_0 и D_1 , мы можем задать функцию $w(y; p)$ класса C^1 по формулам (3.28). После этого минимальное положительное решение $u^0(y; \underline{x})$ задачи (3.2)–(3.4) находится с помощью (3.16).

Заключительная часть доказательства леммы 3.1 состоит в вычислении логарифмической асимптотики функции $u^0(y; \underline{x})$ при $l \rightarrow \infty$. Эта асимптотика непосредственным образом получается из приведенных выше явных формул. Лемма 3.1 доказана.

Доказательство леммы 3.2. Как отмечалось ранее, в доказательстве леммы 3.2 применимы те же аргументы, что и при доказательстве леммы 3.1. Единственное отличие состоит в том, что, скажем, при $v_0 > \frac{1}{8}(d-1)^2$ решение для $-l < y < \ln a$ представляется как линейная комбинация функций типа Бесселя $\mathcal{J}_{\nu_0/b}^1(y) = J_{i\nu_0/b}^{(1)}(iy)$ и $\mathcal{J}_{\nu_0/b}^2(y) = J_{i\nu_0/b}^{(2)}(iy)$ первого и второго рода с индексом ν_0/b , где $\nu_0^2 = v_0 - \frac{1}{8}(d-1)^2$, вместо соответствующих функций Кельвина. Тем самым, если l превосходит максимальное расстояние между нулями функций бесселева типа $\mathcal{J}_{\nu_0/b}^1(y)$ и $\mathcal{J}_{\nu_0/b}^2(y)$ с индексом ν_0/b , то любое решение осциллирует в направлении координаты y . Аналогичные аргументы применимы и в случае $v_1 > \frac{1}{8}(d-1)^2$. Лемма 3.2 доказана.

Изменения, необходимые для проведения доказательств лемм 3.3–3.5, теперь очевидны.

4. Вероятностная часть доказательств теорем.

Доказательство теоремы 1.А. Начнем с доказательства формулы (2.4). Мы построим две вспомогательные пары, одна из которых является мажорантой, а другая — минорантой для исходной пары $(\lambda(z), P(z))$. (Более точно, мы работаем с фиксированной мажорантой и семейством минорант, зависящих от параметра $\varepsilon > 0$.)

Мажорантная пара (λ^+, P^+) имеет постоянную интенсивность ветвления и фиксированное распределение числа потомков:

$$\lambda^+ = \lambda(w^+) \quad \text{и} \quad P^+ = P(w^+). \quad (4.1)$$

При заданной начальной точке $z_0 \in \mathbf{H}$ она порождает ОВДП $\Theta_{z_0}^+$ на $\mathbf{H}$, мажорирующий исходный процесс Θ_{z_0} . Легко видеть, что в случае 1А «верхний» процесс $\Theta_{z_0}^+$ является невозвратным. Таким образом, и процесс Θ_{z_0} является невозвратным при любой начальной точке $z_0 \in \mathbf{H}$.

Семейство минорант $(\lambda^{-, \text{ho}}(\varepsilon), P^{-, \text{ho}}(\varepsilon))$ строится следующим образом. При $\varepsilon \in (0, 1)$ мы полагаем: для любого $z \in \mathbf{H} \setminus \mathbf{B}(\mathbf{S}_{w(\varepsilon)})$

$$\begin{aligned} [\lambda^{-, \text{ho}}(\varepsilon)](z) &= \lambda(w^-)(1 - \varepsilon) \quad \text{и} \\ [p_k^{-, \text{ho}}(\varepsilon)](z) &= p_k(w^-)(1 - \varepsilon) \quad \forall k \geq 2 \end{aligned} \quad (4.2a)$$

и для любого $z \in \mathbf{B}(\mathbf{S}_{w(\varepsilon)})$

$$[\lambda^{-, \text{ho}}(\varepsilon)](z) = 0 \quad \text{и} \quad [p_k^{-, \text{ho}}(\varepsilon)](z) = 0 \quad \forall k \geq 2. \quad (4.2b)$$

Эти миноранты определены корректно в силу того, что w^- есть точка орисферического минимума. По ним строятся «нижние» ветвящиеся диффузионные процессы $\Theta_{z_0}^{-, \text{ho}}(\varepsilon)$, являющиеся НВДП на $\mathbf{H}$.

Для верхних и нижних процессов справедливы очевидные соотношения

$$\mathbb{P}_{z_0}^{\text{joint}}(\Lambda_{z_0}^{-, \text{ho}}(\varepsilon) \subseteq \Lambda_{z_0} \subseteq \Lambda_{z_0}^+) = 1, \quad (4.3)$$

из которых вытекает, что

$$\mathbb{P}_{z_0}^{\text{joint}}(h^{-, \text{ho}}(z_0; \varepsilon) \leq h(z_0) \leq h^+) = 1. \quad (4.4)$$

Здесь $\mathbb{P}_{z_0}^{\text{joint}}$ обозначает совместное распределение процессов $\Theta_{z_0}^{-, \text{ho}}(\varepsilon)$, Θ_{z_0} и $\Theta_{z_0}^+$, возникающее при их очевидной склейке. Далее, $\Lambda_{z_0}^{-, \text{ho}}(\varepsilon) \subset \partial \mathbf{H}$ — это предельное множество для $\Theta_{z_0}^{-, \text{ho}}(\varepsilon)$, Λ_{z_0} — предельное множество для исходного процесса Θ_{z_0} , а $\Lambda_{z_0}^+$ — предельное множество для процесса $\Theta_{z_0}^+$. Соответственно $h^{-, \text{ho}}(z_0; \varepsilon)$, $h(z_0)$ и h^+ мы обозначаем их хаусдорфовы размерности. Мы знаем, что

$$h^+ = \begin{cases} \frac{1}{2} [d - 1 - \sqrt{(d - 1)^2 - 8V_b^+}] & \text{в случае 1A,} \\ d - 1 & \text{в случае 1B.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Формула (2.4) есть следствие вышеприведенной конструкции. Действительно, в случае 1A

$$\mathbb{P}_{z_0} \left\{ h(z_0) \leq \frac{1}{2} [d - 1 - \sqrt{(d - 1)^2 - 8V_b^+}] \right\} = 1.$$

С другой стороны, к процессу $\Theta_{z_0}^{-, \text{ho}}(\varepsilon)$ применимы результаты работы [4], откуда вытекает, что

$$\mathbb{P}_{z_0} \left\{ \frac{1}{2} [d - 1 - \sqrt{(d - 1)^2 - 8V_b^-(1 - \varepsilon)^2}] = h^{-, \text{ho}}(z_0; \varepsilon) \right\} = 1. \quad (4.6)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\mathbb{P}_{z_0} \left\{ \frac{1}{2} [d - 1 - \sqrt{(d - 1)^2 - 8V_b^-}] \leq h(z_0) \right\} = 1,$$

что завершает вывод формулы (2.4).

Для проверки соотношения (2.5) используется еще одно семейство минорант $(\lambda^-(z_0; \varepsilon), P^-(z_0; \varepsilon))$, зависящих от $\varepsilon > 0$ и начальной точки z_0 . Эти миноранты строятся следующим образом. Введем понятие орисферо-геодезической трубки (ОГТ), прилегающей к точке w^+ . Для этого выберем точку $w' \in \partial \mathbf{H}$, $w' \neq w^+$, и открытый $(d - 1)$ -мерный куб $D \subset \partial \mathbf{H} \setminus \{w'\}$. Как и выше, рассмотрим конус $\mathbf{G}_{w', D}$ и орисферу $\mathbf{S}_{w'} \in \mathfrak{G}_{w'}^-$. ОГТ, прилегающая к w^+ (и с полюсом w' и базой D), определяется как теоретико-множественная разность $\mathbf{G}_{w', D} \setminus \mathbf{B}(\mathbf{S}_{w'})$.

Далее, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ рассмотрим ОГТ $\Gamma(z_0; \varepsilon)$, прилегающую к w^+ , содержащую точку z_0 и такую, что для любого $z \in \Gamma(z_0; \varepsilon)$

$$\lambda(z) \geq \lambda(w^+)(1 - \varepsilon) \quad \text{и} \quad p_k(z) \geq p_k(w^+)(1 - \varepsilon) \quad \forall k \geq 2. \quad (4.7)$$

Затем положим для любого $z \in \Gamma(z_0; \varepsilon)$

$$\begin{aligned} [\lambda^-(z_0; \varepsilon)](z) &= \lambda(w^+)(1 - \varepsilon) \quad \text{и} \\ [p_k^-(z_0; \varepsilon)](z) &= p_k(w^+)(1 - \varepsilon) \quad \forall k \geq 2 \end{aligned} \quad (4.8a)$$

и для любого $z \in \mathbf{G}_{w', D} \setminus \Gamma(z_0; \varepsilon)$

$$[\lambda^-(z_0; \varepsilon)](z) = 0 \quad \text{и} \quad [p_k^-(z_0; \varepsilon)](z) = 0 \quad \forall k \geq 2. \quad (4.8b)$$

См. рис. 7.

Рис. 7

Отметим, что база D трубки $\Gamma(z_0; \varepsilon)$ выбирается в зависимости от ε , тогда как полюс w' выбирается в зависимости от z_0 и ε .

Миноранта $(\lambda^-(z_0; \varepsilon), P^-(z_0; \varepsilon))$ порождает нижний НВДП $\Theta_{z_0}^-(\varepsilon)$. Процесс $\Theta_{z_0}^-(\varepsilon)$ «живет» во внутренности конуса $\mathbf{G}_{w', D}$; частицы, достигающие границы $\partial \mathbf{G}_{w', D}$, «замораживаются» навсегда. (Это означает, что генератор $-\Delta/2$ индивидуального диффузионного движения частицы включает условие Дирихле на $\partial \mathbf{G}_{w', D}$.) Как и в (4.3), (4.4), мы получаем, что

$$\mathbb{P}_{z_0}^{\text{joint}} \{ \Lambda_{z_0}^-(\varepsilon) \subseteq \Lambda_{z_0} \} = 1, \quad (4.9a)$$

откуда

$$\mathbb{P}_{z_0}^{\text{joint}} (h^-(z_0; \varepsilon) \leq h(z_0)) = 1. \quad (4.9b)$$

Здесь $\mathbb{P}_{z_0}^{\text{joint}}$ обозначает совместное распределение процессов $\Theta_{z_0}^-(\varepsilon)$ и Θ_{z_0} , $\Lambda_{z_0}^-(\varepsilon)$ — предельное множество для $\Theta_{z_0}^-(\varepsilon)$, а $h^-(z_0; \varepsilon)$ — его хаусдорфову размерность.

Чтобы упростить изложение, мы будем часто опускать аргумент или индекс z_0 , а также аргумент ε в обозначениях $\Theta_{z_0}^-(\varepsilon)$, $\Lambda_{z_0}^-(\varepsilon)$ и $h^-(z_0; \varepsilon)$. Наша цель здесь — проверить, что в случае 1А для любого $z_0 \in \mathbf{H}$ существуют $\varepsilon^0 = \varepsilon^0(z_0) > 0$ и $c = c(z_0) \in (0, 1)$ такие, что для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$

$$\mathbb{P}_{z_0} \left\{ h^-(z_0; \varepsilon) \geq \frac{1}{2} \left[d - 1 - \sqrt{(d-1)^2 - 8V_b^+(1-\varepsilon)^2} \right] \right\} \geq c. \quad (4.10)$$

Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем (2.5).

Ключевым шагом в доказательстве неравенства (4.10) является приводимая ниже лемма 4.1. При заданном $l > 0$ рассмотрим модификацию $\hat{\Theta}^-(l)$ нижнего процесса Θ^- . А именно, выберем некоторую геодезическую γ из пучка $\mathfrak{G}_{w'}$, (т.е. исходящую из w'). Рассмотрим орисферу $\mathbf{S}(l) = \mathbf{S}_{w'}(l)$ такую, что точка пересечения γ и $\mathbf{S}(l)$ соответствует точке l на $\mathbf{R}$ при каноническом изометрии. Возьмем l достаточно большим — таким, чтобы z_0 попадало в оришар $\mathbf{B}(\mathbf{S}(l))$. В модифицированном процессе $\hat{\Theta}^-(l)$ частицы замораживаются на $(d-1)$ -мерном кубе $\mathbf{G}_{w',D} \cap \mathbf{S}(l)$; см. рис. 7. Как и в [5, предложение 1], нас интересует среднее число $\hat{n}_l^-(z_0)$ частиц, достигающих $\mathbf{G}_{w',D} \cap \mathbf{S}(l)$ в процессе $\hat{\Theta}^-(l)$ на бесконечном интервале времени:

$$\hat{n}_l^-(z_0) = \mathbb{E}_{z_0} \left(\text{число частиц в } \hat{\Theta}^-(l), \text{ замороженных на } \mathbf{G}_{w',D} \cap \mathbf{S}(l) \right). \quad (4.11)$$

Мы утверждаем, что при достаточно малом $\varkappa > 0$

$$\hat{n}_l^-(z_0) \geq u_1^0(z_0), \quad z_0 \in \mathbf{G}_{w',D}, \quad (4.12)$$

где функция $z_0 \mapsto u_1^0(z_0)$ дает минимальное положительное решение задачи (3.2)–(3.4) в открытой области $B = B_\varkappa$ из леммы 3.1 (при соответствующей идентификации $z_0 \mapsto (y, \underline{x})$). См. (3.1a). Это утверждение справедливо, поскольку $u_1^0(z_0)$ задает среднее число частиц, замороженных на $D = D_\varkappa$, которые принимаются во внимание с вероятностями $\phi(x)$; см. (3.1b). В свою очередь, из последнего факта и леммы 3.1 вытекает, что

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \ln \hat{n}_l^-(z_0) \geq \frac{1}{2} \left[d - 1 - \sqrt{(d-1)^2 - 8V_b^+(1-\varepsilon)^2} \right]. \quad (4.13)$$

Приводимые ниже леммы 4.1 и 4.2 по существу мало отличаются от аналогичных утверждений из [5]. Ввиду этого, мы ограничимся набросками их доказательств.

Лемма 4.1. *При достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует константа $c_1 = c_1(z_0, \varepsilon) \in (0, 1)$ такая, что хаусдорфова размерность $h^-(z_0, \varepsilon)$ в процессе $\Theta_{z_0}^-(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству*

$$\mathbb{P}_{z_0} \left\{ h^-(z_0, \varepsilon) \geq \liminf_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \ln \hat{n}_l^-(z_0) - \varepsilon \right\} \geq c_1. \quad (4.14)$$

Доказательство леммы 4.1. Равенство (4.14) вытекает из леммы 3.1 и того факта, что $\hat{n}_l^-(z_0) \geq u_1^0(z_0)$, $z_0 \in \mathbf{G}_{w',D}$, где $z_0 \mapsto u_1^0(z_0)$ дает минимальное положительное решение задачи (3.2)–(3.4) (с идентификацией $z_0 \rightleftharpoons (y, \underline{x})$). Доказательство основано на конструкции замороженных/размороженных частиц, достигающих $(d-1)$ -мерного куба $\mathbf{G}_{w',D} \cap \mathbf{S}(l)$, которая описана в разделе 5 работы [5] (см. также раздел 5 работы [3]). Здесь требуется очевидная модификация, так как наши ВДП $\hat{\Theta}^-$ и $\hat{\Theta}^-(l)$ могут вырождаться. Поэтому события вероятности 1, возникающие в [5], заменяются событиями положительной вероятности. Заметим, что, как и в [5] и [3], ключевую роль в этой конструкции играет лемма Фростмана.

Доказательство теоремы 1.Б. Основу доказательства составляет следующее свойство процесса Θ_{z_0} :

$$\mathbb{P}_{z_0} \left\{ \text{существует компактная область } O \subset \mathbf{H}, \text{ посещаемая процессом } \Theta_{z_0} \text{ в как угодно большие моменты времени} \right\} > 0. \quad (4.15)$$

Вывести равенство (2.6) из (4.15) можно, следуя аргументам, использованным в [5] (см. [5, предложения 9 и 10 и следствие 6]).

Более точно, при выполнении события в левой части (4.15) каждая точка $w \in \partial \mathbf{H}$ принадлежит множеству Λ_{z_0} . В самом деле, вероятность достичь произвольной окрестности данной точки $w \in \partial \mathbf{H}$ из O положительна. При условии, что точки процесса $\Theta_{z_0}^-$ посещают область O в сколь угодно большие времена, будет предпринято счетное число таких попыток, и хотя бы одна из них окажется удачной.

Чтобы проверить равенства (4.15), мы вновь используем нижний ВДП $\Theta_{z_0}^-(\varepsilon)$ и его модификацию $\hat{\Theta}^-(l)$ (см. выше), где $\varepsilon > 0$ выбирается так, что

$$V_b^+(1 - \varepsilon)^2 > \frac{(d-1)^2}{8}. \quad (4.16)$$

Равенство (4.15) легко вывести из следующей леммы.

Лемма 4.2. При любом $z_0 \in \mathbf{H}$ существуют $\varepsilon > 0$ и геодезический конус $\mathbf{G}_{w',D}$ такие, что а) выполняется оценка (4.16), б) $z_0 \in \mathbf{G}_{w',D}$, в) выполняются оценки (4.7) и г) ВДП $\Theta_{z_0}^-(\varepsilon)$, отвечающий паре $(\lambda^-(z_0; \varepsilon), P^-(z_0; \varepsilon))$ (см. (4.8a)), (4.8b)), удовлетворяет условию

$$\mathbb{P}_{z_0} \left\{ \text{существует компакт } O \subset \mathbf{G}_{w',D}, \text{ посещаемый процессом } \Theta_{z_0}^-(\varepsilon) \text{ в сколь угодно большие времена} \right\} > 0. \quad (4.17)$$

Доказательство леммы 4.2. Доказательство основывается на следующих наблюдениях 1)–5).

1) Свойства а), б) и в) вытекают из предположений теоремы 1.Б.

В оставшейся части доказательства мы анализируем свойства нижнего ВДП $\Theta^- = \Theta_{z_0}^-(\varepsilon)$ и его модификации $\hat{\Theta}^-(l)$.

2) В соответствии с леммой 3.2, для любого $\kappa > 0$ задача (3.2)–(3.4) с $v_0 = V_b^+(1 - \varepsilon)^2$ и $v_1 = 0$ при достаточно больших l (зависящих от ε и κ) не имеет положительного решения.

3) Таким образом, в модифицированном процессе $\hat{\Theta}^-(l)$ при достаточно больших l среднее число $\hat{n}_l^-(z_0)$ частиц, замороженных на орисфере $\mathbf{S}(l)$, равно $+\infty$.

4) Тем самым, в процессе Θ^- при любом выборе его параметров среднее число $n_{\varepsilon, \kappa, l}^-$ частиц, достигающих $\mathbf{S}_l$, равно $+\infty$, снова при достаточно больших l .

5) Отсюда вытекает, что существует компакт $O \subset \mathbf{G}_{w, D}$ такой, что выполняется (4.15). Доказательство последнего факта повторяет аргументы, используемые в доказательстве следствия 3 из [5]. Лемма 4.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.A. В этом доказательстве используется новое семейство мажорант $(\lambda^{+, \text{ho}}(\varepsilon), P^{+, \text{ho}}(\varepsilon))$ для пары (λ, P) . Эти мажоранты строятся следующим образом. Во-первых, ограничимся значениями ε такими, что

$$V_{\text{gl}}^+(1 + \varepsilon)^2 < \frac{(d-1)^2}{8}, \quad \varepsilon < \min \left[\frac{p_{k^+}(z^+)}{1 - p_{k^+}(z^+)}, \frac{p_{\bar{k}^+}(w^+)}{1 - p_{\bar{k}^+}(w^+)} \right]. \quad (4.18)$$

Здесь $k^+ = \min[k: p_k(z^+) > 0]$ и $\bar{k}^+ = \min[k: p_k(w^+) > 0]$.

Далее, используя тот факт, что точка w^+ является орисферическим максимумом, для данного ε мы выберем точку $w(\varepsilon) \in \partial \mathbf{H}$ и орисферу $\mathbf{S}_{w(\varepsilon)} \in \mathfrak{G}_{w(\varepsilon)}^-$ с полюсом $w(\varepsilon)$ такие, что для любого $z \in \mathbf{H} \setminus \mathbf{B}(\mathbf{S}_{w(\varepsilon)})$

$$\lambda(z) \leq \lambda(w^+)(1 + \varepsilon) \quad \text{и} \quad p_k(z) \leq p_k(w^+)(1 + \varepsilon) \quad \forall k \geq 2. \quad (4.19)$$

Наконец, положим для любого $z \in \mathbf{B}(\mathbf{S}_{w(\varepsilon)})$

$$\begin{aligned} [\lambda^{+, \text{ho}}(\varepsilon)](z) &= \lambda(z^+)(1 + \varepsilon) \quad \text{и} \\ [p_k^{+, \text{ho}}(\varepsilon)](z) &= p_k(z^+)(1 + \varepsilon) \quad \forall k > k^+ \end{aligned} \quad (4.20a)$$

и для любого $z \in \mathbf{H} \setminus \mathbf{B}(\mathbf{S}_{w(\varepsilon)})$

$$\begin{aligned} [\lambda^{+, \text{ho}}(\varepsilon)](z) &= \lambda(w^+)(1 + \varepsilon) \quad \text{и} \\ [p_k^{+, \text{ho}}(\varepsilon)](z) &= p_k(w^+)(1 + \varepsilon) \quad \forall k > \bar{k}^+. \end{aligned} \quad (4.20b)$$

Мажоранта $(\lambda^{+, \text{ho}}(\varepsilon), P^{+, \text{ho}}(\varepsilon))$ порождает верхний процесс $\Theta_{z_0}^{+, \text{ho}}(\varepsilon)$, к которому применимы методы и результаты работы [4]. Из них вытекает невозвратность процесса $\Theta_{z_0}^{+, \text{ho}}(\varepsilon)$ и, следовательно, невозвратность исходного ВДП Θ_{z_0} .

Далее, используя тот факт, что точка w^- является орисферическим минимумом, мы задаем семейство минорирующих пар $(\lambda^{-, \text{ho}}(\varepsilon),$

$P^{-, \text{ho}}(\varepsilon)$), в точности так же, как и в (4.2a), (4.2b). Как и ранее, они порождают нижние ВДП $\Theta_{z_0}^{-}(\varepsilon)$. Так же, как и в (4.3), (4.4), мы получаем теперь, что

$$\mathbb{P}_{z_0}^{\text{joint}} \{ \Lambda_{z_0}^{-, \text{ho}}(\varepsilon) \subseteq \Lambda_{z_0} \subseteq \Lambda_{z_0}^{+, \text{ho}}(\varepsilon) \} = 1 \quad (4.21)$$

и

$$\mathbb{P}_{z_0}^{\text{joint}} \{ h^{-, \text{ho}}(z_0; \varepsilon) \leq h(z_0) \leq h^{+, \text{ho}}(z_0; \varepsilon) \} = 1. \quad (4.22)$$

Здесь снова применимы методы и результаты работы [4], из которых вытекает, что п.н.

$$h^{-, \text{ho}}(z_0; \varepsilon) = \frac{d-1}{2} - \sqrt{\frac{(d-1)^2}{4} - V_b^{-}(1-\varepsilon)^2},$$

$$h^{+, \text{ho}}(z_0; \varepsilon) = \frac{d-1}{2} - \sqrt{\frac{(d-1)^2}{4} - V_b^{+}(1+\varepsilon)^2}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем равенство (2.4) в теореме 2.А.

Проверка того, что в предположениях теоремы 2.А выполняется оценка (2.5) использует те же аргументы, что и в теореме 1.А. Единственное отличие в том, что вместо леммы 3.1 используется лемма 3.3. Это завершает доказательство теоремы 2.А.

Утверждения Б и В в теореме 2 очевидны, и их доказательство опускается.

Доказательство теорем 3.А и 3.Б. Эти доказательства следуют той же схеме, что и доказательства теорем 1 и 2. В них используются верхние и нижние процессы, порожденные ЛОО-мажорантами и ОГП-минорантами. Вместо лемм 3.1 и 3.2 используется лемма 3.4 в доказательстве теоремы 3.А и лемма 3.5 в доказательстве теоремы 3.Б.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grigor'yan A., Kelbert M. Recurrence and transience of branching diffusion processes on Riemannian manifolds. — Ann. Probab., 2003, v. 31, № 1, p. 244–284.
2. Karpelevich F. I., Kelbert M. Ya., Suhov Yu. M. The boundedness of branching Markov processes. — The Dynkin Festschrift. Markov Processes and Their Applications. Ed. by M. Freidlin. Boston: Birkhäuser, 1994, p. 143–152. (Progr. Probab., v. 34.)
3. Karpelevich F. I., Pechersky E. A., Suhov Yu. M. A phase transition for hyperbolic branching processes. — Comm. Math. Phys., 1998, v. 195, № 3, p. 627–642.
4. Kelbert M. Ya., Suhov Yu. M. Branching diffusions on $\mathbf{H}^d$ with variable fission: The Hausdorff dimension of the limiting set. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 1, с. 241–255.
5. Lalley S., Sellke T. Hyperbolic branching Brownian motion. — Probab. Theory Relat. Fields, 1997, v. 108, № 2, p. 171–192.
6. Watson G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1966, 804 p.

Поступила в редакцию
6.IX.2006