Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, Задачи оценивания коэффициентов стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 3, 417–438

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1550>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:14:52

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 43
Выпуск 3, 1998 год
июль, август, сентябрь

© 1998 г. ИБРАГИМОВ И. А.^{*}, ХАСЬМИНСКИЙ Р. З.^{**}

ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. I¹⁾

В работе рассматривается задача оценивания функциональных параметров $a_k(t, x)$, $f(t, x)$ по наблюдению решения $u_\varepsilon(t, x)$ стохастического дифференциального уравнения в частных производных

$$du_\varepsilon(t) = \sum_{|k| \leq 2p} a_k D_x^k u_\varepsilon + f dt + \varepsilon dw(t),$$

$w(t)$ — винеровский процесс. Рассматривается асимптотическая постановка задачи, когда уровень шума $\varepsilon \rightarrow 0$. В настоящей, первой части работы уточняется, что считать статистиками задачи, и исследуется задача оценивания f .

Ключевые слова и фразы: обратные задачи, стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, статистическое оценивание, непараметрические задачи оценивания.

I. Оценивание свободного члена. Асимптотически эффективные оценки

§ 1. Введение. Постановка задач

Пусть G — (ограниченная) область в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей ∂G и $Q_T = [0, T] \times G$ — цилиндрическая область с боковой поверхностью

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке грантов ONR N 00014-95-1-0793, NSF DMS 9600245; первый автор получил также поддержку РФФИ, грант 96-01-00-684, и INTAS, гранты 94-4194, 95-0099.

^{*} Санкт-Петербургское отделение института математики им. В. А. Стеклова РАН, ул. Фонтанка, 27, 191011 Санкт-Петербург, Россия.

^{**} Wayne State University, Detroit, USA.

$\Gamma_T = [0, T] \times \partial G$. Обозначим $L(t) = L$ строго эллиптический дифференциальный оператор

$$Lu = \sum_{|k| \leq 2p} a_k(t, x) D_x^k u \quad (1.1)$$

порядка $2p$. Здесь $k = (k_1, \dots, k_d)$, $|k| = \sum k_i$ и $D_x^k = D_{x_1}^{k_1} \dots D_{x_d}^{k_d}$.

Нас будет интересовать задача оценки параметров a_k, f по наблюдению решения $u_\varepsilon(t, x)$ стохастического дифференциального уравнения в частных производных

$$du_\varepsilon(t) = Lu_\varepsilon dt + f(t, x) dt + \varepsilon dw(t),$$

w — винеровский процесс, рассматриваемый с определенными начальными и краевыми условиями.

Рассмотрим сперва невозмущенную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \\ u(0, x) &= \varphi(x), \quad B(x, D_x)u|_{\Gamma_T} = g, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где B — матричный дифференциальный оператор. Рассмотрим также однородную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad (t, x) \in Q_T, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad B(x, D_x)u|_{\Gamma_T} = 0. \quad (1.3)$$

На оператор L , область G , ее границу, на краевые и начальные условия наложены условия регулярности, которые обеспечивают, что

- а) решение задачи (1.2) существует и единственно;
- б) решение задачи (1.3) представляется в виде

$$u(t, \cdot) = S(t, 0)\varphi; \quad u(t, \cdot) = S(t, \tau)u(\tau, \cdot), \quad 0 \leq \tau < t,$$

где $S(t, \tau)$ — семейство интегральных операторов с ядром $s(t, \tau; x, y)$ — функцией Грина. Функция Грина удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} &|D_x^d S(t, \tau; x, y)| \\ &\leq C |t - \tau|^{-(d+|\alpha|)/(2p)} \exp \left\{ -c \left(\frac{|x - y|^{2p}}{t - \tau} \right)^{1/(2p-1)} \right\}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где c, C — положительные постоянные, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. Мы не уточняем характер условий регулярности (их можно найти, например, в монографиях [1]–[3]), предполагая просто, что а) и б) имеют место. Мы считаем однако, что в условия регулярности внесено требование: коэффициенты $a_k(t, x)$ удовлетворяют в Q_T условию Гёльдера какого-либо порядка. Ниже, ссылаясь на упомянутые условия регулярности для задач (1.2), (1.3), мы называем их «условия (R)».

Условимся обозначать ниже через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $|\cdot|_2$ скалярное произведение и норму в гильбертовом пространстве $L_2(G)$ функций от x ; норму

в $L_p(G)$ обозначим $|\cdot|_p$. Через $\mathcal{L}_2$ будем обозначать гильбертово пространство $L_2(G)$ -значных функций $f(t)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle dt$$

и нормой $\|\cdot\|$. Символ $\|\cdot\|$ употребляется ниже без особых пояснений и для обозначения других норм, когда это не вызывает недоразумения.

Посредством C, c (c с индексами или без) ниже обозначаются «константы» — количества, ограниченные независимо от изменения существенных переменных, при этом даже в пределах одной формулы буква C может обозначать разные константы.

Всюду ниже считаются заданными основное вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ и поток σ -алгебр $\mathcal{F}_t$. Пусть, далее, Q — линейный ограниченный положительный оператор из $L_2(G)$ в $L_2(G)$. Обозначим $w_Q(t)$ винеровский процесс, согласованный с $\{\mathcal{F}_t\}$, корреляционный оператор приращений $w_Q(t) - w_Q(s)$ которого равен $(t-s)Q$. Если $\text{tr } Q < \infty$, то $w_Q(t)$ есть $L_2(G)$ -значный гауссовский процесс. Если же $\text{tr } Q = \infty$, в частности, если $Q = I$ — единичный оператор, то $w_Q(t)$ — обобщенный гауссовский процесс. Теорию бесконечномерных винеровских процессов $w_Q(t)$ можно найти, например, в [4]. Ниже вместо $w_I(t)$ мы пишем просто $w(t)$ и, следуя [4], называем $w_I(t)$ цилиндрическим винеровским процессом.

Ниже мы рассматриваем интегралы по $dw_Q(t)$. Теория таких интегралов изложена, например, в [4] и мало отличается от теории интегралов Винера-Ито. Обычно мы будем иметь дело с двумя следующими типами интегралов. Во-первых, пусть $f(t)$ есть $L_2(G)$ -значная неупреждающая случайная функция. Интегралы $\int_a^b \langle f(t), dw_Q(t) \rangle$ определяются как подходящие пределы сумм вида $\sum_i \langle f(t_i), w_Q(t_{i+1}) - w_Q(t_i) \rangle$. При этом

$$E \left\{ \int_a^b \langle f, dw_Q \rangle \int_a^b \langle g, dw_Q \rangle \right\} = \int_a^b \langle Qf, g \rangle dt, \quad (1.5)$$

в частности,

$$E \left\{ \int_a^b \langle f, dw \rangle \int_a^b \langle g, dw \rangle \right\} = \int_a^b \langle f(t), g(t) \rangle dt.$$

Во-вторых, если $A(t)$ — линейные ограниченные операторы из $L_2(G)$ в $L_2(G)$, то интегралы $\int_a^b A(t) dw_Q(t)$ определяются как пределы $\sum_i A(t_i) (w_Q(t_{i+1}) - w_Q(t_i))$. Эти интегралы корректно определены, если $\int_a^b \text{tr}(AQ A^*) dt < \infty$. При этом

$$E \left| \int_a^b A(t) dw_Q(t) \right|^2 = \int_a^b \text{tr}(A(t) Q A^*(t)) dt.$$

Подробнее об этих и других интегралах см. [4].

Перейдем теперь к постановке наших основных задач. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$du_\varepsilon(t, x) = Lu_\varepsilon(t, x) dt + f(t, x) dt + \varepsilon dw_Q(t) \quad (1.6)$$

с начальными и граничными условиями

$$u_\varepsilon(0, x) = \psi(x), \quad B(x, D_x) u_\varepsilon|_{\Gamma_T} = g. \quad (1.7)$$

Задача заключается в том, чтобы по наблюдению решения $u_\varepsilon(t, x)$ для (t, x) из некоторого множества $A \subseteq Q_T$ или каких-либо функционалов от u_ε оценить коэффициенты a_k оператора L , функцию f и оператор Q . Более того, само решение u_ε тоже может наблюдаться в шуме. Например (см. [25]),

$$dy(t) = u_\varepsilon(t) dt + \delta dw_1(t).$$

В настоящей статье мы рассмотрим лишь простейшие из этих задач. Во-первых, это задача оценки функции $f(t, x)$ по наблюдениям $u_\varepsilon(t, x)$, $(t, x) \in Q_T$, в предположении, что все прочие элементы задачи (1.6), (1.7), коэффициенты a_k , оператор Q , уровень шума ε и пр., известны. Этой задаче посвящены ч. I и II нашей работы. По существу, эта специальная задача совпадает с задачей оценивания сигнала в гауссовском белом шуме (см., например, [5]–[7], [11], [13]). Действительно, полагая

$$d\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = du_\varepsilon(t, x) - Lu_\varepsilon(t, x) dt,$$

мы приходим к задаче оценивания $f(t, x)$ по «наблюдениям» $d\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = f(t, x) dt + \varepsilon dw_Q$. Точный смысл этого рассуждения, а также что понимается под решением задачи (1.6), (1.7) и наблюдаемыми объектами мы разъясним в следующем параграфе.

В части III мы рассмотрим задачу оценки коэффициента a_0 в предположении, что этот коэффициент есть функция только от x . При этом снова предполагается, что оценивание производится по наблюдениям $(t, x) \in Q_T$ и что все остальные элементы задачи a_k , $k \neq 0$, f, Q, ε известны и могут употребляться для построения оценок.

Существует обширная литература, посвященная определению коэффициентов a_k , f в нестохастической постановке — когда и ε и δ равны нулю. См., например, монографию В. Г. Романова [14].

Стохастические варианты задачи достаточно широко представлены в литературе по идентификации систем, см., например, [15]–[17] и [20], [21].

Новизна нашего подхода заключается в том, что мы рассматриваем задачу определения коэффициентов a_k , f с точки зрения современной непараметрической теории оценивания и указываем точный порядок сходимости оптимальных оценок к оцениваемой функции (когда $\varepsilon \rightarrow 0$) или даже асимптотически эффективные оценки. С подобной точки зрения оценки параметров конечной размерности рассмотрены в [20], [21].

§ 2. Наблюдения и статистики

1. Пусть выполнены условия (R) предыдущего параграфа. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} du_\varepsilon(t) &= L(t) u_\varepsilon(t) dt + f(t) dt + \varepsilon dw_Q(t), \\ u_\varepsilon(0) &= u_\varepsilon(0, x) = \psi(x), \quad B(x, D_x) u_\varepsilon|_{\Gamma_T} = g. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решение (слабое) уравнения (2.1) понимается в следующем смысле. Рассмотрим сперва уравнение

$$\begin{aligned} dv_\varepsilon(t) &= L(t) v_\varepsilon(t) dt + \varepsilon dw_Q(t), \\ v_\varepsilon(0) &= 0, \quad B(x, D_x) v_\varepsilon|_{\Gamma_T} = 0, \end{aligned} \quad (2.1')$$

с однородными граничными и начальными условиями и свободным членом, равным нулю. Слабым решением задачи (2.1') назовем $L_2(G)$ -значную функцию $v_\varepsilon(t)$ такую, что

- 1) $\int_0^T \mathbb{E} |v_\varepsilon(t)|_2^2 dt < \infty$;
- 2) если $\varphi(t)$ есть $L_2(G)$ -значная функция и $\varphi(t) \in D(L^*(t))$ при всех t , то

$$\int_0^T \langle \varphi(t), dv_\varepsilon(t) \rangle = \int_0^T \langle L^*(t) \varphi(t), v_\varepsilon(t) \rangle dt + \int_0^T \langle \varphi(t), dw_Q(t) \rangle.$$

Чуть ниже мы подробнее прокомментируем это определение, а пока обозначим $u_0(t, x)$ классическое решение невозмущенной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad u(0, x) = \psi(x), \quad B(x, D_x) u|_{\Gamma_T} = g. \quad (2.2)$$

В наших предположениях это решение u_0 существует и единственно. Более того, $u_0(t, x)$ есть достаточно гладкая функция.

Назовем (слабым) решением задачи (2.1) функцию $u_\varepsilon(t, x) = u_0(t, x) + v_\varepsilon(t, x)$.

Возвратимся снова к определению слабого решения v_ε задачи (2.1'). Пусть бесконечно дифференцируемая функция $\zeta \in D(L^*(t))$ для всех t , например, $\zeta(x) = 0$ вне некоторого компакта $K \subset G$. Ясно, что при определении слабого решения нужно потребовать, чтобы для всех $0 \leq \tau < t \leq T$ выполнялось равенство

$$\langle v_\varepsilon(t), \zeta \rangle - \langle v_\varepsilon(s), \zeta \rangle = \int_s^t \langle L^* \zeta, v_\varepsilon \rangle + \varepsilon \left(\langle w_Q(t), \zeta \rangle - \langle w_Q(s), \zeta \rangle \right).$$

Следовательно, если $\psi_n(t)$ — вещественнозначные ступенчатые функции на $[0, T]$, то

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \psi_n(t) \zeta, dv_\varepsilon(t) \rangle &= \int_0^T \langle L^*(t) (\psi_n(t) \zeta), v_\varepsilon \rangle dt \\ &+ \int_0^T \langle \psi_n(t) \zeta, dw_Q(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пусть функции ψ_n сходятся в $L_2([0, T])$ к $\psi(t)$. Правая часть (2.3) будет сходиться к

$$\int_0^T \langle L^*(t) (\psi(t) \zeta), v_\varepsilon \rangle dt + \int_0^T \langle \psi(t) \zeta, dw_Q \rangle,$$

следовательно, сходится и левая часть, и стохастический интеграл $\int_0^T \langle \psi(t) \zeta, dv_\varepsilon \rangle$ корректно определен. Если теперь $\varphi(t) = \sum \psi_j(t) \zeta_j$, то

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \varphi(t), dv_\varepsilon(t) \rangle &= \int_0^T \langle L^*(t) \varphi(t), v_\varepsilon(t) \rangle dt \\ &+ \int_0^T \langle \varphi(t), dw_Q(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если, наконец, $\varphi(t) \in D(L^*(t))$, $t \in [0, T]$, можно найти такие функции $\varphi_n(t) = \sum \psi_{jn}(t) \zeta_{jn}$ (ψ_{jn} — вещественнозначные, $\zeta_{jn} \in D(L^*(t))$ для всех t), что $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{L}_2$ и правая часть равенства (2.4), а значит, и левая будут сходиться так, что (2.4) будет иметь место и для предельной функции $\varphi(t)$.

Отметим, что если $u_\varepsilon(t, x)$ есть слабое решение уравнения (2.1), а $\varphi(t)$ при всех t есть бесконечно дифференцируемая функция x , обращающаяся в нуль вне некоторого компакта $K \subset G$, не зависящего от t , то

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \varphi(t), du_\varepsilon(t) \rangle &= \int_0^T \langle L^*(t) \varphi(t), u_\varepsilon(t) \rangle dt \\ &+ \int_0^T \langle f(t), \varphi(t) \rangle dt + \varepsilon \int_0^T \langle \varphi(t), dw_Q(t) \rangle, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $L^*(t)$ — оператор, формально сопряженный к $L(t)$.

Мы будем говорить, что задача (2.1) имеет единственное слабое решение, если для любых двух таких решений $u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}$

$$P \left\{ |u_{1\varepsilon}(t) - u_{2\varepsilon}(t)|_2 = 0 \right\} = 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (R). Если

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \text{tr} (S(t, \tau) Q (S(t, \tau))^*) d\tau < \infty, \quad (2.6)$$

то слабое решение задачи (2.1) существует, единственно и задается равенством

$$u_\varepsilon(t, x) = u_0(t, x) + \int_0^t S(t, \tau) dw(\tau), \quad (2.7)$$

где u_0 есть решение задачи (2.2).

Доказательство теоремы 2.1 в идейном плане повторяет доказательство теоремы 5.4 из [4], но, поскольку в [4] рассматриваются лишь постоянные операторы L , мы приведем нужные изменения.

Разумеется, достаточно рассмотреть лишь случай однородных краевых и начальных условий и считать $f = 0$, так что $u_0(t, x) = 0$.

Докажем сначала, что в этом случае

$$u_\varepsilon(t) = \varepsilon \int_0^t S(t, \tau) dw_Q(\tau)$$

есть решение задачи (2.1). Заметим, что $u_\varepsilon \in \mathcal{L}_2$ с вероятностью 1. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|u_\varepsilon\|^2 &= \mathbb{E} \int_0^T dt \left| \int_0^t S(t, \tau) dw_Q(\tau) \right|^2 \\ &= \int_0^T dt \int_0^t \text{tr} \left(S(t, \tau) Q(S(t, \tau))^* \right) d\tau, \end{aligned}$$

так что $u_\varepsilon(t)$ есть $L_2(G)$ -значная гауссовская функция.

Функция Грина s для задачи (2.2) с однородными граничными условиями удовлетворяет уравнению (см. [2, гл. III, IX])

$$\frac{\partial}{\partial t} s(t, \tau; x, y) = L(t) s(t, \tau; x, y),$$

и потому эволюционные операторы $S(t, \tau)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t, \tau) = L(t) S(t, \tau) \quad (2.8)$$

(по поводу последнего равенства см. также [22], [23]).

Пусть $\varphi(t) \in D(L^*(t))$. Обозначим h малое положительное число. Тогда

$$\begin{aligned} &\int_0^{T-h} \left\langle \varphi(t+h), \varepsilon d \int_0^t S(t+h, \tau) dw_Q(\tau) \right\rangle \\ &= \int_0^{T-h} \left\langle \varphi(t+h), \varepsilon \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} S(t+h, \tau) dw(\tau) \right\rangle dt \\ &\quad + \varepsilon \int_0^{T-h} \langle \varphi(t+h), S(t+h, t) dw_Q(t) \rangle \\ &= \int_0^{T-h} \left\langle L^*(t+h) \varphi(t+h), \varepsilon \int_0^t S(t+h, \tau) dw(\tau) \right\rangle dt \\ &\quad + \varepsilon \int_0^{T-h} \langle \varphi(t+h), S(t+h, t) dw(t) \rangle. \end{aligned}$$

Устремляя здесь h к нулю и учитывая, что при этом $S(t+h, t)$ сходится к единичному оператору, найдем, что

$$\int_0^T \langle \varphi(t), du_\varepsilon(t) \rangle = \int_0^T \langle L^*(t) \varphi(t), u_\varepsilon(t) \rangle dt + \varepsilon \int_0^T \langle \varphi(t), dw_Q(t) \rangle,$$

и $u_\varepsilon(t)$ есть слабое решение.

Доказательство единственности опирается на следующую лемму, по существу совпадающую с леммой 5.5 из [4].

Лемма 2.1. Пусть u — слабое решение задачи (2.1) с $\psi = 0$, $f = 0$ и однородными граничными условиями. Пусть $\zeta(s)$ есть $L_2(G)$ -значная дифференцируемая функция на $[0, T]$, причем $\zeta(t) \in D(L^*(t))$ для всех t . Тогда

$$\langle u(t), \zeta(t) \rangle = \int_0^t \langle u(\tau), \zeta'(\tau) + L^*(\tau) \zeta(\tau) \rangle d\tau + \varepsilon \int_0^t \langle \zeta(\tau), dw_Q(\tau) \rangle.$$

Доказательство. Пусть $\zeta_0(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция x , обращающаяся в нуль вне некоторого компакта $K \subset G$. Тогда $\zeta_0 \in D(L^*(t))$ для всех t . Пусть $\varphi_0(t)$ — вещественнозначная дифференцируемая функция t . Буквально так же, как в [4], проверяется, что утверждение леммы 2.1 выполняется для $\zeta(t) = \zeta_0 \varphi_0(t)$. Следовательно, утверждение леммы верно и для всех функций вида $\sum \zeta_j \varphi_j(t)$, где ζ_j и φ_j устроены так же, как и ζ_0 , φ_0 , а значит, и для всех $\zeta(s)$.

Пусть теперь $\zeta_0(x)$ есть бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне компакта $K \subset G$. Тогда

$$S^*(t, \tau) \zeta_0 \in D(L^*(\tau)), \quad 0 \leq \tau \leq t.$$

Действительно, $L^*(\tau) S^*(t, \tau) \zeta_0 = L^*(\tau) S^*(t, \tau) (L^*(\tau))^{-1} L^*(\tau) \zeta_0$, и оператор $L^*(\tau) S^*(t, \tau) (L^*(\tau))^{-1}$ можно считать ограниченным (подробнее см. [22, ч. 2]).

Если u_1 и u_2 — два слабых решения задачи (2.1), то им будет и $u(t) = u_2(t) - u_1(t)$. Применяя лемму 2.1 к решению $u(t)$ и функции $\zeta(\tau) = S^*(t, \tau) \zeta_0$, получим

$$\langle u(t), \zeta_0 \rangle = \int_0^t \left\langle u(\tau), \frac{d}{d\tau} S^*(t, \tau) \zeta_0 + L^*(\tau) S^*(t, \tau) \zeta_0 \right\rangle d\tau = 0.$$

Множество функций ζ_0 плотно в $L_2(G)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Так как $\text{tr}(SQS^*) \leq \|Q\| \text{tr}(SS^*)$, условие (2.6) заведомо выполняется, если

$$\sup_t \int_0^t \text{tr} \left(S(t, \tau) (S(t, \tau))^* \right) d\tau < \infty.$$

З а м е ч а н и е 2.2. В силу неравенства (1.4)

$$\text{tr} \left(S(t, \tau) (S(t, \tau))^* \right) = \int_G \int_G s^2(t, \tau; x, y) dx dy \leq C |t - \tau|^{-d/(2p)},$$

и в условиях (R) (2.6) выполняется, если $d < 2p$. Более того, в этом случае u_ε обладает определенной гладкостью. Действительно, в условиях (R) неслучайная часть решения всегда имеет непрерывные производные нескольких порядков по t и x (см. [2]).

Изучим случайную часть

$$\xi(t, x) = \int_0^t S(t, \tau) dw(\tau).$$

Теорема 2.2. Если $d < 2p - 2$, то

$$\mathbb{E} |\xi(t, x + h) - \xi(t, x)|^2 \leq C \|Q\| |h|^2.$$

Если $d + 2 \geq 2p > d$, то для любого $\kappa < 2p - d$

$$\mathbb{E} |\xi(t, x + h) - \xi(t, x)|^2 \leq C_\kappa \|Q\| |h|^\kappa.$$

Доказательство. Пусть e_i, λ_i — собственные векторы и собственные числа оператора Q . Записывая $w_Q(t)$ в виде формального ряда $\sum \sqrt{\lambda_i} e_i w_i$, где w_i — независимые одномерные винеровские процессы, получим, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} |\xi(t, x + h) - \xi(t, x)|^2 \\ &= \sum_i \lambda_i \int_0^t d\tau \left[\int_G [s(t, \tau; x + h, y) - s(t, \tau; x, y)] e_i(y) dy \right]^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если $d < 2p - 2$, мы воспользуемся вытекающим из (2.9) неравенством

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} |\xi(t, x + h) - \xi(t, x)|^2 \\ & \leq \|Q\| |h|^2 \int_0^t d\tau \int_G dy \int_0^1 \sum_1^d \left| \frac{\partial s}{\partial x_i}(t, \tau; x + \alpha h, y) \right|^2 d\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.4) следует, что

$$\mathbb{E} |\xi(t, x + h) - \xi(t, x)|^2 \leq C \|Q\| |h|^2 \int_0^t |t - \tau|^{-(d+2)/(2p)} d\tau.$$

Если $d \geq 2p - 2$, $d < 2p$, напишем неравенство

$$\begin{aligned} & |s(t, \tau; x + h, y) - s(t, \tau; x, y)| \\ & \leq |h|^\kappa \left(\int_0^1 |\text{grad}_x s(t, \tau; x + \alpha h, y)| d\alpha \right)^\kappa \\ & \quad \times \left(|s(t, \tau; x + h, y)| + |s(t, \tau; x, y)| \right)^{2-\kappa}. \end{aligned}$$

Рассуждая как выше, мы найдем

$$\mathbb{E} |\xi(t, x + h) - \xi(t, x)|^2 \leq C |h|^\kappa \int_0^t |t - \tau|^{-(d+\kappa)/(2p)} d\tau.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. Если $d < 2p$, то для любого $\mu < \min(1, p - d/2)$

$$\mathbf{E} \left\{ \sup_{|x-y|<1} \frac{|\xi(t, x) - \xi(t, y)|}{|x - y|^\mu} \right\} \leq C_\mu < \infty.$$

Действительно, $\xi(t, x)$ — гауссовское поле и потому для всех $q > 2$

$$\mathbf{E} |\xi(t, x) - \xi(t, y)|^q \leq c_q \left(\mathbf{E} |\xi(t, x) - \xi(t, y)|^2 \right)^{q/2} \leq C(q, \mu) |x - y|^{q\mu}.$$

Из последнего неравенства вытекает результат следствия, см. [24].

2. Предположим теперь, что нам известны все элементы задачи (2.1), кроме свободного члена, который, начиная с этого места, мы будем обозначать $\theta(t, x)$, и мы хотим, наблюдая решение $u_\varepsilon(x, t)$ для $(t, x) \in Q_T$, оценить функцию θ или значение $\Phi(\theta)$ какого-либо функционала Φ в точке θ . При условии $d < 2p$, которое мы считаем выполненным в данном пункте, решение $u_\varepsilon(t, x)$ есть хорошо определенная случайная функция, и все ее значения $u_\varepsilon(t, x)$ суть статистики. Функция $u_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t, \cdot)$ с вероятностью 1 лежит в $\mathcal{L}_2$, и для любого $\varphi \in L_2(G)$ и любого t скалярные произведения

$$\langle \varphi, u_\varepsilon(t) \rangle = \int_G \varphi(x) u_\varepsilon(t, x) dx$$

суть статистики.

Обозначим F множество всех ступенчатых $L_2(G)$ -значных функций $\varphi(t)$ таких, что $\varphi(t)$ при всех t есть финитная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой есть компактное множество $K_\varphi \subset G$. Множество F плотно в $\mathcal{L}_2$. Пусть функция $\varphi \in F$ и постоянна на интервалах $[t_i, t_{i+1}]$. Тогда величины

$$\sum \langle u_\varepsilon(t_{i+1}) - u_\varepsilon(t_i), \varphi(t_i) \rangle = \int_0^T \langle \varphi(t), du_\varepsilon(t) \rangle$$

суть статистики. Далее, если L^* — оператор, формально сопряженный к оператору L , то для $\varphi \in F$ величины вида

$$\sum \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle u_\varepsilon(t), L^* \varphi(t) \rangle dt = \int_0^T \langle u_\varepsilon(t), L^* \varphi(t) \rangle dt$$

тоже суть статистики. В таком случае статистиками будут и величины

$$X(\varphi) = \int_0^T \langle \varphi(t), du_\varepsilon(t) \rangle - \int_0^T \langle u_\varepsilon(t), L^* \varphi(t) \rangle dt.$$

В силу (2.7)

$$X(\varphi) = \int_0^T \langle f(t, \cdot), \varphi(t) \rangle dt + \varepsilon \int_0^T \langle \varphi(t), dw_Q(t) \rangle.$$

Ясно, что $X(\varphi)$ есть случайный линейный функционал на F . Далее, если $\varphi, \psi \in F$, то в силу предыдущего равенства

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}|X(\varphi) - X(\psi)|^2 \\ & \leq 2 \left(\left| \int_0^T \langle f(t, \cdot), \varphi(t) - \psi(t) \rangle dt \right|^2 + \varepsilon^2 \mathbb{E} \left| \int_0^T \langle \varphi(t) - \psi(t), dw_Q(t) \rangle \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.5) следует, что

$$\mathbb{E}|X(\varphi) - X(\psi)|^2 \leq 2\|f\|^2\|\varphi - \psi\|^2 + 2\varepsilon^2\|Q\|\|\varphi - \psi\|^2. \quad (2.10)$$

Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{L}_2$; выберем какую-нибудь последовательность $\varphi_n \in F$ такую, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{L}_2$. В силу (2.10) $\mathbb{E}|X(\varphi_n) - X(\psi_n)|^2 \leq 2(\|f\|^2 + \|Q\|)\|\varphi_n - \varphi_m\|^2$, так что $X(\varphi_n)$ сходится в себе и, значит, сходится. Легко понять, что $\lim X(\varphi_n)$ не зависит от выбора последовательности φ_n , сходящейся к φ , и мы обозначим этот предел $X(\varphi)$. Он является статистикой.

Таким образом, для всех $\varphi \in \mathcal{L}_2$ определены статистики $X(\varphi)$, которые мы иногда будем символически записывать

$$X(\varphi) = \int_0^T \langle \varphi, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle. \quad (2.11)$$

Очевидно также, что

$$X(\varphi) = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t) \rangle dt + \varepsilon \int_0^T \langle \varphi(t), dw_Q(t) \rangle. \quad (2.12)$$

Левая часть последнего равенства есть наблюдаемая величина, правую же можно рассматривать как сигнал, возмущенный аддитивным гауссовским шумом. Более того, если $d < 2p$ и $\text{tr } Q < \infty$, то функционал X корректно определен на функциях от (y, s) вида $\varphi_{tx} = \mathbb{I}_{[0,t]}(s) \delta(x - y)$. Полагая $Y(t, x) = X(\varphi_{tx})$, найдем, что наблюдаемые

$$Y(t, x) = \int_0^t f(s, x) ds + \varepsilon w_Q(t).$$

Таким образом, задача оценки f по наблюдениям решения задачи (2.1) во многом сходна с задачей оценки сигнала в гауссовском шуме, рассматривавшейся в работах авторов [5]–[7]; увеличение размерности приводит, однако, к появлению дополнительных аналитических проблем.

3. В ряде случаев требование $d < 2p$ представляется ограничительным. Например, для уравнения второго порядка

$$du(t) = \Delta u dt + f dt + dw(t)$$

это условие выполняется лишь если $d = 1$. Для $d \geq 2$ последнее уравнение не имеет решений, являющихся обычными случайными функциями, но имеет решения в классе обобщенных случайных функций.

Следуя [8], положим

$$s(t, \tau; \varphi, y) = \int_G \varphi(x) s(t, \tau; x, y) dx,$$

φ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем.
Случайные величины

$$V_t(\varphi) = \int_0^t \langle s(t, \tau; \varphi, \cdot), dw_Q(\tau) \rangle$$

гауссовы со средним нуль и дисперсией

$$\begin{aligned} \mathbf{E} V_t^2(\varphi) &= \int_0^t |Q^{1/2} s(t, \tau; \varphi, \cdot)|_2^2 d\tau \\ &\leq \|Q\| \int_0^t d\tau \int_G \left[\int_G s(t, \tau; x, y) \varphi(x) dx \right]^2 dy. \end{aligned}$$

Из (1.4) следует, что внутренние интегралы не превосходят

$$\begin{aligned} C |\varphi|_\infty^2 |t - \tau|^{-d/(2p)} \int_G \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left\{ -c \left(\frac{|x - y|^{2p}}{t - \tau} \right)^{1/(2p-1)} \right\} dx dy \\ \leq C \text{mes } G \cdot |\varphi|_\infty^2 \end{aligned}$$

и что, следовательно, $\mathbf{E} V_t^2(\varphi) \leq C \text{mes } G \|Q\| T |\varphi|_\infty^2$. Далее, $V_t(\varphi)$ есть обобщенная случайная функция (подробнее см. [8]), которая для $\varphi \in D(L^*)$ (L^* — сопряженный к оператору с однородными граничными условиями) удовлетворяет равенству

$$V_t(\varphi) = \int_0^t V_s(L^* \varphi) ds + \varepsilon \int_0^t \langle \varphi, dw_Q \rangle.$$

Последнее соотношение проверяется так же, как в [8] (см. доказательство теоремы 3.1).

Следовательно, $u_t(\varphi) = \langle u_0(t, \cdot), \varphi \rangle + V_t(\varphi)$ есть обобщенное решение задачи (2.1), и

$$u_t(\varphi) - u_s(\varphi) = \int_s^t u_\tau(L^* \varphi) d\tau + \int_s^t \langle f, \varphi \rangle d\tau + \varepsilon \int_s^t \langle \varphi, dw_Q(\tau) \rangle. \quad (2.13)$$

Если $\varphi(\tau)$ есть дифференцируемая функция на $[0, t]$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(\tau) \in D(L^*(\tau))$ для всех τ , то, как можно проверить,

$$V_t(\varphi(t)) - \int_0^t V_\tau(\varphi'(\tau)) d\tau = \int_0^t V_\tau(L^*(\tau) \varphi(\tau)) d\tau + \varepsilon \int_0^t \langle \varphi(\tau), dw_Q(\tau) \rangle.$$

Требуя выполнения этого равенства, можно убедиться в единственности решения.

Будем считать, что наблюдаемыми являются $u_t(\varphi)$ для всех $t \in [0, T]$ и всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ с компактным носителем. В таком случае для любой ступенчатой функции $\varphi(t)$ из F статистиками будут величины

$$X(\varphi) = \sum_j \left(u_{t_{j+1}}(\varphi(t_j)) - u_{t_j}(\varphi(t_j)) \right) - \int_0^T u_\tau(L^* \varphi(\tau)) d\tau.$$

В силу (2.13) для $X(\varphi)$ выполняется равенство вида (2.12)

$$X(\varphi) = \int_0^T \langle f(t, \cdot), \varphi(t) \rangle dt + \varepsilon \int_0^T \langle \varphi(t), dw_Q(t) \rangle,$$

следовательно, $X(\varphi)$ удовлетворяет неравенствам (2.10) и может быть продолжена, оставаясь статистикой, до функции на всем $\mathcal{L}_2$.

Таким образом, вероятностная структура задачи оценивания f определяется целиком условиями (R) и не зависит от конечности интеграла (2.6).

З а м е ч а н и е 2.3. Предположим, что $f(t, \cdot) \in D(Q^{-1/2})$ при всех t . Тогда статистики $X(\varphi)$ определены даже для более широкого класса функций φ . Именно, $X(\varphi)$ определено для всех элементов расширения $\mathcal{L}_2$ до гильбертова пространства с нормой $\int_0^T \langle Q\varphi, \varphi \rangle dt$.

4. Выше предполагалось, что область G ограничена. Однако это предположение несущественно. Действительно, определяя $V_t(\varphi)$ как в п. 3 и обозначая через K носитель φ , мы найдем, что $EV_t^2(\varphi) \leq C \text{mes } K \cdot T \cdot |\varphi|_\infty^2 \|Q\|$ и что, следовательно, обобщенная случайная функция $V_t(\varphi)$ корректно определена и в этом случае. Затем, как и выше, статистики $X(\varphi)$ определяются для всех $\varphi \in \mathcal{L}_2$, причем, как и выше,

$$X(\varphi) = \int_0^T \langle \varphi, f \rangle dt + \varepsilon \int_0^T \langle \varphi, dw_Q(\tau) \rangle.$$

§ 3. Асимптотическая постановка задачи. Условия ЛАН. Асимптотически эффективное оценивание

1. В дальнейшем мы рассматриваем задачу оценивания θ по наблюдениям

$$du_\varepsilon(t) = Lu_\varepsilon dt + \theta dt + \varepsilon dw_Q(t) \quad (3.1)$$

в асимптотической постановке, когда уровень возмущающего шума $\varepsilon \rightarrow 0$. Как уже отмечалось выше, все элементы задачи, кроме θ , т.е. L, ε, Q , предполагаются известными наблюдателю. Более того, мы считаем, что $u_\varepsilon(t, x)$ наблюдается для всех $(t, x) \in [0, T] \times G$ или что в более общей ситуации статистики $X(\varphi)$, введенные в § 2, доступны наблюдению для всех $\varphi \in \mathcal{L}_2$. Это последнее предположение, конечно, сильно

упрощает задачу; достаточно заметить, что при таком предположении невозмущенная задача, $\varepsilon = 0$, просто тривиальна. Именно в силу этого предположения излагаемые ниже результаты мало зависят от свойств оператора L . Поэтому содержание частей I, II можно трактовать в духе [13] как оценивание «сигнала» $\theta(t, x_1, \dots, x_d) = \theta(t, x)$ по наблюдениям в бесконечномерном аддитивном шуме

$$dX_\varepsilon(t) = \theta(t, \cdot) dt + \varepsilon dw_Q(t).$$

В частности, § 4–6 содержат доказательства ряда результатов, анонсированных в [13].

Относительно неизвестной функции θ ниже мы всегда предполагаем, что $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{L}_2$, где Θ есть заданное (известное) множество функций. Пусть далее V есть евклидово или гильбертово пространство и Φ есть функция на $\mathcal{L}_2$ со значениями в V . Мы рассматриваем задачу оценки $\Phi(\theta)$ в точке θ . Если, например, Φ есть тождественное отображение из $\mathcal{L}_2$ в $\mathcal{L}_2$, то наша задача — это задача оценивания всей функции θ ; если $\Phi(\theta) = \theta(t_0, x_0)$, то это оценка значения функции θ в точке (t_0, x_0) и т.д.

Качество оценки Φ^* величины $\Phi(\theta)$ при заданной функции потерь $l(\alpha, \beta)$ измеряется функцией риска

$$R(\Phi^*, \Phi(\theta)) = E_\theta l(\Phi^*, \Phi(\theta)).$$

Ниже мы ограничиваемся функциями потерь вида $l(x - y)$, считая при этом, что (1) $l(v) \geq 0$; (2) $l(v) = l(-v)$; (3) множества $V_\lambda = \{v: l(v) < \lambda\}$ выпуклы при всех λ (ср. [9]).

Мы говорим, что оценка Φ_ε состоятельна для $\Phi(\theta)$ по отношению к функции потерь l в множестве $K \subseteq \Theta$, если

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\theta \in K} E_\theta^{(\varepsilon)} l(\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta)) = 0.$$

Оценка Φ_ε состоятельна для $\Phi(\theta)$ в множестве $K \subseteq \Theta$, если для всех $\delta > 0$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\theta \in K} P_\theta^{(\varepsilon)} \left\{ \|\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta)\| > \delta \right\} = 0.$$

Мы предпочитаем такое равномерное понятие состоятельности, поскольку априори мы знаем о θ лишь, что $\theta \in \Theta$, или что $\theta \in K \subseteq \Theta$.

2. Ниже мы все время предполагаем, что $\theta(t) \in D(Q^{-1/2})$ для всех t . Тогда в обозначениях § 2 (см., например, [4], [10])

$$\begin{aligned} \frac{dP_\theta^{(\varepsilon)}}{dP_0^{(\varepsilon)}}(u_\varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T |Q^{-1/2}\theta(t)|_2^2 dt \right. \\ \left. - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \langle Q^{-1/2}\theta(t), du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle \right\} \end{aligned}$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T |Q^{-1/2}\theta(t)|_2^2 dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \langle Q^{-1/2}\theta(t), dw(t) \rangle \right\}. \quad (3.2)$$

Определим оператор A_ε равенством $A_\varepsilon = \varepsilon Q^{1/2}$. Тогда для всех $h \in \mathcal{L}_2$ в силу (3.2) выполняется равенство

$$\frac{dP_{\theta+A_\varepsilon h}}{dP_\theta}(u_\varepsilon) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}\|h\|^2 + \int_0^T \langle h(t), dw(t) \rangle \right\},$$

причем $\Delta(h) = \int_0^T \langle h, dw \rangle$ есть линейная гауссовская функция h с $E\Delta(h) = 0$ и $E\Delta^2(h) = \|h\|^2$.

Таким образом, семейство мер $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ удовлетворяет условию локальной асимптотической нормальности (ЛАН) в смысле определения из [9] с нормирующими операторами $A_\varepsilon = \varepsilon Q^{1/2}$. Из теорем 4.1, 5.2 из [9] немедленно вытекают следующие результаты.

Пусть множество Θ возможных значений параметра θ есть дифференцируемое многообразие в $\mathcal{L}_2$ с касательным многообразием $H(\theta) = H$ в точке θ . Обозначим P_H оператор проектирования на минимальное подпространство, содержащее множество $\{h: \theta^{1/2}h \in H\}$.

Допустим, что оцениванию подлежит значение $\Phi(\theta)$ функции $\Phi: \mathcal{L}_2 \rightarrow V$, где функция $\Phi(\theta)$ дифференцируема по Фреше с производной $\Phi'(\theta)$.

Теорема 3.1. Если оператор $K = \Phi'(\theta) Q^{1/2} P_H$ — оператор Гильберта–Шмидта, то для всех функций потерь l и любого семейства оценок $\{\Phi_\varepsilon\}$ для $\Phi(\theta)$

$$\lim_{\varepsilon} \sup_{\tau \in O} E_\tau^{(\varepsilon)} l(\varepsilon^{-1}(\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta))) \geq E l(\xi), \quad (3.3)$$

какова бы ни была окрестность O точки θ . Здесь ξ — это V -значный нормальный вектор со средним нуль и корреляционным оператором KK^* .

Неравенству (3.3) можно придать следующий вид (ср. с неравенством Гаека–Ле Кама [11]). Пусть $O(\delta)$ есть пересечение шара $\{\tau: \|\tau - \theta\| \leq \delta\}$ с параметрическим множеством Θ . Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon} \sup_{\tau \in O_\delta} E_\tau^{(\varepsilon)} l(\varepsilon^{-1}(\Phi(\varepsilon) - \Phi(\tau))) \geq E l(\xi). \quad (3.4)$$

Ниже оценки Φ_ε , для которых в (3.3) или (3.4) достигается знак равенства, называются асимптотически эффективными; оператор KK^* представляет собой аналог информационной матрицы Фишера.

3. Пример 3.1. Пусть $\Theta = \mathcal{L}_2$, а оценке подлежит значение $\Phi(\theta)$ линейного ограниченного функционала

$$\Phi(\theta) = \int_0^T \langle \theta(t), \varphi(t) \rangle dt = \int_0^T \int_G \theta(t, x) \varphi(t, x) dt dx.$$

Рассмотрим оценку (см. (2.11))

$$\Phi_\varepsilon^* = \int_0^T \langle \varphi(t), du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon dt \rangle.$$

Тогда разность $\varepsilon^{-1}(\Phi_\varepsilon^* - \Phi(\theta))$ есть гауссова случайная величина

$$\int_0^T \langle \varphi(t), dw_Q(t) \rangle$$

с дисперсией, равной $\|Q^{1/2}\varphi\|^2$, так что Φ_ε^* — асимптотически эффективная оценка для $\Phi(\theta)$.

Пример 3.2. Пусть функционал $\Phi(\theta)$ тот же, что в примере 3.1, а множество Θ состоит из всех векторов, ортогональных вектору g . Тогда H есть подпространство в $\mathcal{L}_2$, ортогональное $Q^{1/2}g$, и гауссова случайная величина в (3.1), (3.2) имеет дисперсию

$$\sigma^2 = \|P_H Q^{1/2}\varphi\|^2 = \|Q^{1/2}\varphi\|^2 - \frac{(Q^{1/2}g, Q^{1/2}\varphi)^2}{\|Q^{1/2}g\|^2}.$$

Обозначим P_G оператор проектирование на ортогональное дополнение к $\{g\}$. Естественная оценка (см. (2.11))

$$\begin{aligned} (\varphi, P_G(\dot{u}_\varepsilon - Lu_\varepsilon)) &= \int_0^T \langle P_G\varphi, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon dt \rangle \\ &= \Phi(\theta) + \varepsilon \int_0^T \langle P_G\varphi, dw_Q(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

— гауссовская несмещенная с дисперсией

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \sigma_1^2 &= \varepsilon^2 \|Q^{1/2}P_G\varphi\|^2 \\ &= \varepsilon^2 \left(\|Q^{1/2}\varphi\|^2 - 2 \frac{(Q^{1/2}\varphi, Q^{1/2}g)(\varphi, g)}{\|g\|^2} + \frac{\|Q^{1/2}g\|^2(\varphi, g)^2}{\|g\|^4} \right) \\ &\geq \varepsilon^2 \sigma^2. \end{aligned}$$

Так что определенная равенством (3.5) оценка, вообще говоря, не будет асимптотически эффективной. Конструкция же асимптотически эффективной оценки

$$\int_0^T \langle \varphi, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle - \frac{(Q^{1/2}g, Q^{1/2}\varphi)}{\|Q^{1/2}g\|^2} \int_0^T \langle g, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle$$

уже использует оператор Q . Последнее выражение есть гауссова случайная величина

$$\Phi(\theta) + \varepsilon \int_0^T \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle - \varepsilon \frac{\langle Q^{1/2} g, Q^{1/2} \varphi \rangle}{\|Q^{1/2} g\|^2} \int_0^T \langle g, dw_Q(t) \rangle$$

со средним $\Phi(\theta)$ и дисперсией $\varepsilon^2 \sigma^2$.

Пример 3.3. Обобщая предыдущий пример, предположим теперь, что Θ есть линейное множество в $\mathcal{L}_2$. Тогда пространство H из теоремы 3.1 есть замыкание линейного множества $Q^{-1/2} \Theta$. Случайная величина ξ из неравенств (3.3), (3.4) имеет дисперсию $\sigma^2 = \|P_H Q^{1/2} \varphi\|^2$. Так как $\theta(t, \cdot) \in D(Q^{-1/2})$, оценки

$$\Phi_\varepsilon = \int_0^T \langle Q^{-1/2} P_H Q^{1/2} \varphi, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle$$

корректно определены (см. замечание 2.3). Далее,

$$\Phi_\varepsilon = \int_0^T \langle Q^{-1/2} P_H Q^{1/2} \varphi, \theta \rangle dt + \varepsilon \int_0^T \langle Q^{-1/2} P_H Q^{1/2} \varphi, dw_Q(t) \rangle.$$

Но

$$\langle Q^{-1/2} P_H Q^{1/2} \varphi, \theta \rangle = \langle P_H Q^{1/2} \varphi, Q^{-1/2} \theta \rangle = \langle Q^{1/2} \varphi, Q^{-1/2} \theta \rangle = \langle \varphi, \theta \rangle,$$

так что Φ_ε есть несмещенная оценка с гауссовским распределением и оптимальной дисперсией $\sigma^2 = \|P_H Q^{1/2} \varphi\|^2$.

Рассмотренные примеры полностью решают задачу асимптотически эффективного оценивания значения линейного функционала $\Phi(\theta)$ при линейных ограничениях. Умея оценивать эффективно линейные функционалы, можно, следуя методам, развитым в [7], [9], строить асимптотически эффективные оценки для дифференцируемых функционалов.

Теорема 3.2. Пусть оператор $Q = I$. Допустим, что параметрическое множество Θ есть ограниченное множество в $\mathcal{L}_2$ и что его поперечники Колмогорова в $\mathcal{L}_2$ $d_n(\Theta) = O(n^{-\beta})$. Допустим, что оцениваемый вещественнозначный функционал дифференцируем по Фреше и производная его $\Phi'(\theta)$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$\|\Phi'(\theta_2) - \Phi'(\theta_1)\| \leq C \|\theta_2 - \theta_1\|^\gamma,$$

причем $\gamma > (2\beta)^{-1}$.

Тогда существует такая оценка Φ_ε функционала $\Phi(\theta)$, что разность $\varepsilon^{-1}(\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta))$ асимптотически нормальна со средним нуль и дисперсией $\|\Phi'(\theta)\|^2$.

Отметим, что теорема 3.2 не есть просто теорема существования. В процессе доказательства указывается конкретная конструкция оценки Φ_ε .

В силу (3.3), (3.4) оценка теоремы 3.2 будет асимптотически эффективной.

Обобщение методов § 2, 3 позволяет строить асимптотически эффективные оценки полиномиальных функционалов $\Phi(\theta)$, что в свою очередь позволяет доказывать обобщения теоремы 3.2 в духе [9], [7]. В силу некоторой громоздкости этих результатов мы предпочитаем опубликовать их отдельно и рассмотрим лишь следующий

Пример 3.4. Рассмотрим задачу оценивания функционала $\Phi(\theta) = \|\theta\|^2$, которая в случае оценивания в одномерном гауссовском белом шуме исследовалась авторами в [6] (ср. также [9]). Будем предполагать, что $\Theta \subseteq \{\theta: \|\theta\| \leq 1\}$. Обозначим $d_n(\Theta)$ n -й поперечник Колмогорова в $\mathcal{L}_2$, т.е.

$$d_n(\Theta) = \inf_M \sup_{\theta \in \Theta} \inf_{m \in M} \|\theta - m\|$$

и M пробегает все линейные подмногобразия $\mathcal{L}_2$ размерности не больше n . Для простоты ограничимся случаем, когда при определении d_n достаточно рассматривать лишь те M , которые являются подпространствами. Пусть N — целое. Можно найти такое подпространство M , что, например, уклонение Θ от M не превзойдет $2d_N$. Обозначим $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ ортогональный базис в M и $\varphi_{N+1}, \dots$ — его дополнение до базиса в $\mathcal{L}_2$. Разлагая θ в ряд Фурье по $\{\varphi_j\}$:

$$\theta = \sum_1^\infty (\theta, \varphi_j) \varphi_j = \sum_1^\infty a_j \varphi_j,$$

будем иметь, что $\sup_\theta \sum_{N+1}^\infty a_j^2 \leq 4d_N^2$. Хорошими оценками для a_j (см. пример 3.1) служат оценки

$$\hat{a}_j = \int_0^T \langle \varphi_j(t), du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle,$$

понимаемые в смысле (2.11). Эти оценки — несмещенные нормальные, причем случайные величины $\xi_j = \hat{a}_j - a_j$ имеют вторые моменты $E\xi_j^2 = \varepsilon^2 \|Q^{1/2} \varphi_j\|^2$.

Рассмотрим теперь следующую оценку для $\Phi(\theta) = \|\theta\|^2$:

$$\Phi_N = \sum_1^N \hat{a}_j^2 - \varepsilon^2 \sum_1^N \|Q^{1/2} \varphi_j\|^2.$$

Тогда

$$\Phi_N - \Phi(\theta) = 2\varepsilon \sum_1^\infty a_j \xi_j + R_N,$$

где

$$R_N = - \sum_{N+1}^{\infty} a_j^2 - 2\varepsilon \sum_{N+1}^{\infty} a_j \xi_j + \varepsilon^2 \sum_1^N (\xi_j^2 - \mathbf{E} \xi_j^2).$$

Ряд $\sum_1^{\infty} a_j \xi_j$ сходится, причем дисперсия

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(2\varepsilon \sum_1^{\infty} a_j \xi_j \right)^2 &= 4\varepsilon^2 \sum a_i a_j (Q^{1/2} \varphi_i, Q^{1/2} \varphi_j) = 4\varepsilon^2 \|Q^{1/2} \theta\|^2 \\ &= \varepsilon^2 \operatorname{tr} (\Phi'(\theta) Q (\Phi'(\theta))^*) \end{aligned}$$

совпадает с оптимальной дисперсией из (3.3), (3.4). Следовательно, при надлежащем выборе $N = N(\varepsilon)$ оценки $\Phi_\varepsilon = \Phi_{N(\varepsilon)}$ будут асимптотически эффективны, если $\mathbf{E} |R_{N(\varepsilon)}|^2 = o(\varepsilon^2)$.

Имеем при $N = N(\varepsilon) \rightarrow \infty$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\mathbf{E} |R_N|^2 \leq 16 d_N^4 + \varepsilon^4 \mathbf{E} \left(\sum_1^N \xi_j^2 - \mathbf{E} \xi_j^2 \right)^2 + o(\varepsilon^2).$$

Пусть далее P_M есть проектор на M . Так как M имеет конечную размерность, то P_M — оператор с конечным следом, равным $\dim M$, и для любого ортонормального базиса $\{\psi_j\}$ в $\mathcal{L}_2$

$$\sum_1^{\infty} \|P_M \psi_j\|^2 = \dim M = N.$$

Поэтому (если обозначить $\{\psi_j\}$, $\{\lambda_j\}$ собственные функции и собственные числа оператора Q)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\sum_1^N \xi_j^2 - \mathbf{E} \xi_j^2 \right)^2 &= 2 \sum_{i,j=1}^N (Q \varphi_i, \varphi_j)^2 = 2 \sum_{i,j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (\varphi_i, \psi_k)^2 (\varphi_j, \psi_k)^2 \\ &= 2 \sum_1^{\infty} \lambda_k^2 \|P_M \psi_k\|^4. \end{aligned}$$

Если $p \geq 2$, то последнее выражение не превзойдет

$$2 \left(\sum_1^{\infty} \lambda_k^p \right)^{2/p} \left(\sum_1^{\infty} \|P_M \psi_k\|^{(4p)/(p-2)} \right)^{(p-2)/p} \leq 2 \left(\sum_1^{\infty} \lambda_k^p \right)^{2/p} N^{1-2/p},$$

и мы приходим к следующему утверждению:

если оператор Q принадлежит классу S_p Неймана–Шаттена (см., например, [12]) и имеет там норму $|Q|_p$, $2 \leq p \leq \infty$, то

$$\mathbf{E} |R_N|^2 \leq 2\varepsilon^4 |Q|_p^2 N^{1-2/p} + 16 d_N^4 + o(\varepsilon^2).$$

Из последнего неравенства легко вытекают следующие результаты:

1. Если $Q \in S_2$, то асимптотически эффективная оценка для $\|\theta\|^2$ существует, уже если $d_n(\Theta) \rightarrow 0$, т.е. если Θ — компакт в $\mathcal{L}_2$.

2. Если $Q \in S_p$, $p > 2$, а $d_n(\Theta) = O(h^{-\beta})$, то асимптотически эффективная оценка для $\|\theta\|^2$ существует, когда $\beta > \frac{1}{4} - 1/(2p)$.

3. Если $Q \in S_p$, $p > 2$, $d_n(\Theta) = O(n^{-\beta})$ и $\beta > \frac{1}{4} - 1/(2p)$, то

$$\inf_{T_\varepsilon} \sup_{\theta} \mathbf{E}_\theta |T_\varepsilon - \Phi(\theta)|^2 = O(n^{-(16\beta p)/(4\beta p + p - 2)}).$$

Все эти результаты, вообще говоря, не могут быть улучшены (ср. [5], [7], [9]); более того, если, например, $Q = I$, а $\Theta = \{\theta: \|\theta\| = 1\} \cup \{\theta: \theta \equiv 0\}$, то уже состоятельное оценивание $\|\theta\|^2$ невозможно.

Пример 3.5. Пусть оценке подлежит линейный функционал $\Phi(\theta) = (\varphi, \theta)$, а множество $\Theta \subseteq \{\theta: \|\theta\| = 1\}$. В этом случае оператор P_H из теоремы 3.1 проектирует на пространство, ортогональное к $Q^{1/2}\theta$, и дисперсия случайной величины ξ из теоремы 3.1 равна

$$\sigma^2 = \text{tr} \left(\Phi'(\theta) Q^{1/2} P_H Q^{1/2} (\Phi'(\theta))^* \right) = \|Q^{1/2} \varphi\|^2 - \frac{(Q^{1/2} \varphi, Q^{1/2} \psi)^2}{\|Q^{1/2} \theta\|^2}.$$

Ограничившись случаем $Q = I$, рассмотрим оценку

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon &= \int_0^T \langle \varphi, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \langle \varphi, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle (F_\varepsilon - 1), \end{aligned}$$

где F_ε — оценка для $F(\theta) = \|\theta\|^2$, построенная в предыдущем примере. Из результатов предыдущего примера следует, что когда F_ε асимптотически эффективна для F , оценка Φ_ε будет таковой для $\Phi(\theta)$.

Пример 3.6. Пусть теперь θ есть элемент k -параметрического семейства $\theta(t, x; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и речь идет об оценке параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. В этом случае параметрическое множество Θ есть k -мерная поверхность $\theta(\cdot; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Определим функцию $\Phi(\theta)$ равенством

$$\Phi(\theta(\cdot; \alpha_1, \dots, \alpha_k)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

Дифференцируя последнее равенство по α_j , найдем, что $\Phi'(\theta)$ есть матрица $\text{diag}(\dots \partial \theta / \partial \alpha_j \dots)$. Касательное пространство порождено векторами $\partial \theta / \partial \alpha_j$, а пространство H — векторами $(\partial Q^{-1/2} \theta / \partial \alpha_i)$. Поэтому корреляционная матрица вектора ξ из (3.3) есть матрица

$$\left\| \int_0^T \left\langle \frac{\partial Q^{-1/2} \theta}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial Q^{-1/2} \theta}{\partial \alpha_j} \right\rangle dt \right\|^{-1},$$

обратная к матрице Фишера

$$\left\| \int_0^T \left\langle \frac{\partial Q^{-1/2} \theta}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial Q^{-1/2} \theta}{\partial \alpha_j} \right\rangle dt \right\|.$$

Разумеется, все эти рассуждения проводятся в предположении невырожденности и гладкости Θ . Конечно, вместо ссылки на теорему 3.1 можно было бы вычислить матрицу Фишера непосредственно, используя отношение правдоподобия, и затем сослаться на неравенство Гаека–Ле Кама, как это сделано в [11]. Асимптотически эффективные оценки могут быть построены методом максимального правдоподобия так же, как и в [9].

Пример 3.7. Рассмотрим задачу оценивания значения $\theta(t, x)$ функции θ в точке (t, x) или всей функции θ . В первом случае функционал $\Phi(\theta) = \theta(t, x)$ линейен, но неограничен в $\mathcal{L}_2$. Во втором случае $\Phi(\theta) = \theta$ и оператор $\Phi'(\theta) Q^{1/2} P_H = Q^{1/2} P_H$ будет оператором Гильберта–Шмидта в $\mathcal{L}_2$ лишь в особых случаях. Таким образом, в обеих этих задачах в общем случае асимптотически эффективные оценки не будут существовать. Мы посвятим исследованию этой задачи ч. II.

Теперь же рассмотрим следующий пример. Пусть Θ состоит из функций, зависящих только от x . Пусть Q — оператор с конечным следом. Пространство H есть подпространство в $\mathcal{L}_2$ функций, не зависящих от t . Случайный гауссов элемент ξ в (3.3) имеет корреляционный оператор $Q^{1/2} P_H Q^{1/2}$ и совпадает по распределению с $T^{-1} w_\theta(T, x)$. Область определения случайной функции $X(\varphi)$ в нашем случае может быть расширена так, чтобы включить $\varphi(t, z) = \delta(z - x)$. Статистика

$$\frac{1}{T} \int_0^T \langle \delta(\cdot - x), du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle = \theta(x) + \frac{\varepsilon}{T} w_Q(T, x)$$

— несмещенная гауссовская асимптотически эффективная оценка для $\theta(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.
2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
3. Шубин М., Егоров Ю. (ред.). Дифференциальные уравнения в частных производных. VI. Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр., т. 63. М.: ВИНТИ, 1990.
4. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992, 454 p.
5. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Об оценке бесконечномерного параметра в гауссовском белом шуме. — Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 5, с. 1053–1055.
6. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Одна задача оценивания в гауссовском белом шуме. — Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 6, с. 1300–1302.

7. Ибрагимов И. А., Немировский А. С., Хасьминский Р. З. Некоторые задачи непараметрического оценивания в гауссовском белом шуме. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 3, с. 451–466.
8. Walsh J. Regularity properties of a stochastic partial differential equation. — In: Seminar on Stochastic Processes. Progr. Probab. Statist., 1984, v. 7, p. 257–290.
9. Ibragimov I., Khas'minskii R. Asymptotically normal families of distributions and efficient estimation. — Ann. Statist., 1991, v. 19, № 4, p. 1681–1724.
10. Козлов С. М. Некоторые вопросы стохастических уравнений в частных производных. — Труды сем. им. Петровского, 1978, в. 4, с. 147–172.
11. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.
12. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
13. Ibragimov I., Khas'minskii R. Some estimation problems in infinite dimensional Gaussian white noise. — In: Festschrift for Lucien Le Cam: Research Papers in Probability and Statistics. Ed. by D. Pollard et al. New York: Springer-Verlag, 1997.
14. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
15. Omatu S., Seinfeld J. H. Distributed Parameter Systems. Theory and Applications. Oxford: Clarendon Press, 1989, 430 p.
16. Aihara S. I. Regularized maximum likelihood estimate for an infinite-dimensional parameter in stochastic parabolic systems. — SIAM J. Control Optim., 1992, v. 30, № 4, p. 745–764.
17. Bagchi A., Borkar V. Parameter identification in infinite dimensional linear systems. — Stochastics, 1984, v. 12, p. 201–213.
18. Kappel F., Künisch K., Schappacher W. (ed.). Control and Estimation of Distributed Parameter Systems. Basel: Birkhäuser, 1989, 434 p.
19. Kappel F., Künisch K., Schappacher W. (ed.). Control Theory for Distributed Parameter Systems and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1983, 245 p.
20. Huebner M., Khas'minskii R., Rozovskii B. Two examples of parameter estimation. — In: Stochastic Processes. Ed. by S. Cambanis et al. New York: Springer-Verlag, 1993, p. 149–160.
21. Huebner M., Rozovskii B. On asymptotic properties of maximum likelihood estimators for parabolic stochastic PDE's. — Probab. Theory Relat. Fields, 1995, v. 103, № 2, p. 143–163.
22. Friedman A. Partial Differential Equations. New York: Holt, Rinehart & Winston, Inc., 1969, 262 p.
23. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
24. Ибрагимов И. А. Об условиях гладкости траекторий случайных функций. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. XXVIII, в. 2, с. 229–250.
25. Chow P. L., Ibragimov I., Khas'minskii R. Statistical approach to some inverse problems for linear partial differential equations. — Probab. Theory Relat. Fields (в печати).

Поступила в редакцию
9.XII.1997