Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Куликов, Многомерные когерентные и выпуклые меры риска, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 4, 685–710

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 11:23:07

© 2007 г.

КУЛИКОВ А. В.*

МНОГОМЕРНЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ И ВЫПУКЛЫЕ МЕРЫ РИСКА

В статье рассматриваются многомерные когерентные и выпуклые меры риска. Предложенный подход учитывает риски, связанные с изменениями обменных курсов и операционными издержками. Для многомерных мер риска доказаны теоремы о представлении. Исследуются важные примеры когерентных мер риска: хвостовой $V@R$ и взвешенный $V@R$. Рассматриваются два применения многомерных когерентных мер риска: для решения задачи о распределении капитала и определения риск-вклада в многомерном случае.

Ключевые слова и фразы: многомерные когерентные меры риска, многомерные выпуклые меры риска, матрица обменных курсов, конус обменных курсов, хвостовой $V@R$, взвешенный $V@R$, распределение капитала, риск-вклад, экстремальные элементы.

1. Введение. Впервые понятие когерентной меры риска было введено в основополагающей работе П. Артина, Ф. Делбаена, Дж.-М. Эбера и Д. Хиса [3]. В статье [4] эти же авторы доказали базовую теорему о представлении. С этого момента теория когерентных мер риска стала активно развиваться. Достаточно упомянуть работы [1], [2], [7]–[12], [17], [18], [20], [30], а также обзоры [13], [19, гл. 4], [36]. Во всех этих работах рассматриваются одномерные меры риска, т.е. измеряется риск одномерных случайных величин, имеющих смысл стоимости портфелей, выраженной в единицах некоторой базовой валюты. Такой подход оправдан в том случае, когда имеется базовая валюта, или в том случае, когда в конечный момент времени все финансовые позиции ликвидируются, т.е. превращаются в некоторое количество единиц базового актива. Однако такой подход неудобен, например, при описании портфеля, состоящего из нескольких валют, когда нет единой «канонической» валюты, к которой должен приводиться портфель. В этом случае гораздо естественнее пользоваться подходом, предложенным Ю.М. Кабановым [27] (см. также [28]), при котором портфель описывается не как

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: kulikov_av@pochta.ru

число, а как вектор, i -я компонента которого имеет смысл количества единиц i -й валюты в портфеле.

Если описывать портфели как векторы, то возникает необходимость рассмотрения многомерных мер риска. Понятие многомерной когерентной меры риска было введено в работе Э. Жуини, М. Меддеба, Н. Тузи [26], а также было рассмотрено в работах [8] и [22]. Их подход нацелен на то, чтобы учесть операционные издержки при обмене одной валюты на другую. Однако в их модели операционные издержки являются неслучайными. Таким образом, не учитывается риск, связанный с изменением обменных курсов, являющийся на сегодняшний день одним из важнейших финансовых рисков.

В настоящей работе мы вводим понятие многомерных когерентных мер риска, учитывающее риск обменных курсов. Наш подход аналогичен подходу [26], однако, в отличие от этой работы, матрица обменных курсов считается случайной. Мы также рассматриваем и многомерные выпуклые меры риска (в одномерном случае они были введены и рассмотрены в работах [7], [17], [20]). Помимо задачи измерения собственного риска портфеля, важной является задача распределения риска между несколькими частями портфеля (например, распределение риска портфеля большой фирмы между портфелями различных отделов этой фирмы). Задача распределения риска тесно связана с проблемой определения риск-вклада. В одномерном случае эти задачи рассматривались в работах [9], [13], [14], [16], [29], [33], [37]. В настоящей работе мы приводим геометрическое решение этих задач для многомерных когерентных мер риска. Полученные результаты являются многомерными аналогами одномерных результатов из [9] (вообще, настоящая работа может рассматриваться как обобщение [9, п. 2] на многомерный случай). Как и в одномерном случае, решения задач выражаются через важное понятие экстремального элемента, которое в одномерном случае было введено в [9], а в многомерном случае вводится в настоящей статье.

Работа организована следующим образом. В п. 2 даются определения многомерных когерентных и выпуклых мер риска. В п. 3 доказываются теоремы о представлении. В п. 4 мы вводим понятие экстремального элемента. Пункт 5 посвящен двум важным примерам — хвостовому $V@R$ и взвешенному $V@R$. В п. 6 решается задача распределения риска, а в п. 7 определяется риск-вклад. Технические утверждения собраны в приложении (п. 8).

2. Основные определения. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $K: \Omega \rightarrow \mathcal{K}$ — измеримое отображение, где $\mathcal{K}$ — множество непустых замкнутых конусов C таких, что $C \neq \mathbf{R}^d$, $C + \mathbf{R}_-^d = C$ (на множестве $\mathcal{K}$ рассматривается борелевская σ -алгебра относительно топологии, описанной в приложении). С финансовой точки зрения, K —

конус обменных курсов в момент времени 1 для d различных валют (т.е. $K(\omega)$ — множество портфелей, которые мы можем получить в момент времени 1 из нулевого при элементарном исходе ω).

Пример 2.1 (см. [35]). Пусть $(\pi^{ij}: 1 \leq i, j \leq d)$ — матрица обменных курсов между валютами $1, \dots, d$ в момент 1, т.е. матрица $\pi^{ij}(\omega)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (i) $\pi^{ij} > 0, 1 \leq i, j \leq d$;
- (ii) $\pi^{ii} = 1, 1 \leq i \leq d$;
- (iii) $\pi^{ij} \leq \pi^{ik}\pi^{kj}, 1 \leq i, j, k \leq d$.

С финансовой точки зрения, π^{ij} означает минимальное количество единиц i -й валюты, которое нужно потратить для получения одной единицы j -й валюты. Тогда конус K будет представлять собой множество портфелей, которые можно получить из нулевого портфеля путем обмена валюты и выбрасывания денег, и будет натянут на векторы, имеющие на i -м месте $-\pi^{ij}$, на j -м месте 1, а на всех остальных местах 0, т.е. $K = \text{cone}\{e_j - \pi^{ij}e_i: 1 \leq i, j \leq d\} - \mathbf{R}_+^d$, где $\text{cone}(A)$ — замкнутая выпуклая коническая оболочка множества A . В случае $d = 2$ конус K представлен на рис. 1.

Рис. 1. Пример конуса K

В приводимом ниже определении $\mathcal{C}$ — множество непустых выпуклых замкнутых множеств в $\mathbf{R}^d$ (на множестве $\mathcal{C}$ рассматривается борелевская σ -алгебра относительно топологии, описанной в приложении), векторы $X = (X^1, \dots, X^d) \in (L^\infty)^d$ имеют смысл портфелей в момент времени 1, т.е. X^i — количество единиц i -й валюты в портфеле в момент времени 1. Рассмотрим частичное отношение порядка на множестве портфелей, заданное следующим образом: $X \preceq Y$, если $X(\omega) - Y(\omega) \in K(\omega)$ для п.в. ω .

О п р е д е л е н и е 2.1. (i) *Многомерная когерентная функция полезности* — это функция $u: (L^\infty)^d \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{R}^d\}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

- (a) $u(X + Y) \supseteq u(X) + u(Y)$;
- (b) если $X \preceq Y$, то $u(X) \subseteq u(Y)$;
- (c) $u(\lambda X) = \lambda u(X)$ для любого $\lambda > 0$;
- (d) $u(X + t) = u(X) + t$ для любого $t \in \mathbf{R}^d$;

(e) если $\|X_n\| \leq c$ и $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, то $u(X) \supseteq \overline{\lim}_n u(X_n)$, т.е. если x принадлежит бесконечно многим $u(X_n)$, то x принадлежит $u(X)$ (мы используем обозначение $\|X\| = \sum_{i=1}^d |X^i|$).

(ii) *Многомерная вогнутая функция полезности* — это функция $u: (L^\infty)^d \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{R}^d\}$, удовлетворяющая аксиомам (b), (d), (e) и аксиоме

- (a') $u(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \supseteq \alpha u(X) + (1 - \alpha)u(Y)$ для любого $\alpha \in [0, 1]$.

С финансовой точки зрения, $u(X)$ есть множество неслучайных портфелей, которые «не лучше» портфеля X . Соответствующая *многомерная когерентная* (соответственно *выпуклая*) *мера риска* определяется как $\rho(X) = -u(X)$. С финансовой точки зрения, $\rho(X)$ — множество неслучайных портфелей $x \in \mathbf{R}^d$, которые делают позицию $X + x$ безрисковой. Использование многомерных когерентных (соответственно вогнутых) функций полезности вместо многомерных когерентных (соответственно выпуклых) мер риска позволяет избежать большого количества знаков минуса.

З а м е ч а н и е. Имеет место следующее свойство: $u(X) + \mathbf{R}_-^d = u(X)$. Кроме того, $u(0) \ni 0$, если u — многомерная когерентная функция полезности.

З а м е ч а н и е. Напомним, что в одномерном случае классическая когерентная функция полезности определяется как функция $u: L^\infty \rightarrow \mathbf{R}$, обладающая следующими свойствами:

- (a) $u(X + Y) \geq u(X) + u(Y)$;
- (b) если $X \leq Y$, то $u(X) \leq u(Y)$;
- (c) $u(\lambda X) = \lambda u(X)$ для любого $\lambda \geq 0$;
- (d) $u(X + t) = u(X) + t$ для любого $t \in \mathbf{R}$;
- (e) если $|X_n| \leq c$ и $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, то $u(X) \geq \overline{\lim}_n u(X_n)$.

Классическая вогнутая функция полезности определяется как функция $u: L^\infty \rightarrow \mathbf{R}$, обладающая свойствами (b), (d), (e), а также свойством

- (a') $u(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \geq \alpha u(X) + (1 - \alpha)u(Y)$ для любого $\alpha \in [0, 1]$.

Очевидно, что если u — когерентная (соответственно вогнутая) функция полезности в классическом смысле, то отображение $v(X) = (-\infty, u(X)]$ будет когерентной (соответственно вогнутой) функцией полезности в смысле определения 2.1 с $d = 1$ и $K(\omega) = \mathbf{R}_-$. Обратно, если $d = 1$, $K(\omega) = \mathbf{R}_-$ и u — когерентная (соответственно вогнутая) функция полезности в смысле определения 2.1, то функция $v(X) = \sup\{x \in \mathbf{R}:$

$x \in u(X)$ является когерентной (соответственно вогнутой) функцией полезности в классическом смысле. Таким образом, данное выше определение является многомерным обобщением классического.

О п р е д е л е н и е 2.2. Множество допустимых портфелей для вогнутой функции полезности u — это множество $A_u = \{X \in (L^\infty)^d: u(X) \ni 0\}$.

Теорема 2.1. (i) Если u — многомерная вогнутая функция полезности, то A_u имеет следующие свойства:

- (a) A_u — выпуклое множество;
- (b) если $X \preceq Y$ и $X \in A_u$, то $Y \in A_u$;
- (c) для любого X существуют $m, m' \in \mathbf{R}^d$ такие, что $X + m \in A_u$ и $X + m' \notin A_u$;
- (d) A_u замкнуто в слабой топологии $\sigma((L^\infty)^d, (L^1)^d)$.

Если u — многомерная когерентная функция полезности, то выполнено также следующее свойство:

- (e) если $X \in A_u$, то $\lambda X \in A_u$ для любого $\lambda \geq 0$.
- (ii) Обратно, если A удовлетворяет свойствам (a)–(d), то $u_A = \{m \in \mathbf{R}^d: X - m \in A\}$ — многомерная вогнутая функция полезности. Если A обладает свойствами (a)–(e), то $u_A = \{m \in \mathbf{R}^d: X - m \in A\}$ — многомерная когерентная функция полезности. Кроме того, для любой многомерной вогнутой функции полезности $u_{A_u} = u$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) В проверке нуждается лишь свойство (d). Возьмем произвольное c из $\mathbf{R}^d$. Положим $C = \{X \in (L^\infty)^d: u(X) \ni c\}$. Докажем, что это множество $\sigma((L^\infty)^d, (L^1)^d)$ -замкнуто. Для $r \in (0, +\infty)$ определим $C_r = C \cap \{X \in (L^\infty)^d: \|X\| \leq r\}$. Если $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — последовательность из C_r , сходящаяся к X в $(L^1)^d$, то из аксиомы (e) следует, что $X \in C_r$. Значит, C_r замкнуто в $(L^1)^d$ и C замкнуто в $\sigma((L^\infty)^d, (L^1)^d)$. Согласно [21, пример 1, с. 204], получаем, что A_u замкнуто в слабой топологии $\sigma((L^\infty)^d, (L^1)^d)$.

(ii) Достаточно лишь проверить выполнение аксиомы (e). Пусть A замкнуто в слабой топологии $\sigma((L^\infty)^d, (L^1)^d)$, $\|X_n\| \leq c$, $X_n \xrightarrow{P} X$. Тогда последовательность $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ сходится к X в слабой топологии $\sigma((L^\infty)^d, (L^1)^d)$. Пусть $x \in \lim_n u(X_n)$, т.е. существует последовательность $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$ такая, что $x \in u(X_{n_k})$ для любого k . Значит, $X_{n_k} - x \in A$ для любого $k \in \mathbf{N}$. Так как A замкнуто в слабой топологии $\sigma((L^\infty)^d, (L^1)^d)$, то $X - x \in A$, а значит, $0 \in u(X - x)$, и, следовательно, $x \in u(X)$. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} u_{A_u}(X) &= \{x \in \mathbf{R}^d: X - x \in A_u\} = \{x \in \mathbf{R}^d: u(X - x) \ni 0\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}^d: u(X) - x \ni 0\} = \{x \in \mathbf{R}^d: u(X) \ni x\} = u(X). \end{aligned}$$

3. Теоремы о представлении.

Теорема 3.1. (i) Функция $u: (L^\infty)^d \rightarrow \mathcal{C}$ является многомерной когерентной функцией полезности тогда и только тогда, когда существует непустое множество $\mathcal{D} \subseteq (L^1)^d$ такое, что для любого $Z \in \mathcal{D}$ выполнено свойство $Z(\omega) \in K^*(\omega)$ $\mathbf{P}$ -п.н. и

$$u(X) = \left\{ x \in \mathbf{R}^d: \forall Z \in \mathcal{D} \sum_{i=1}^d \mathbf{E} x^i Z^i \leq \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i \right\}, \quad (3.1)$$

где $K^*(\omega)$ — полярна к конусу $K(\omega)$, т.е. $K^*(\omega) = \{x \in \mathbf{R}^d: \langle x, z \rangle \leq 0 \text{ для любого } z \in K(\omega)\}$.

(ii) Функция $u: (L^\infty)^d \rightarrow \mathcal{C}$ является многомерной вогнутой функцией полезности тогда и только тогда, когда существуют непустое множество $\mathcal{D} \subseteq (L^1)^d$ и функция $\alpha: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ такие, что для любого $Z \in \mathcal{D}$ выполнено свойство $Z(\omega) \in K^*(\omega)$ $\mathbf{P}$ -п.н. и

$$u(X) = \left\{ x \in \mathbf{R}^d: \forall Z \in \mathcal{D} \sum_{i=1}^d \mathbf{E} x^i Z^i \leq \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i + \alpha(Z) \right\}. \quad (3.2)$$

Доказательство. (ii) Докажем достаточность. Свойства (a'), (b), (d) очевидны. Докажем свойство (e). Предположим, что $\|X_n\| \leq c$ и $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$. Возьмем $x \in \overline{\lim}_n u(X_n)$. Тогда существует подпоследовательность $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$ такая, что $x \in u(X_{n_k})$ для любого k . Поэтому для любого $Z \in \mathcal{D}$ и $k \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^d \mathbf{E} x^i Z^i \leq \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X_{n_k}^i Z^i + \alpha(Z) \quad (3.3)$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^d \mathbf{E} x^i Z^i \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X_{n_k}^i Z^i + \alpha(Z) = \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i + \alpha(Z).$$

Это означает, что $x \in u(X)$.

Докажем необходимость. Возьмем множество допустимых портфелей $A_u = \{X \in (L^\infty)^d: u(X) \ni 0\}$, тогда из леммы 8.2 следует, что существуют множество $\mathcal{D} \subseteq (L^1)^d$ и функция $\alpha(Z)$ такие, что

$$A_u = \left\{ X \in (L^\infty)^d: \forall Z \in \mathcal{D} \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i + \alpha(Z) \geq 0 \right\}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u(X) &= \{x \in \mathbf{R}^d: 0 \in u(X - x)\} = \{x \in \mathbf{R}^d: X - x \in A_u\} \\ &= \left\{ x \in \mathbf{R}^d: \forall Z \in \mathcal{D} \sum_{i=1}^d \mathbf{E} x^i Z^i \leq \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i + \alpha(Z) \right\}. \end{aligned}$$

Возьмем $Z \in \mathcal{D}$ и докажем, что $Z(\omega) \in K^*(\omega)$ $\mathbf{P}$ -п.н. Предположим противное. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\alpha(Z) > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in A_u$. Рассмотрим множество $B = \{\omega: Z(\omega) \notin K^*(\omega)\}$. Из замечания в приложении видно, что B является измеримым множеством. Возьмем $c = \alpha(Z)/\mathbf{P}(B) + 1$. Тогда для любого $\omega \in B$ имеем $K(\omega) \cap Z_c^*(\omega) \neq \emptyset$, где $Z_c^*(\omega) = \{x \in \mathbf{R}^d: \langle x, Z(\omega) \rangle \geq c\}$. Согласно теореме 8.1, мы можем построить случайный вектор X такой, что $X(\omega) \in K(\omega) \cap Z_c^*(\omega)$ для любого $\omega \in B$ и $X(\omega) = 0$ для любого $\omega \notin B$. Тогда из определения следует, что $0 \preceq -X$, $u(0) \ni 0$, в то же время из представления (3.2) следует, что $0 \notin u(-X)$. Таким образом, получаем противоречие, которое означает, что $Z(\omega) \in K^*(\omega)$ $\mathbf{P}$ -п.н.

Случай 2. Пусть $\alpha(Z) \leq 0$. Рассмотрение этого случая повторяет рассмотрение случая 1, когда $c = 1$.

(i) Обратная импликация доказывается аналогично части (ii). Для доказательства прямой импликации возьмем $A_u = \{X \in (L^\infty)^d: u(X) \ni 0\}$. Из леммы 8.1 следует, что существует множество $\mathcal{D} \subseteq (L^1)^d$ такое, что

$$A_u = \left\{ X \in (L^\infty)^d: \forall Z \in \mathcal{D} \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i \geq 0 \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u(X) &= \{x \in \mathbf{R}^d: 0 \in u(X - x)\} = \{x \in \mathbf{R}^d: X - x \in A_u\} \\ &= \left\{ x \in \mathbf{R}^d: \forall Z \in \mathcal{D} \sum_{i=1}^d \mathbf{E} x^i Z^i \leq \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i \right\}. \end{aligned}$$

Свойство $Z \in K^*$ доказывается аналогично случаю 2 части (ii). Теорема 3.1 доказана.

З а м е ч а н и е. Функция $\alpha(Z)$ называется *штрафной функцией*. В одномерном случае доказанная выше теорема о представлении многомерных когерентных (соответственно вогнутых) функций полезности превращается в теоремы о представлении для классических когерентных (соответственно вогнутых) функций полезности, доказанные в [4] (соответственно [17]).

Поскольку во многих моделях, рассматриваемых в финансовой математике, активы не являются ограниченными случайными векторами, то следует расширить класс случайных величин, для которых применима теория когерентных и выпуклых мер риска. А именно, используя представления (3.1) и (3.2), аналогично [9, п. 2.2] можно продолжить многомерные когерентные и вогнутые функции полезности на $(L^0)^d$.

О п р е д е л е н и е 3.1. (i) *Когерентная функция полезности на $(L^0)^d$* — это отображение $u: (L^0)^d \rightarrow \mathcal{C} \cup \{\emptyset\}$, заданное следующим образом:

$$u(X) = \left\{ x \in \mathbf{R}^d: \forall Z \in \mathcal{D} \sum_{i=1}^d \mathbf{E} x^i Z^i \leq \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i \right\}, \quad (3.4)$$

где $\mathcal{D}$ — множество, состоящее из некоторых d -мерных случайных величин $Z \in (L^1)^d$ таких, что $Z(\omega) \in K^*(\omega)$ $\mathbf{P}$ -п.н. Сумма $\sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i$ понимается следующим образом: $\mathbf{E} X^i Z^i = \mathbf{E}(X^i Z^i)^+ - \mathbf{E}(X^i Z^i)^-$ с соглашением $+\infty - \infty = -\infty$, и если в общей сумме есть хотя бы одно слагаемое, равное $-\infty$, то и вся сумма равна $-\infty$.

(ii) *Вогнутая функция полезности на $(L^0)^d$* — это отображение $u: (L^0)^d \rightarrow \mathcal{C} \cup \{\emptyset\}$, заданное следующим образом:

$$u(X) = \left\{ x \in \mathbf{R}^d: \forall Z \in \mathcal{D} \quad \sum_{i=1}^d \mathbf{E} x^i Z^i \leq \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i + \alpha(Z) \right\}, \quad (3.5)$$

где $\mathcal{D}$ — множество, состоящее из некоторых d -мерных случайных величин $Z \in (L^1)^d$ таких, что $Z(\omega) \in K^*(\omega)$ $\mathbf{P}$ -п.н., α — отображение из $\mathcal{D}$ в $\mathbf{R}$, а $\sum \mathbf{E} X^i Z^i$ понимается таким же образом, как и в части (i).

Видно, что множество $\mathcal{D}$ из представлений (3.1) и (3.4) не единственно. Однако существует наибольшее множество

$$\left\{ Z \in (L^1)^d: \sum_{i=1}^d \mathbf{E} x^i Z^i \leq \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i \text{ для любого } X \right\}.$$

Также видно, что штрафная функция из представлений (3.2) и (3.5) не единственна. Однако существует наименьшая из них:

$$\alpha(Z) = \sup_{X \in A_u} \sum_{i=1}^d \mathbf{E}(-X^i Z^i).$$

О п р е д е л е н и е 3.2. (i) Назовем наибольшее множество, для которого выполнено (3.1) (или (3.4)), *определяющим множеством* для когерентной функции полезности u .

(ii) Назовем минимальную функцию, для которой выполнено (3.2) (или (3.5)), *минимальной штрафной функцией* для вогнутой функции полезности u .

З а м е ч а н и я. (i) Два определения, данные выше, являются многомерными обобщениями классических (см. [9, п. 2]).

(ii) Очевидно, что определяющее множество является выпуклым конусом. Для многомерных когерентных функций полезности на $(L^\infty)^d$ оно также обязательно $(L^1)^d$ -замкнуто. Однако для когерентных функций полезности на $(L^0)^d$ определяющее множество может не быть $(L^1)^d$ -замкнутым (см. [9, п. 2]).

В а ж н о е з а м е ч а н и е. Пусть $\mathcal{D}$ есть $(L^1)^d$ -замкнутый выпуклый конус. Определим многомерную когерентную функцию полезности формулой (3.1) или (3.4). Тогда $\mathcal{D}$ будет определяющим множеством для u . Действительно, предположим, что определяющее множество $\mathcal{D}_0$

больше $\mathcal{D}$, т.е. существует вектор $Z_0 \in \mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{D}$. Тогда по теореме Хана-Банаха мы можем найти вектор $X_0 \in (L^\infty)^d$ такой, что

$$\sum_{i=1}^d \mathbf{E} X_0^i Z_0^i < 0 \leq \inf_{Z \in \mathcal{D}} \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X_0^i Z^i.$$

Из первого неравенства следует, что $0 \notin u(X_0)$, а из второго следует, что $0 \in u(X_0)$. Итак, получаем противоречие, которое доказывает, что $\mathcal{D}$ — определяющее множество.

В дальнейшем мы будем рассматривать применение мер риска к задачам финансовой математики. При этом когерентные меры риска оказываются более удобными, чем выпуклые, поэтому мы будем иметь дело с многомерными когерентными функциями полезности, определенными на $(L^0)^d$. Естественные примеры многомерных когерентных функций полезности будут рассмотрены в п. 5.

4. Экстремальные элементы. Пусть u — многомерная когерентная функция полезности на $(L^0)^d$ и $\mathcal{D}$ — ее определяющее множество. Положим

$$\mathcal{L} = \left\{ Z \in (L^1)^d : \mathbf{E} \sum_{i=1}^d Z^i = 1 \right\}.$$

Определим слабое и сильное L^1 -пространства, ассоциированные с u , формулами

$$L_w^1(\mathcal{D}) = \left\{ X \in (L^0)^d : \sup_{Z \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}} \sum_{i=1}^d |\mathbf{E} Z^i X^i| < \infty \right\},$$

$$L_s^1(\mathcal{D}) = \left\{ X \in (L^0)^d : \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{Z \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}} \sum_{i=1}^d \mathbf{E} |Z^i X^i| I \left\{ \sum_{j=1}^d |X^j| > n \right\} = 0 \right\}.$$

З а м е ч а н и е. Пусть $\mathcal{D}$ — определяющее множество классической когерентной функции полезности u . Для классических когерентных мер риска понятия слабого и сильного L^1 -пространств, ассоциированных с u , введены в [9, п. 2.3] следующим образом:

$$L_w^1(\mathcal{D}) = \left\{ X \in L^0 : \sup_{Z \in \mathcal{D}} |\mathbf{E} ZX| < \infty \right\},$$

$$L_s^1(\mathcal{D}) = \left\{ X \in L^0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{Z \in \mathcal{D}} \mathbf{E} |ZX| I\{|X| > n\} = 0 \right\}.$$

Таким образом, введенные нами сильное и слабое L^1 -пространства являются многомерным обобщением сильного и слабого L^1 -пространств, рассмотренных в [9, п. 2.3].

Очевидно, что $L_s^1(\mathcal{D}) \subseteq L_w^1(\mathcal{D})$. Если $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ состоит из одного случайного вектора Z , то

$$L_w^1(\mathcal{D}) = L_s^1(\mathcal{D}) = \{X : X^i \in L^1(Z^i \mathbf{P}) \text{ для любого } i\},$$

что мотивирует определение. В общем случае $L_s^1(\mathcal{D})$ может быть строго меньше $L_w^1(\mathcal{D})$ (см. [9, п. 2.3]). Однако, как будет показано в следующем пункте, в наиболее естественных ситуациях они совпадают (см. предложение 5.1).

Определение 4.1. Пусть u — многомерная когерентная функция полезности с определяющим множеством $\mathcal{D}$. Пусть $X \in (L^0)^d$, $x \in \partial u(X)$, где $\partial u(X)$ — граница множества $u(X)$. Назовем ненулевой случайный вектор $Z \in \mathcal{D}$ *экстремальным элементом* для X в точке x у когерентной функции полезности u , если $\sum_{i=1}^d \mathbf{E} Z^i x^i = \sum_{i=1}^d \mathbf{E} Z^i X^i$. Множество всех экстремальных элементов для X в точке x обозначим $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}(X, x)$.

З а м е ч а н и е. В [9, п. 2.3] было введено понятие экстремальной меры для одномерной когерентной функции полезности u . А именно, экстремальной мерой для случайной величины X такой, что $u(X) \in (-\infty, +\infty)$, называется мера $\mathbf{Q} \in \mathcal{D}$ такая, что $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X = u(X)$. Очевидно, что если Z — экстремальный элемент для X в точке $x = \sup\{z: z \in u(X)\}$ у когерентной функции полезности u в смысле определения 4.1, то мера $\mathbf{Q} = Z\mathbf{P}/\mathbf{E}Z$ будет экстремальной мерой для X у классической когерентной функции полезности $v(X) = \sup\{x \in \mathbf{R}: x \in u(X)\}$. Обратно, если $\mathbf{Q}$ является экстремальной мерой у классической когерентной функции полезности v для X , то $Z = d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ будет экстремальным элементом для X в точке $v(X)$ у когерентной функции полезности $u(X) = (-\infty, v(X)]$ в смысле определения 4.1. Таким образом, данное выше определение является многомерным обобщением классического.

Предложение 4.1. Если $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ слабо компактно, $X \in L_s^1(\mathcal{D})$ и $x \in \partial u(X)$, то $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}(X, x) \neq \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что все $Z \in \mathcal{D}$ принадлежат $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$. Тогда найдется последовательность (Z_n) такая, что $Z_n \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ и $\sum \mathbf{E}(X^i - x^i) Z_n^i \rightarrow 0$, — в противном случае из представления (3.4) следовало бы, что существует ε -окрестность точки x , содержащаяся в $u(X)$, а это противоречит тому, что $x \in \partial u(X)$. Последовательность (Z_n) имеет слабый предел $Z_{\infty} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$. Очевидно, что отображение $(\mathcal{D} \cap \mathcal{L}) \ni Z \mapsto \sum \mathbf{E}(X^i - x^i) Z^i$ слабо непрерывно. Поэтому

$$\sum_{i=1}^d \mathbf{E} Z_{\infty}^i x^i = \sum_{i=1}^d \mathbf{E} Z_{\infty}^i X^i,$$

и, значит, $Z_{\infty} \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}(X, x)$.

З а м е ч а н и я. (i) Условие, что множество $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ слабо компактно, — очень слабое условие, которое выполняется для большинства естественно возникающих многомерных когерентных функций полезности. Например, оно выполнено для хвостового $V@R$, рассматриваемого

в следующем пункте, при условии интегрируемости конуса обменных курсов.

(ii) Условие $X \in L_s^1(\mathcal{D})$ в предложении 4.1 нельзя заменить на $X \in L_w^1(\mathcal{D})$ (см. [9, п. 2.3, пример 2.11]).

5. Примеры. Сначала напомним наиболее часто рассматриваемые в одномерном случае примеры классических когерентных функций полезности.

Пример 5.1 (см. [4]). Пусть $\lambda \in (0, 1]$. Рассмотрим множество $\mathcal{D}_\lambda = \{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}: d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \leq \lambda\}$. Построим следующую функцию:

$$u_\lambda(X) = \inf_{Z \in \mathcal{D}_\lambda} \mathbf{E}XZ, \quad X \in (L^0)^d.$$

Это будет классическая когерентная функция полезности. Соответствующую ей классическую когерентную меру риска ρ_λ называют *хвостовой V@R* с параметром λ .

Пример 5.2 (см. [30]). Пусть μ — вероятностная мера на $(0, 1]$. Взвешенный *V@R* на L^∞ — это мера риска, соответствующая следующей когерентной функции полезности:

$$u_\mu(X) = \int_{(0,1]} u_\lambda(X) \mu(d\lambda), \quad X \in L^\infty.$$

Эта когерентная функция полезности может быть записана в следующем виде:

$$u_\mu(X) = \inf_{Z \in \mathcal{D}_\mu} \mathbf{E}XZ,$$

где $\mathcal{D}_\mu \subseteq L^1$. Пользуясь этой формулой, можно продолжить функцию u_μ на L^0 . Соответствующую ей классическую когерентную меру риска ρ_μ называют *взвешенным V@R* на L^0 .

Теперь мы можем рассмотреть некоторые примеры многомерных когерентных функций полезности, которые являются естественным обобщением аналогичных одномерных функций. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и K те же, что и в п. 2.

Определение 5.1. Пусть $\lambda \in (0, 1]$. Рассмотрим множество $\tilde{\mathcal{D}}_\lambda = \text{cone}\{\eta\xi \in (L^1)^d: \eta \in \mathcal{D}_\lambda, \xi \in (L^0)^d, \xi(\omega) \in K^*(\omega) \text{ и } \xi^1 \cdots \xi^d = 1 \text{ P-п.н.}\}$. Построим следующую функцию:

$$\tilde{u}_\lambda(X) = \left\{ x \in \mathbf{R}^d: \forall Z \in \tilde{\mathcal{D}}_\lambda \sum_{i=1}^d \mathbf{E}x^i Z^i \leq \sum_{i=1}^d \mathbf{E}X^i Z^i \right\}.$$

Согласно теореме 3.1, это будет многомерная когерентная функция полезности с определяющим множеством $\tilde{\mathcal{D}}_\lambda$. Будем называть соответствующую ей многомерную когерентную меру риска $\tilde{\rho}_\lambda$ *хвостовым V@R* с параметром λ и конусом K .

З а м е ч а н и е. Условие $\xi^1 \dots \xi^d = 1$ объясняется тем, что значения многомерной когерентной функции полезности не должны изменяться при замене базовых единиц вдоль каждой оси (к примеру, если мы в качестве базовой единицы вдоль оси x берем не доллары, а центы). А это условие, в свою очередь, выполнено, если $\xi_1 \dots \xi_d = 1$.

О п р е д е л е н и е 5.2. Пусть μ — вероятностная мера на $(0, 1]$. Рассмотрим множество $\tilde{\mathcal{D}}_\mu = \text{cone}\{\eta\xi \in (L^1)^d: \eta \in \mathcal{D}_\mu, \xi \in (L^0)^d, \xi(\omega) \in K^*(\omega) \text{ и } \xi^1 \dots \xi^d = 1 \text{ Р-п.н.}\}$. Построим следующую функцию:

$$\tilde{u}_\mu(X) = \left\{ x \in \mathbf{R}^d: \forall Z \in \tilde{\mathcal{D}}_\mu \sum_{i=1}^d \mathbf{E} x^i Z^i \leq \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i \right\}.$$

Согласно теореме 3.1, это будет многомерная когерентная функция полезности с определяющим множеством $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$. Будем называть соответствующую ей многомерную когерентную меру риска $\tilde{\rho}_\mu$ *взвешенным $V@R$ со взвешенной мерой μ и конусом K* .

З а м е ч а н и е. Очевидно, что если u — хвостовой (соответственно взвешенный) $V@R$ в смысле примера 5.1 (соответственно примера 5.2), то отображение $v(X) = (-\infty, u(X)]$ будет хвостовым (соответственно взвешенным) $V@R$ в смысле определения 5.1 (соответственно определения 5.2) с $d = 1$ и $K(\omega) = \mathbf{R}_-$. Обратно, если $d = 1$, $K(\omega) = \mathbf{R}_-$ и u — хвостовой (соответственно взвешенный) $V@R$ в смысле определения 5.1 (соответственно определения 5.2), то функция $v(X) = \sup\{x \in \mathbf{R}: x \in u(X)\}$ является хвостовым (соответственно взвешенным) $V@R$ в смысле примера 5.1 (соответственно примера 5.2). Таким образом, данное выше определение является многомерным обобщением классического.

Рассмотрим условия, когда в определяющих множествах для хвостового и взвешенного $V@R$ можно отбросить условие интегрируемости.

Лемма 5.1. (i) Пусть $\pi^{ij} \in L^1$ для всех i, j . Тогда, если $\eta \in \mathcal{D}_\lambda$, $\xi \in (L^0)^d$, $\xi(\omega) \in K^*(\omega)$ и $\xi^1 \dots \xi^d = 1$ Р-п.н., то $\eta\xi \in (L^1)^d$.

(ii) Пусть $\pi^{ij} \in L^1$ для всех i, j , а мера μ такова, что $\int_{(0,1]} \lambda^{-1} \mu(d\lambda) < \infty$. Тогда, если $\eta \in \mathcal{D}_\mu$, $\xi \in (L^0)^d$, $\xi(\omega) \in K^*(\omega)$ и $\xi^1 \dots \xi^d = 1$ Р-п.н., то $\eta\xi \in (L^1)^d$.

(iii) При указанных выше предположениях множества $\tilde{\mathcal{D}}_\lambda \cap \mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{D}}_\mu \cap \mathcal{L}$ будут замкнутыми и равномерно интегрируемыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Если $\xi(\omega) \in K^*(\omega)$, то $\xi^i(\omega)/\xi^j(\omega) \leq \pi^{ji}(\omega)$. Так как $\xi^1(\omega) \dots \xi^d(\omega) = 1$, то $\xi^i(\omega) \leq \max\{\pi^{ji}(\omega), j = 1, \dots, d\}$. Следовательно, $\mathbf{E} \xi^i \leq \sum_{j=1}^d \mathbf{E} \pi^{ji} < \infty$. Значит, если все $\pi^{ij} \in L^1$, а $\eta \in \mathcal{D}_\lambda$, $\xi \in (L^0)^d$, $\xi(\omega) \in K^*(\omega)$ и $\xi^1 \dots \xi^d = 1$ Р-п.н., то $\eta\xi \in (L^1)^d$.

(ii) Согласно [11, теорема 4.6], $\eta \in L^\infty$; следовательно, воспользовавшись частью (i) данного предположения, получаем, что если $\eta \in \mathcal{D}_\mu$, $\xi \in (L^0)^d$, $\xi(\omega) \in K^*(\omega)$ и $\xi^1 \dots \xi^d = 1$ Р-п.н., то $\eta\xi \in (L^1)^d$.

(iii) Множества $\tilde{\mathcal{D}}_\lambda$ и $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ замкнуты. Тогда в силу замкнутости $\mathcal{L}$ соответствующие множества $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ замкнуты. Так как $\sum_{i=1}^d \xi^i \geq d$ $\mathbf{P}$ -п.н., то для любых $\eta \xi$ из соответствующих определяющих множеств имеем, что $\sum_{i=1}^d \mathbf{E} \eta \xi^i \geq d$, а следовательно, для любого $X \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ верно, что $X^i \leq C \sum_{j=1}^d \pi^{ji}$ $\mathbf{P}$ -п.н., откуда следует равномерная интегрируемость множеств $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$. Лемма 5.1 доказана.

В завершение этого пункта приведем результат, показывающий, что в естественных ситуациях сильное и слабое L^1 -пространства совпадают.

Предложение 5.1. (i) Пусть конус обменных курсов задан как в примере 2.1 и $\pi^{ij} \in L^\infty$ для всех i, j . Тогда $L_s^1(\tilde{\mathcal{D}}_\lambda) = L_w^1(\tilde{\mathcal{D}}_\lambda)$ и $L_s^1(\tilde{\mathcal{D}}_\mu) = L_w^1(\tilde{\mathcal{D}}_\mu)$.

(ii) Если все элементы из $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ ограничены общей константой и $\mathbf{1} \in \mathcal{D}$, где $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, то $L_s^1(\mathcal{D}) = L_w^1(\mathcal{D})$.

(iii) Если $\mathcal{D}$ — выпуклая комбинация $\sum_{n=1}^N a_n \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_N$ такие, что $L_s^1(\mathcal{D}_n) = L_w^1(\mathcal{D}_n)$, то $L_s^1(\mathcal{D}) = L_w^1(\mathcal{D})$.

(iv) Если $\mathcal{D} = \text{conv}(\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_N)$, где $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_N$ такие, что $L_s^1(\mathcal{D}_n) = L_w^1(\mathcal{D}_n)$, то $L_s^1(\mathcal{D}) = L_w^1(\mathcal{D})$.

Доказательство. Части (ii)–(iv) доказываются аналогично соответствующему утверждению в одномерном случае, доказанному в статье [9, п. 2.2], а часть (i) вытекает оттуда же при предположении об ограниченности всех π^{ij} в L^∞ (заметим, что это является достаточно сильным условием).

6. Задача распределения капитала. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $K(\omega)$ — конус обменных курсов, $\mathcal{D}$ — определяющее множество для данной когерентной меры риска ρ , множество $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ является замкнутым и равномерно интегрируемым, $X_1, \dots, X_n \in L_w^1(\mathcal{D})$. С финансовой точки зрения, X_i — прибыль i -го отдела фирмы за единичный период времени. Соответствующая когерентная функция полезности определяется как $u = -\rho$. В дальнейшем A° будет обозначать внутренность множества A . Приводимое ниже определение является многомерным обобщением определения из работы [13].

Определение 6.1. Назовем $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^d$ *распределением капитала между* $X_1, \dots, X_n$, если

(i) $\sum_{i=1}^n x_i \in \rho(\sum_{i=1}^n X_i)$;

(ii) для любых $h_1, \dots, h_n \geq 0$ верно, что $\sum_{i=1}^n h_i x_i \notin \rho^\circ(\sum_{i=1}^n h_i X_i)$.

С финансовой точки зрения, x_i — вклад i -го отдела фирмы в общий риск фирмы, или, другими словами, капитал, который должен быть выделен i -му отделу фирмы. Переформулируем задачу в терминах когерентной функции полезности.

Определение 6.2. Назовем $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^d$ *распределением полезности между* $X_1, \dots, X_n$, если

- (i) $\sum_{i=1}^n x_i \in u(\sum_{i=1}^n X_i)$;
 (ii) для любых $h_1, \dots, h_n \geq 0$ верно, что $\sum_{i=1}^n h_i x_i \notin u^0(\sum_{i=1}^n h_i X_i)$.

Рассматриваемая задача является многомерным аналогом задачи, рассмотренной в работах [9, п. 2.4], [13], [14], [16], [29], [33], [37].

Обозначим $D = \{EZ: Z \in \mathcal{D}\}$. Для $z \in D$ обозначим $\mathcal{D}_z = \{Z \in \mathcal{D}: EZ = z\}$. Это выпуклое, ограниченное, $(L^1)^d$ -замкнутое подмножество пространства $(L^1)^d$. Положим

$$G_z = \text{cl}\{E(\langle Z, X_1 \rangle, \dots, \langle Z, X_n \rangle), Z \in \mathcal{D}_z\}, \quad T_z = \arg \min_{x \in G_z} \langle e, x \rangle,$$

где $e = (1, \dots, 1)$ (n раз), $z \in D$. Символом $N_y(A)$ мы обозначим множество ненулевых внешних нормалей к множеству A в точке y . Приводимая ниже теорема дает геометрическое решение задачи распределения полезности.

Теорема 6.1. (i) Пусть $x_0 \in \partial u(\sum_{i=1}^n X_i)$ и $z_0 \in N_{x_0}(u(\sum_{i=1}^n X_i))$. Тогда существует набор $(x_1, \dots, x_n)$ такой, что выполнены следующие два условия:

- (a) $\sum_{i=1}^n x_i = x_0$;
 (b) $(\langle z_0, x_1 \rangle, \dots, \langle z_0, x_n \rangle) \in T_{z_0}$.

Любой набор такого вида является распределением полезности между $X_1, \dots, X_n$.

(ii) Все решения задачи о распределении полезности между $X_1, \dots, X_n$ представляются в указанном выше виде (с некоторыми x_0, z_0).

(iii) Если к тому же $X_1, \dots, X_n \in L_s^1(\mathcal{D})$ и $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ слабо компактно, то приведенные выше утверждения остаются верными при замене условия (b) на условие

(b') существует $Z \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}(\sum_{i=1}^n X_i, x_0)$ такой, что

$$E \sum_{i=1}^d x_k^i Z^i = E \sum_{i=1}^d X_k^i Z^i, \quad k = 1, \dots, n, \quad EZ = z_0. \quad (6.1)$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 6.1. Пусть $v: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая коническая функция. Тогда $v(x) = \sup_{y \in U} \langle x, y \rangle$, где $U = \{y \in \mathbf{R}^d: \langle x, y \rangle \leq v(x) \text{ для любого } x \in \mathbf{R}^d\}$.

Доказательство. Возьмем $K = \{(x, z) \in \mathbf{R}^{d+1}: z \geq v(x)\}$ — выпуклый замкнутый конус. Обозначим

$$K^* = \{(x', z') \in \mathbf{R}^{d+1}: \forall (x, z) \in K \langle (x', z'), (x, z) \rangle \leq 0\}.$$

Заметим, что $K^* \subseteq \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_-$ — выпуклый замкнутый конус, причем $K^* \cap (\mathbf{R}^d \times (-\infty, 0))$ всюду плотно в K^* . Если $y \in U$ и $(x, z) \in K$, то $\langle (y, -1), (x, z) \rangle = \langle x, y \rangle - z \leq 0$, а значит, $(y, -1) \in K^*$. Обратно, если

$(y, -1) \in K^*$, то для любой пары $(x, v(x)) \in K$ имеем $\langle x, y \rangle \leq v(x)$, а следовательно, $y \in U$. Отсюда получаем, что

$$U = \{y \in \mathbf{R}^d: (y, -1) \in K^*\} = K^* \cap \{x^{d+1} = -1\}.$$

Обозначим $L = \text{cone}\{(x, z): x \in U, z = -1\}$. Из доказанного выше видно, что замыкание L совпадает с K^* . Обозначим $K^{**} = \{(x, z) \in \mathbf{R}^{d+1}: \forall (x', z') \in K^* \langle (x', z'), (x, z) \rangle \leq 0\}$, $L^* = \{x \in \mathbf{R}^{d+1}: \forall x' \in L \langle x', x \rangle \leq 0\}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \sup_{y \in U} \langle x, y \rangle &= \inf \{z \in \mathbf{R}^d: (x, z) \in L^*\} = \inf \{z \in \mathbf{R}^d: (x, z) \in K^{**}\} \\ &= \inf \{z \in \mathbf{R}^d: (x, z) \in K\} = v(x), \end{aligned}$$

где первое равенство следует из того, что $\langle (x, z), (y, -1) \rangle \leq 0$ для любого $y \in U$, и того, что в случае $z = v(x)$ в этом неравенстве достигается равенство, а предпоследнее равенство следует из теоремы о биполярах (см. [34, гл. 2]). Лемма 6.1 доказана.

Заметим, что значение $\langle e, y \rangle$ одно и то же для всех $y \in T_z$ (будем обозначать это число через $\langle e, T_z \rangle$). Тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 6.2. *Условия (i), (ii) из определения 6.2 задачи о распределении полезности эквивалентны следующим двум условиям:*

- (i) для любого $z \in D$ выполнено неравенство $\langle z, \sum_{i=1}^n x_i \rangle \leq \langle e, T_z \rangle$;
- (ii) для любых $h_1, \dots, h_n \geq 0$ существует $z \in D \setminus \{0\}$ такое, что $\langle z, \sum_{i=1}^n h_i x_i \rangle \geq v_z(\sum_{i=1}^n h_i X_i)$, где $v_z(X) = \inf_{Z \in \mathcal{D}_z} \mathbf{E}\langle Z, X \rangle$, $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

Доказательство. В силу замкнутости, выпуклости и ограниченности множества $\mathcal{D}_z$

$$\begin{aligned} u(X) &= \left\{ x \in \mathbf{R}^d: \forall Z \in \mathcal{D} \sum_{i=1}^d \mathbf{E} x^i Z^i \leq \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i \right\} \\ &= \bigcap_{z \in D} \left\{ x \in \mathbf{R}^d: \forall Z \in \mathcal{D}_z \sum_{i=1}^d \mathbf{E} x^i Z^i \leq \sum_{i=1}^d \mathbf{E} X^i Z^i \right\} \\ &= \bigcap_{z \in D} \{x \in \mathbf{R}^d: \langle z, x \rangle \leq v_z(X)\}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Заметим, что функция $v_z(X)$ является конической по z , т.е. $v_{\lambda z}(X) = \lambda v_z(X)$ для $\lambda \geq 0$. Лемма 6.1 показывает, что $v_z(X)$ является опорной функцией множества $u(X)$ в направлении z . Учитывая (6.2), мы получаем следующее представление: $u(X) = \bigcap_{z \in D} \{x \in \mathbf{R}^d: \langle z, x \rangle \leq v_z(X)\}$, где $v_z(X) = \inf_{Z \in \mathcal{D}_z} \mathbf{E}\langle Z, X \rangle$, $\inf\{\emptyset\} = +\infty$, а также $v_z(X) = \sup_{x \in u(X)} \langle z, x \rangle$.

В силу этого представления получаем утверждение леммы.

Лемма 6.3. *Если множество $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ замкнуто и равномерно интегрируемо, то множество D является замкнутым множеством в $\mathbf{R}^d$.*

Доказательство. Так как множество $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ равномерно интегрируемо, то, в силу теоремы Данфорда–Петтиса (см. [15, п. 4.21]), оно является слабо предкомпактным. Так как множество $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ замкнуто, то оно и слабо замкнуто, а значит, и слабо компактно. Поэтому множество $D \cap L$, где $D = \{EZ: Z \in \mathcal{D}\}$, а $L = \{z \in \mathbf{R}^d: \sum_{i=1}^d z^i = 1\}$, замкнуто, а значит, и множество D замкнуто.

Доказательство теоремы 6.1. (i) Множество T_{z_0} непусто, так как $\mathcal{D}_{z_0}$ непусто (в силу леммы 6.3 и представления (6.2)) и $X_1, \dots, X_n \in L_w^1(\mathcal{D})$. Поскольку $\langle z_0, x_0 \rangle = v_{z_0}(\sum_{i=1}^n X_i) = \langle e, T_{z_0} \rangle$, то $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющие условию теоремы, существуют. Докажем, что если набор $(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет условиям (а), (б) теоремы, то $(x_1, \dots, x_n)$ — распределение полезности между $X_1, \dots, X_n$. Так как $\sum_{i=1}^n x_i = x_0$, то выполнено условие (i) леммы 6.2. Для любых $h_1, \dots, h_n \geq 0$ получаем, что

$$\begin{aligned} v_{z_0} \left(\sum_{i=1}^n h_i X_i \right) &= \inf_{Z \in \mathcal{D}_{z_0}} \mathbf{E} \left\langle Z, \sum_{i=1}^n h_i X_i \right\rangle \\ &= \inf_{z \in \mathcal{D}_{z_0}} \left\langle (h_1, \dots, h_n), (\mathbf{E}\langle Z, X_1 \rangle, \dots, \mathbf{E}\langle Z, X_n \rangle) \right\rangle \\ &= \inf_{y \in G_{z_0}} \langle (h_1, \dots, h_n), y \rangle \\ &\leq \left\langle (h_1, \dots, h_n), (\langle z_0, x_1 \rangle, \dots, \langle z_0, x_n \rangle) \right\rangle = \left\langle z_0, \sum_{i=1}^n h_i x_i \right\rangle, \end{aligned}$$

откуда следует выполнение условия (ii) леммы 6.2. Таким образом, $(x_1, \dots, x_n)$ — распределение полезности между $X_1, \dots, X_n$.

(ii) Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — распределение полезности. Очевидно, что $x_0 := \sum_{i=1}^n x_i \in \partial u(\sum_{i=1}^n X_i)$. Поскольку функция $v_z(X)$ коническая, можно считать, что

$$u(X) = \bigcap_{z \in D \cap L} \{x \in \mathbf{R}^d: \langle z, x \rangle \leq v_z(X)\}. \quad (6.3)$$

Обозначим $N_0 = N_{x_0}(u(\sum_{i=1}^n X_i))$.

Случай 1. Предположим, что существует $z_0 \in N_0$ такое, что

$$\left\langle z_0, \sum_{i=1}^n h_i x_i \right\rangle \geq v_{z_0} \left(\sum_{i=1}^n h_i X_i \right) \quad \forall h_1, \dots, h_n \geq 0. \quad (6.4)$$

Для любого $h \in \mathbf{R}^n$ обозначим $L_{z_0}(h) = \{x \in \mathbf{R}^n: \langle h, x \rangle = \min_{y \in G_{z_0}} \langle h, y \rangle\}$ и $M_{z_0}(h) = \{x \in \mathbf{R}^n: \langle h, x \rangle \geq \min_{y \in G_{z_0}} \langle h, y \rangle\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle z_0, x_i \rangle &= \langle z_0, x_0 \rangle = v_{z_0} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \inf_{Z \in \mathcal{D}_{z_0}} \mathbf{E} \left\langle Z, \sum_{i=1}^n X_i \right\rangle = \min_{y \in G_{z_0}} \langle e, y \rangle, \end{aligned} \quad (6.5)$$

Рис. 2. Иллюстрация к решению задачи о распределении полезности

где второе равенство следует из того, что $z_0 \in N_0$. Отсюда получаем, что $(\langle z_0, x_1 \rangle, \dots, \langle z_0, x_n \rangle) \in L_{z_0}(e)$. Проводя вычисления, аналогичные (6.5), и используя (6.4), получаем, что для любого $h \in \mathbf{R}_+^n$ выполнено включение $(\langle z_0, x_1 \rangle, \dots, \langle z_0, x_n \rangle) \in M_{z_0}(h)$. Таким образом, так как

$$\bigcap_{h \in \mathbf{R}_+^n} M_{z_0}(h) = G_{z_0} + \mathbf{R}_+^n,$$

то $(\langle z_0, x_1 \rangle, \dots, \langle z_0, x_n \rangle) \in T_{z_0}$.

Рис. 3.

Случай 2. Предположим, что не существует $z_0 \in N_0$ такого, что выполнено (6.4). Для $h \in \mathbf{R}^n$ и $z \in \mathbf{R}^d$ зададим функцию $\varphi_z(h) = \sum_{i=1}^n \langle z, h_i x_i \rangle$. Заметим, что если $z \in N_0$, то $\varphi_z(e) = v_z(\sum_{i=1}^n X_i)$. Обозначим $w(z) = -(\langle z, x_1 \rangle, \dots, \langle z, x_n \rangle)$. Рассмотрим рис. 3. Заметим, что $w(z)$

будет проекцией нормали к φ_z на $\mathbf{R}^n$ при условии, что ее проекция на ось z равна 1.

Обозначим

$$K_z = \text{cone} \left\{ \left(h, v_z \left(\sum_{i=1}^n (h_i + e_i) X_i \right) - v_z \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \right) : h \in \mathbf{R}^n \right\}.$$

Положим

$$K^*(z) = \{h \in \mathbf{R}^{n+1} : \forall y \in K_z \langle h, y \rangle \leq 0\},$$

$$W(z) = \{h \in \mathbf{R}^n : (h, 1) \in K^*(z)\}.$$

Рис. 4.

Очевидно, что $W(\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2) \supseteq \alpha W(z_1) + (1 - \alpha)W(z_2)$, если $z_1, z_2 \in N_0 \cap L$, $\alpha \in [0, 1]$ (см. рис. 4). Заметим, что если $x_k \in W(z_k)$ и $z_k \rightarrow z_\infty$, $x_k \rightarrow x_\infty$, то $x_\infty \in W(z_\infty)$. В силу сделанного выше предположения $(z, w(z)) \notin (z, W(z))$ для любого $z \in N_0 \cap L$. Множество $\{(z, w(z)) : z \in N_0 \cap L\}$ выпукло и компактно, а множество $\{(z, W(z)) : z \in N_0 \cap L\}$ выпукло и замкнуто. Поэтому по теореме Хана-Банаха существует $(d + n)$ -мерный вектор (β, γ) , где $\beta \in \mathbf{R}^d$, $\gamma \in \mathbf{R}^n$, такой, что

$$\langle \beta, z \rangle + \langle \gamma, w(z) \rangle > \sup_{h \in W(z)} (\langle \beta, z \rangle + \langle \gamma, h \rangle) \quad \forall z \in N_0 \cap L.$$

Следовательно, для любого $z \in N_0 \cap L$

$$(\gamma, \varphi_z(e + \gamma)) \in \left(0, v_z \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \right) + K_z^\circ. \quad (6.6)$$

Положим

$$a_z = \sup \left\{ a > 0 : v_z \left(\sum_{i=1}^n (e_i + a\gamma_i) X_i \right) \geq \varphi_z(e + a\gamma) \right\} \wedge 1,$$

где $\sup\{\emptyset\} = 0$. Обозначим $a_* = \inf_{z \in N_0 \cap L} a_z$. Заметим, что функция $v_z(\sum (e_i + a\gamma_i) X_i)$ непрерывна по z и по a , а также вогнута по a и выпукла по z .

Если $a_* = 0$, то выберем последовательность таких $z_k \in N_0 \cap L$, что $a(z_k) \rightarrow 0$. Так как $z_k \in N_0 \cap L$, то можно перейти к сходящейся подпоследовательности. Для $z_\infty = \lim z_k$ выполнены соотношения

$v_{z_\infty}(\sum_{i=1}^n X_i) = \varphi_{z_\infty}(e)$ и $v_{z_\infty}(\sum_{i=1}^n (e_i + a\gamma_i) X_i) \leq \varphi_{z_\infty}(e + a\gamma)$ для любого $a > 0$ (см. рис. 6), откуда $(\gamma, \varphi_{z_\infty}(e + \gamma)) \notin (0, v_{z_\infty}(\sum_{i=1}^n X_i)) + K_{z_\infty}^\circ$, но $z_\infty \in N_0 \cap L$, следовательно, получаем противоречие с (6.6).

Рис. 5. Иллюстрация к (6.6)

Если $a_* > 0$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $z_k \in (D \setminus N_0) \cap L$ (см. рис. 7) такое, что

$$\left\langle z_k, \sum_{i=1}^n (e_i + a\gamma_i) x_i \right\rangle \geq v_{z_k} \left(\sum_{i=1}^n (e_i + a\gamma_i) X_i \right) \quad \forall a \geq \frac{a_*}{k}.$$

Рис. 6.

Рис. 7.

Из последовательности (z_k) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Ее предел обозначим z_∞ . Для каждого z_k

$$v_{z_k} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sup_{x \in u(\sum_{i=1}^n X_i)} \langle z_k, x \rangle > \langle z_k, x_0 \rangle = \varphi_{z_k}(e).$$

Так как функции $\varphi_z(e + a\gamma)$ и $v_z(\sum_{i=1}^n (e_i + a\gamma_i) X_i)$ непрерывны по z , то

$$\varphi_{z_\infty}(e + a\gamma) \geq v_{z_\infty} \left(\sum_{i=1}^n (e_i + a\gamma_i) X_i \right), \quad \varphi_{z_\infty}(e) \leq v_{z_\infty} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \quad \forall a > 0.$$

А значит, в силу непрерывности по a функций $\varphi_z(e + a\gamma)$ и $v_z(\sum_{i=1}^n (e_i + a\gamma_i) X_i)$ получаем, что $\varphi_{z_\infty}(e) = v_{z_\infty}(\sum_{i=1}^n X_i)$. Это означает, что $z_\infty \in N_0$, $a_{z_\infty} = 0$, что противоречит неравенству $a_* > 0$.

Таким образом, получаем противоречие. Тем самым, ситуация случая 2 невозможна, что завершает доказательство части (ii).

(iii) Если же $X_1, \dots, X_n \in L_s^1(\mathcal{D})$ и $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ слабо компактно, то эквивалентность условий (b) и (b') следует из определения множества $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}(\sum_{i=1}^n X_i, x_0)$ и его непустоты. Теорема 6.1 доказана.

Рассмотрим вопрос о единственности решения задачи о распределении полезности.

Во-первых, рассмотрим условие единственности x_0 . Точка x_0 не единственна, так как x_0 — любая точка границы множества $u(\sum_{i=1}^n X_i)$, а граница одноточечна только в случае $d = 1$.

Во-вторых, при фиксированном $x_0 \in \partial u(\sum_{i=1}^n X_i)$ рассмотрим условие единственности $z_0 \in N_{x_0}(u(\sum_{i=1}^n X_i))$ с точностью до умножения на положительную константу (так как если $z_0 \in N_{x_0}(u(\sum_{i=1}^n X_i))$, $\lambda > 0$, то $\lambda z_0 \in N_{x_0}(u(\sum_{i=1}^n X_i))$). Пусть функция $v_z(\sum_{i=1}^n X_i)$ строго вогнута по z , т.е. для любых $h_1, h_2 > 0$ и $z_1 \neq \lambda z_2$, где $\lambda > 0$, выполняется неравенство

$$v_{h_1 z_1 + h_2 z_2} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) < h_1 v_{z_1} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) + h_2 v_{z_2} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right).$$

Предположим, что существуют $z_1, z_2 \in N_{x_0}(u(\sum_{i=1}^n X_i))$ такие, что $z_1 \neq \lambda z_2$. Тогда возьмем $z_3 = z_1 + z_2$. Так как

$$v_{z_3} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) < v_{z_1} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) + v_{z_2} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right),$$

то $\langle z_3, x_0 \rangle > v_{z_3}(\sum_{i=1}^n X_i)$, значит, $x_0 \notin u(\sum_{i=1}^n X_i)$, а следовательно, получаем противоречие. Таким образом, если функция $v_z(\sum_{i=1}^n X_i)$ строго вогнута по z , то $z_0 \in N_{x_0}(u(\sum_{i=1}^n X_i))$ единственна с точностью до умножения на константу.

В-третьих, рассмотрим условие одноточечности множества T_{z_0} при фиксированных x_0, z_0 . Если G_{z_0} строго выпукло (внутренность непуста и граница не содержит интервалов), то множество T_{z_0} при фиксированной паре (z_0, x_0) одноточечно.

В-четвертых, при фиксированных точке из T_{z_0} и паре z_0, x_0 распределение полезности $(x_1, \dots, x_n)$ единственно с точностью до сдвига на векторы, перпендикулярные z_0 , т.е. если $a_1, \dots, a_n$ — векторы, перпендикулярные z_0 и такие, что $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, а $(x_1, \dots, x_n)$ — распределение полезности, то $(x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$ — распределение полезности.

7. Риск-вклад. Пусть Y — случайная величина, имеющая смысл прибыли за единицу времени некоторого портфеля, например, портфеля компании (т.е. Y — это разность между стоимостью портфеля в момент времени 1 и в момент времени 0). Пусть X имеет смысл прибыли некоторого другого портфеля. Пусть u — классическая когерентная функция полезности. Вкладом полезности X в Y называется число

$$u^c(X; Y) = \inf_{Q \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}(Y)} \mathbf{E}_Q X \quad (7.1)$$

(см. [9, п. 2.5]). Финансовый смысл этого выражения становится ясен из следующего соотношения, справедливого при некоторых интегральных ограничениях на X, Y :

$$u^c(X; Y) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} [u(Y + \varepsilon X) - u(Y)], \quad (7.2)$$

которое неформально означает следующее: если X мала по сравнению с Y , то $u^c(X; Y) \approx u(X + Y) - u(Y)$ (см. [9, п. 2.5]).

Возникает проблема, как перенести понятие вклада полезности на многомерный случай. Пусть Y — многомерный случайный вектор, имеющий смысл портфеля валют в момент времени 1, т.е. Y^i — количество единиц i -й валюты в портфеле в момент времени 1. Пусть y_0 — неслучайный вектор, имеющий смысл портфеля валют в момент времени 0. Пусть также имеется другой портфель, значение которого в момент времени 1 характеризуется случайным вектором X , а в момент времени 0 — неслучайным вектором x_0 . Пусть u — многомерная когерентная функция полезности с определяющим множеством $\mathcal{D}$. Соответствующая когерентная мера риска определяется как $\rho = -u$. Предположим, что $y_0 \in \partial \rho(Y)$, так как только в этом случае можно дать осмысленное определение риск-вклада $\rho_{y_0}^c(X; Y)$, являющегося многомерным аналогом для рассмотренного в [9, п. 2.5].

О п р е д е л е н и е 7.1. Вкладом полезности X в Y в точке $y \in \partial u(Y)$ называется множество

$$u_y^c(X; Y) = \left\{ x \in \mathbf{R}^d : \forall Z \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}(Y, y) \quad \mathbf{E} \sum_{i=1}^d x^i Z^i \leq \mathbf{E} \sum_{i=1}^d X^i Z^i \right\}. \quad (7.3)$$

Риск-вклад от X в Y в точке $y_0 \in \partial \rho(Y)$ определяется следующим образом: $\rho_{y_0}^c(X; Y) = -u_{-y_0}^c(X; Y)$.

Вклад полезности является многомерной когерентной функцией полезности, если $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}(Y, y) \neq \emptyset$.

З а м е ч а н и е. Если множество $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ слабо компактно, а $X, Y \in L_s^1(\mathcal{D})$, то по теореме 6.1 для $X_1 = X$, $X_2 = Y - X$, $x_0 = y$ получаем, что для любого $z \in N_y(u(Y))$ и для любого $Z \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}(Y, y)$ такого, что $\mathbf{E}Z = z$, верно равенство $\mathbf{E} \sum_{i=1}^d X^i Z^i = \langle z, x_1 \rangle$, где $(\langle z, x_1 \rangle, \langle z, y - x_1 \rangle) \in T_z$. Следовательно, используя (7.3), получаем, что

$$u_y^c(X; Y) = \left\{ x \in \mathbf{R}^d : \forall z \in N_y(u(Y)) \quad \langle z, x \rangle \leq v_z^c(X; Y) \right\}, \quad (7.4)$$

где $v_z^c(X; Y) = \inf \{x : \text{существует } x^1 \text{ такое, что } (x, x^1) \in T_z\}$, $T_z = \arg \min_{x \in G_z} \langle e, x \rangle$, а $G_z = \text{cl}\{\mathbf{E}(\langle Z, X \rangle, \langle Z, Y - X \rangle), Z \in \mathcal{D}_z\}$.

Используя формулу (7.4), можно определить риск-вклад при более слабых, чем выше, условиях: $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ замкнуто и равномерно интегрируемо, а $X, Y \in L_w^1(\mathcal{D})$.

Напомним, что A° обозначает внутренность множества A .

Приводимая ниже теорема имеет следующую неформальную интерпретацию: если вектор X мал по сравнению с Y , а вектор x_0 мал по сравнению с y_0 , то $y_0 + x_0 \in \rho(X + Y)$ тогда и только тогда, когда $x_0 \in \rho_{y_0}^c(X; Y)$. В теореме предполагается, что $X, Y \in L_s^1(\mathcal{D})$, а $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ замкнуто и равномерно интегрируемо.

Теорема 7.1. (i) Если $x \notin u_y^c(X; Y)$, то $y + \varepsilon x \notin u(Y + \varepsilon X)$ для любого $\varepsilon > 0$.

(ii) Если $x \in (u_y^c)^\circ(X; Y)$, то существует $\delta > 0$ такое, что $y + \varepsilon x \in u(Y + \varepsilon X)$ для любого $\varepsilon \in (0, \delta)$.

Доказательство. Шаг 1. Аналогично [9, теорема 2.16] получаем, что $v_z^c(X; Y) = x_z$, где $x_z = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1}(v_z(Y + \varepsilon X) - v_z(Y))$, а функция v_z определена в предыдущем пункте. Отсюда и из (7.4) следует, что

$$u_y^c(X; Y) = \{x \in \mathbf{R}^d: \forall z \in N_y(u(Y)) \langle z, x \rangle \leq x_z\}. \quad (7.5)$$

Шаг 2. (i) Пусть $x \notin u_y^c(X; Y)$. В силу (7.5) существует $z \in N_y(u(Y))$ такое, что $\langle z, x \rangle > x_z$. Следовательно, в силу вогнутости функции $l \mapsto v_z(Y + lX)$ для любого $l > 0$ выполнено неравенство $\langle z, y + lx \rangle > v_z(Y + lX)$. Значит, не существует $\varepsilon > 0$ такого, что $(y + \varepsilon x) \in u(Y + \varepsilon X)$.

Рис. 8.

Рис. 9.

(ii) Пусть $x \in (u_y^c)^\circ(X; Y)$. Предположим, что не существует $\varepsilon > 0$ такого, что $(y + \varepsilon x) \in u(Y + \varepsilon X)$. Для любого z из $N_y(u(Y)) \cap L$ обозначим $r(z) = \inf\{l > 0: \langle z, y + lx \rangle \geq v_z(Y + lX)\}$, где $L = \{z: \sum z^i = 1\}$, а $\inf\{\emptyset\} = +\infty$ (см. рис. 8). Возьмем $r = \inf\{r(z) \wedge 1: z \in N_y(u(Y)) \cap L\}$.

Если $r = 0$, то выберем сходящуюся подпоследовательность z_k такую, что $z_k \in N_y(u(Y)) \cap L$ и $r(z_k) \rightarrow 0$. Пусть $z_\infty = \lim z_k$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $\langle z_\infty, y + \varepsilon x \rangle \geq v_{z_\infty}(Y + \varepsilon X)$. Поскольку $N_y(u(Y)) \cap L$ замкнуто, то $z_\infty \in N_y(u(Y))$, а это означает, что $\langle z_\infty, y \rangle = v_{z_\infty}(Y)$. Следовательно, $\langle z_\infty, x \rangle \geq x_{z_\infty}$. С учетом (7.5) это противоречит включению $x \in (u_y^c)^\circ(X; Y)$; таким образом, существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \delta)$ имеет место включение $y + \varepsilon x \in u(Y + \varepsilon X)$.

Если $r > 0$, то для любого $k \in \mathbf{N}$ и для любого $z \in N_y(u(Y))$ выполнено неравенство $\langle z, y + (r/k)x \rangle < v_z(Y + (r/k)X)$. Так как $y + (r/k)x \notin u(Y + (r/k)X)$, то существует $z_k \in (D \cap L) \setminus N_y(u(Y))$ такое, что $\langle z_k, y + (r/k)x \rangle > v_{z_k}(Y + (r/k)X)$ (см. рис. 9). Тогда из последовательности (z_k) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть z_∞ обозначает ее предел. Так как $z_k \in (D \cap L) \setminus N_y(u(Y))$, то $\langle z_k, y \rangle < v_{z_k}(Y)$. Поскольку функции $\langle z, y + lx \rangle$ и $v_z(Y + lX)$ непрерывны по z , то $\langle z_\infty, y + lx \rangle \geq v_{z_\infty}(Y + lX)$ при $l > 0$, $\langle z_\infty, y \rangle \leq v_{z_\infty}(Y)$. А значит, в силу непрерывности по l функций $\langle z_\infty, y + lx \rangle$ и $v_{z_\infty}(Y + lX)$, выполнено равенство $\langle z_\infty, y \rangle = v_{z_\infty}(Y)$, откуда $\langle z_\infty, x \rangle \geq x_z$, т.е. $x \notin (u_y^c)^\circ(X; Y)$. Следовательно, получаем противоречие. Теорема 7.1 доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 7.1 является многомерным аналогом утверждения (7.2).

8. Приложение. Для доказательства теоремы о представлении нам необходимы приводимые в этом пункте вспомогательные утверждения. Сначала напомним несколько фактов из выпуклого анализа.

Лемма 8.1. Пусть E, E^* — пространства в двойственности. Пусть A — выпуклый, а $\sigma(E, E^*)$ — замкнутый конус в E , $A^* = \{x \in E^*: \forall y \in A \langle x, y \rangle \geq 0\}$, $A^{**} = \{x \in E: \forall y \in A^* \langle x, y \rangle \geq 0\}$. Тогда $A^{**} = A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $A^{**} \supseteq A$. Предположим, что существует $\alpha \in A^{**} \setminus A$. Тогда, согласно теореме Хана–Банаха, существует $x' \in E^*$ такой, что $\langle \alpha, x' \rangle < 0$ и $\langle x, x' \rangle \geq 0$ для любого $x \in A$. Отсюда получаем, что $x' \in A^*$ и $\alpha \notin A^{**}$. Это противоречит включению $\alpha \in A^{**}$. Значит, $A^{**} \subseteq A$, а следовательно, $A^{**} = A$.

Лемма 8.2. Пусть E, E^* — пространства в двойственности. Пусть A — выпуклое, а $\sigma(E, E^*)$ — замкнутое подмножество в E . Тогда $A = \{y \in E: \forall x \in E^* \langle x, y \rangle \geq \alpha(x)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $y' \notin A$ существует $x \in E^*$ такое, что $\langle x, y' \rangle < \alpha(x)$. Если $y \in A$, то для любого $x \in E^*$ выполнено неравенство $\langle x, y \rangle \geq \alpha(x)$. Таким образом, мы можем отделить A от остальной части пространства E системой функций $\alpha(x)$.

Перейдем к рассмотрению топологического пространства $\mathcal{CL}$ непустых замкнутых подмножеств $\mathbf{R}^d$. Через $\mathcal{E}(\mathcal{CL})$ обозначим σ -алгебру Эфроса (см. [5], [6]), порожденную множествами $A_V = \{D \in \mathcal{CL}: D \cap V \neq \emptyset\}$, где V пробегает класс открытых множеств в $\mathbf{R}^d$. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Тогда под измеримостью отображения $F: \Omega \rightarrow \mathcal{CL}$ мы будем понимать его $\mathcal{F}|\mathcal{E}(\mathcal{CL})$ -измеримость. Обозначим $\rho(x, y) = |x - y|$ расстояние между точками $x, y \in \mathbf{R}^d$ и положим

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y), \quad A \subset \mathbf{R}^d.$$

Топологией Вейсмана τ_W на $\mathcal{CL}$ называется слабейшая топология, в которой все функции $\{\rho(x, \cdot), x \in \mathbf{R}^d\}$ непрерывны. Известно, что $(\mathcal{CL}, \tau_W)$ является польским пространством (см. [6], [38]) и борелевская σ -алгебра совпадает с σ -алгеброй Эфроса (см. [23], [24]). Пусть $\mathcal{K}$ обозначает множество непустых замкнутых конусов C таких, что $C \neq \mathbf{R}^d$, $C + \mathbf{R}_-^d = C$, а $\mathcal{C}$ — множество непустых выпуклых замкнутых множеств на $\mathbf{R}^d$. Пространства $\mathcal{K}$ и $\mathcal{C}$ являются подпространствами $\mathcal{CL}$, поэтому приводимая ниже теорема 8.1 верна для них автоматически.

Если C — выпуклое замкнутое множество в $\mathbf{R}^d$, то

$$C = \{x \in \mathbf{R}^d: \forall z \in \mathbf{R}^d \langle z, x \rangle \leq C_z\},$$

где $C_z = \sup_{x \in C} \langle z, x \rangle$. Тогда (см. [32]) для измеримости отображения $K: \Omega \mapsto \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы расширенные случайные величины $K_z = \sup_{x \in K} \langle z, x \rangle$ были измеримы при всех $z \in \mathbf{R}^d$. Отсюда получаем справедливость следующего замечания.

З а м е ч а н и е. Пусть K — измеримый случайный выпуклый конус. Тогда K^* — случайный выпуклый замкнутый конус, где

$$K^*(\omega) = \{x \in \mathbf{R}^d: \forall z \in K(\omega) \langle x, z \rangle \leq 0\}.$$

Следовательно, для фиксированного $z \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ случайная величина K_z^* принимает значения 0 и $+\infty$. При этом

$$\begin{aligned} \{\omega: K_z^*(\omega) = 0\} &= \{\omega: \forall z^* \in K^*(\omega) \langle z, z^* \rangle \leq 0\} = \{\omega: z \in K^{**}(\omega)\} \\ &= \{\omega: z \in K(\omega)\} = \{\omega: K(\omega) \cap V_z = V_z\}, \end{aligned}$$

где $K_z^*(\omega) = \sup_{x \in K^*(\omega)} \langle z, x \rangle$, $V_z = \{\alpha z: \alpha \geq 0\}$, а предпоследнее равенство следует из теоремы о биполярах (см. [34, гл. 2]). Тогда $\{\omega: K_z^*(\omega) = +\infty\} = \Omega \setminus \{\omega: K(\omega) \cap V_z = V_z\}$. Следовательно, $K_z^*(\omega)$ — измеримая расширенная случайная величина, поэтому K^* — измеримый случайный выпуклый замкнутый конус.

Пусть Z — случайная величина, тогда Z_c^* — случайное выпуклое замкнутое множество, где $Z_c^*(\omega) = \{x \in \mathbf{R}^d: \langle x, Z(\omega) \rangle \leq c\}$. Тогда для фиксированного $z \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ и $d \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \{\omega: (Z_c^*)_z(\omega) \leq d\} &= \{\omega: c\|z(\omega)\| \leq d\|z\|\} \cap \{\omega: Z(\omega) \in V_z \setminus \{0\}\} \\ &\cup \{\omega: Z(\omega) = 0, c < 0\}, \end{aligned}$$

где $(Z_c^*)_z(\omega) = \sup_{x \in Z_c^*(\omega)} \langle z, x \rangle$. Следовательно, $(Z_c^*)_z(\omega)$ — измеримая расширенная случайная величина, а значит, Z_c^* — измеримое случайное выпуклое замкнутое множество.

Кроме того, поскольку $\{Z(\omega)\} \cap K(\omega)$ — измеримое случайное выпуклое замкнутое множество, то множество $\{\omega: \{Z(\omega)\} \cap K(\omega) \neq \emptyset\}$, а значит, и $\{\omega: Z(\omega) \in K(\omega)\}$ является $\mathcal{F}$ -измеримым.

Сформулируем еще одно утверждение, касающееся топологического пространства $\mathcal{CL}$.

Теорема 8.1. Для $\mathcal{F}$ -измеримости непустого замкнутого многозначного отображения $F: \Omega \rightarrow \mathcal{CL}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало множество измеримых функций $\xi_i: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$, $i = 1, \dots, \infty$, таких, что $\xi_i(\omega) \in F(\omega)$ $\mathbf{P}$ -п.н., а множества $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^\infty$ плотны в $F(\omega)$ при каждом ω .

Доказательство этой теоремы можно найти в [25, теорема 5.6], [31, с. 331].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acerbi C. Spectral measures of risk: a coherent representation of subjective risk aversion. — J. Banking and Finance, 2002, v. 26, p. 1505–1518.
2. Acerbi C., Tasche D. On the coherence of expected shortfall. — J. Banking and Finance, 2002, v. 26, № 7, p. 1487–1503.
3. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Thinking coherently. — Risk, 1997, v. 10, № 11, p. 68–71.
4. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk. — Math. Finance, 1999, v. 9, № 3, p. 203–228.
5. Barbati A., Beer G., Hess C. The Hausdorff metric topology, the Attouch–Wets topology, and the measurability of set-valued functions. — J. Convex Anal., 1994, v. 1, № 1, p. 107–119.
6. Beer G. A Polish topology for the closed subsets of a Polish space. — Proc. Amer. Math. Soc., 1991, v. 113, № 4, p. 1123–1133.
7. Burgert C., Rüschendorf L. Consistent risk measures for portfolio vectors. — Insurance Math. Econom., 2006, v. 38, № 2, p. 289–297.
8. Cascos I., Molchanov I. Multivariate risks and depth-trimmed regions. — Finance Stoch., 2007, v. 11, № 3, p. 373–397.
9. Черный А. С. Нахождение справедливых цен на основе когерентных мер риска. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, № 3, с. 506–540.
10. Черный А. С. Равновесие на основе когерентных мер риска.
<http://mech.math.msu.su/~cherny>.
11. Cherny A. S. Weighted V@R and its properties. — Finance Stoch., 2006, v. 10, № 2, p. 367–393.
12. Delbaen F. Coherent risk measures on general probability spaces. — Advances in Finance and Stochastics. Essays in Honor of Dieter Sondermann. Ed. by K. Sandmann, P. Schönbucher. Berlin: Springer, 2002, p. 1–37.
13. Delbaen F. Coherent monetary utility functions. Pisa lecture notes.
<http://www.math.ethz.ch/~delbaen>
14. Denault M. Coherent allocation of risk capital. — J. Risk, 2001, v. 4, № 1, p. 1–34.
15. Эдвардс Р. Функциональный анализ: теория и приложения. М.: Мир, 1969, 1071 с.
16. Fischer T. Risk capital allocation by coherent risk measures based on one-sided moments. — Insurance Math. Econom., 2003, v. 32, № 1, p. 135–146.
17. Föllmer H., Schied A. Convex measures of risk and trading constraints. — Finance Stoch., 2002, v. 6, № 4, p. 429–447.
18. Föllmer H., Schied A. Robust preferences and convex measures of risk. — Advances in Finance and Stochastics. Essays in Honor of Dieter Sondermann. Ed. by K. Sandmann, P. Schönbucher. Berlin: Springer, 2002, p. 39–56.
19. Föllmer H., Schied A. Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time. Berlin: de Gruyter, 2004, 459 p.
20. Frittelli M., Rosazza Gianin E. Putting order in risk measures. — J. Banking Finance, 2002, v. 26, № 7, p. 1473–1486.
21. Grothendieck A. Topological Vector Spaces. New York–London–Paris: Gordon and Breach, 1973, 245 p.

22. Hamel A. H., Heyde F., Höhne M. Set-valued measures of risk. Preprint № 15-2007. Halle: Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Institut für Mathematik, 2007.
23. Hess C. Loi de probabilité des ensembles aléatoires à valeurs fermées dans un espace métrique séparable. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1983, v. 296, № 21, p. 883–886.
24. Hess C. Contributions à l'étude de la mesurabilité, de la loi de probabilité, et de la convergence des multifonctions. Thèse d'État, Montpellier, 1986.
25. Himmelberg C. J. Measurable relations. — Fund. Math., 1975, v. 87, p. 53–72.
26. Jouini E., Meddeb M., Touzi N. Vector-valued coherent risk measures. — Finance Stoch., 2004, v. 8, № 4, p. 531–552.
27. Kabanov Yu. M. Hedging and liquidation under transaction costs in currency markets. — Finance Stoch., 1999, v. 3, № 2, p. 237–248.
28. Kabanov Yu. M., Stricker Ch. The Harrison–Pliska arbitrage pricing theorem under transaction costs. — J. Math. Econom., 2001, v. 35, № 2, p. 185–196.
29. Kalkbrenner M. An axiomatic approach to capital allocation. — Math. Finance, 2005, v. 15, № 3, p. 425–437.
30. Kusuoka S. On law invariant coherent risk measures. — Adv. Math. Econom., 2001, v. 3, p. 83–95.
31. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. М.: Наука, 1985, 352 с.
32. Матерон Ж. Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978, 318 с.
33. Overbeck L. Allocation of economic capital in loan portfolios. — Lecture Notes in Statist., 1999, v. 147, p. 1–17.
34. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967, 257 с.
35. Schachermayer W. The fundamental theorem of asset pricing under proportional transaction costs in finite discrete time. — Math. Finance, 2004, v. 14, № 1, p. 19–48.
36. Schied A. Risk measures and robust optimization problems. — Stoch. Models, 2006, v. 22, № 4, p. 753–831.
37. Tasche D. Expected shortfall and beyond. — J. Banking and Finance, 2002, v. 26, p. 1519–1533.
38. Zsilinczky L. Polishness of the Wijsman topology revisited. — Proc. Amer. Math. Soc., 1998, v. 126, № 12, p. 3763–3765.

Поступила в редакцию
29.III.2007