Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Вронский, Скорость сходимости в УЗБЧ для ассоциированных последовательностей и полей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 3, 439–455

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1553>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:48:35

© 1998 г.

ВРОНСКИЙ М. А.*

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ В УЗБЧ
ДЛЯ АССОЦИИРОВАННЫХ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ПОЛЕЙ¹⁾

Доказаны неравенства типа Розенталя для моментов сумм ассоциированных случайных величин, заданных на решетке $\mathbf{Z}^d$. С их помощью получена оценка скорости сходимости в УЗБЧ для ассоциированных случайных процессов и случайных полей.

Ключевые слова и фразы: случайные поля, ассоциированность, неравенства типа Розенталя, скорость сходимости в УЗБЧ.

1. Введение. Среди вопросов, возникающих в классической теории суммирования случайных величин (с.в.), важное место занимают различные оценки скорости сходимости в законах больших чисел. А именно, для последовательности $X_1, \dots, X_n, \dots$ независимых одинаково распределенных (н.о.р.) с.в. и $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ изучаются оценки вероятностей $P\{|S_n| \geq \varepsilon n^\alpha\}$, где $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Экспоненциальные оценки таких вероятностей, в предположении существования экспоненциальных моментов, (примыкающие к оценкам больших уклонений) были получены впервые Г. Крамером.

Баум и Кац в [5] доказали для н.о.р. слагаемых с $EX_1 = 0$, что при $p \geq 1$ следующие утверждения эквивалентны:

$$E|X_1|^p < \infty, \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} P\{|S_n| \geq \varepsilon n^\alpha\} < \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0 \text{ и } \alpha > \frac{1}{2}, \alpha p \geq 1, \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} P\left\{\sup_{j \geq n} j^{-\alpha} |S_j| \geq \varepsilon\right\} < \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0 \text{ и } \alpha > \frac{1}{2}, \alpha p \geq 1. \quad (3)$$

Этот результат был обобщен рядом авторов на случай процессов с перемешиванием (см., например, [12], [13], [15], [16]).

*Московский государственный университет, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899, Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01092.

В предлагаемой работе исследуется связь утверждений типа (1), (2), (3) для процессов и полей со свойством ассоциированности. Напомним, что набор $(Y_1, \dots, Y_m)$ действительных с.в. называется ассоциированным, если

$$\text{Cov}(f(Y_1, \dots, Y_m), g(Y_1, \dots, Y_m)) \geq 0$$

для всех покоординатно неубывающих функций $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, для которых ковариация определена. Семейство действительных величин $\{Y_t, t \in T\}$ ассоциировано, если любой конечный набор величин этого семейства ассоциирован. Отметим, что любая совокупность независимых действительных с.в. является ассоциированной.

Нам далее понадобится следующий результат об оценке ковариаций функций от ассоциированных случайных величин (см. [7], где рассмотрены также слабо ассоциированные и отрицательно зависимые поля). Обозначим $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ класс непрерывных функций $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, имеющих односторонние частные производные по любой переменной в любой точке:

$$\exists \frac{\partial^+ f}{\partial x_k}, \frac{\partial^- f}{\partial x_k} \quad \text{при } x \in \mathbf{R}^m, k = 1, \dots, m,$$

и для которых, кроме того, число точек x , где $\partial^+ f / \partial x_k \neq \partial^- f / \partial x_k$ при некотором k , конечно в каждом ограниченном множестве из $\mathbf{R}^m$.

Для $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ обозначим

$$L_k(f) = \max \left\{ \sup_x \left| \frac{\partial^+ f}{\partial x_k} \right|, \sup_x \left| \frac{\partial^- f}{\partial x_k} \right| \right\}.$$

Лемма ([7]). Пусть $\{Y_t, t \in T\}$ — ассоциированное семейство случайных величин, а I, J — конечные подмножества T . Тогда для всех $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^{|I|})$, $g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^{|J|})$ ($|I|$ обозначает число элементов конечного множества I) выполняется неравенство

$$\left| \text{Cov}(f(Y_q, q \in I), g(Y_j, j \in J)) \right| \leq \sum_{q \in I} \sum_{j \in J} L_q(f) L_j(g) \text{Cov}(Y_q, Y_j).$$

2. Аналог неравенства Розенталя для ассоциированных случайных величин. Мы получим оценку для скорости сходимости в УЗБЧ с помощью моментного неравенства типа неравенства Розенталя, известного для независимых величин. Аналоги таких неравенств в случае полей с перемешиванием см. в [3], [10], [11]. О других моментных неравенствах для ассоциированных с.в. см. [1], [2], [6].

Мы будем оценивать моменты сумм с.в., берущихся по конечным подмножествам $\mathbf{Z}^d$. Через $\rho(x, y) = \|x - y\| = \max_{i=1, \dots, d} |x_i - y_i|$ обозначим нужные нам метрику и норму в $\mathbf{Z}^d$. Для с.в. X и $\gamma \geq 1$ пусть, как

обычно, $\|X\|_\gamma = (\mathbb{E}|X|^\gamma)^{1/\gamma}$. Коэффициент Кокса-Гриммета ([9]) для ассоциированного случайного поля $\{Y_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ определяется формулой

$$u(r) = \sup_{j_1} \sum_{\|j_1 - j_2\| \geq r} \text{Cov}(Y_{j_1}, Y_{j_2}).$$

Теорема 1. Пусть $\{Y_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ — поле ассоциированных случайных величин с $\mathbb{E}Y_j = 0$, $\mathbb{E}Y_j^2 \geq \sigma^2$, $j \in \mathbb{Z}^d$, и для целого четного $k \geq 2$ и $\delta > 0$ выполнены следующие условия:

$$\sum_{r=1}^{\infty} (u(r))^{\delta/(k+\delta-2)} r^{d(k-1)-1} < \infty, \quad (4)$$

$$\mathbb{E}|Y_j|^{k+\delta} < \infty, \quad j \in \mathbb{Z}^d.$$

Тогда существует такое $C = C(k, d, \delta, \sigma^{-2}u(\cdot))$, что для любого конечного множества $T \subset \mathbb{Z}^d$ справедливо неравенство

$$\mathbb{E} \left| \sum_{j \in T} Y_j \right|^k \leq C \max \left(\sum_{j \in T} \|Y_j\|_{k+\delta}^k, \left(\sum_{j \in T} \|Y_j\|_{2+\delta}^2 \right)^{k/2} \right). \quad (5)$$

Доказательство теоремы будет опираться на следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ — набор ассоциированных случайных величин, удовлетворяющих условиям $\|X_i\|_{k+\delta} < \infty$, $\|Y_q\|_{k+\delta} < \infty$ при всех $i = 1, \dots, m$, $q = 1, \dots, n$ и некотором $\delta > 0$ и $k = m + n \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1 \dots X_m, Y_1 \dots Y_n) &\leq 3 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^n \text{Cov}(X_i, Y_q) \right)^{\delta/(k+\delta-2)} \\ &\times \left(\|X_1\|_{k+\delta} \dots \|Y_n\|_{k+\delta} (\|X_1\|_{k+\delta}^\delta + \dots + \|Y_n\|_{k+\delta}^\delta) \right)^{(k-2)/(k+\delta-2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство леммы 1. Для $M > 0$ обозначим $h_M(x) = (x \wedge M) \vee -M$, $\tilde{h}_M(x) = x - h_M(x)$. Перепишем оцениваемое выражение так:

$$\begin{aligned} &\text{Cov}(X_1 \dots X_m, Y_1 \dots Y_n) \\ &= \text{Cov}(h_M(X_1) h_M(X_2) \dots h_M(X_m), h_M(Y_1) \dots h_M(Y_n)) \\ &\quad + \text{Cov}(\tilde{h}_M(X_1) h_M(X_2) \dots h_M(X_m), h_M(Y_1) \dots h_M(Y_n)) \\ &\quad + \text{Cov}(X_1 \tilde{h}_M(X_2) \dots h_M(X_m), h_M(Y_1) \dots h_M(Y_n)) \\ &\quad + \dots + \text{Cov}(X_1 X_2 \dots X_m, Y_1 \dots \tilde{h}_M(Y_n)) \\ &= J + J_1 + \dots + J_{m+n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Все слагаемые в правой части (7), кроме первого, оценим следующим способом:

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(\tilde{h}_M(X_1) h_M(X_2) \cdots h_M(X_m), h_M(Y_1) \cdots h_M(Y_n)) \\ & \leq \mathbf{E}|\tilde{h}_M(X_1) h_M(X_2) \cdots h_M(X_m) h_M(Y_1) \cdots h_M(Y_n)| \\ & \quad + \mathbf{E}|\tilde{h}_M(X_1) h_M(X_2) \cdots h_M(X_m)| \mathbf{E}|h_M(Y_1) \cdots h_M(Y_n)|. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $|\tilde{h}_M(x)| \leq M^{-\delta}|x|^{1+\delta}$, $|h_M(x)| \leq |x|$, и применяя неравенства Гёльдера и Ляпунова, получим для J_r , $r = 1, \dots, k$, оценки

$$J_r \leq 2M^{-\delta} \|X_r\|_{k+\delta}^\delta \prod_{i=1}^m \|X_i\|_{k+\delta} \prod_{q=1}^n \|Y_q\|_{k+\delta} \quad \text{при } 1 \leq r \leq m,$$

$$J_r \leq 2M^{-\delta} \|Y_{r-m}\|_{k+\delta}^\delta \prod_{i=1}^m \|X_i\|_{k+\delta} \prod_{q=1}^n \|Y_q\|_{k+\delta} \quad \text{при } m+1 \leq r \leq m+n.$$

Для оценки первого слагаемого используем лемму из введения (см. также лемму 2 из [1]), с ее помощью получим

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(h_M(X_1) h_M(X_2) \cdots h_M(X_m), h_M(Y_1) \cdots h_M(Y_n)) \\ & \leq M^{k-2} \sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^n \text{Cov}(X_i, Y_q). \end{aligned}$$

Если $\sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^n \text{Cov}(X_i, Y_q) = 0$, то неравенство (6) выполнено. В противном случае, беря

$$\begin{aligned} M &= \left(\sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^n \text{Cov}(X_i, Y_q) \right)^{-1/(k+\delta-2)} \\ & \quad \times \left(\|X_1\|_{k+\delta} \cdots \|Y_n\|_{k+\delta} (\|X_1\|_{k+\delta}^\delta + \cdots + \|Y_n\|_{k+\delta}^\delta) \right)^{1/(k+\delta-2)}, \end{aligned}$$

получаем утверждение леммы 1.

Обозначим для фиксированных $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$, $\delta > 0$ и конечного множества $T \subset \mathbf{Z}^d$

$$Q_m = \max \left(\sum_{j \in T} \|Y_j\|_{m+\delta}^m, \left(\sum_{j \in T} \|Y_j\|_{2+\delta}^2 \right)^{m/2} \right).$$

Лемма 2. Если $m, q \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$, $q \geq 2$, то $Q_m Q_q \leq Q_{m+q}$.

Доказательство этой леммы можно найти в книге [10].

Доказательство теоремы 1. Для данного $T \subset \mathbf{Z}^d$ будем обозначать $\tilde{T}^k$ множество неупорядоченных наборов из k элементов

множества T (с возможными повторами). Для набора $S \in T^p$ или $\tilde{S} \in \tilde{T}^p$ обозначим $Y(S) = Y_{s_1} \cdots Y_{s_p}$, где $S = (s_1, \dots, s_p)$. Обозначим также $\Pi(S) = \prod_{s \in U(S)} n(s)!$, где $U(S)$ — множество различных между собой компонент S , а $n(s)$ — кратность элемента s в S . Кроме того, введем для каждого конечного $U \subset \mathbf{Z}^d$ функцию

$$c(U) = \begin{cases} \sup\{r \mid \exists U_1 \subset U: U_1 \neq \emptyset, \\ U \setminus U_1 \neq \emptyset, \rho(U_1, U \setminus U_1) = r\}, & \text{если } |U| \geq 2, \\ 0, & \text{если } |U| = 1. \end{cases}$$

Здесь $\rho(U, V) = \inf\{\rho(x, y) : x \in U, y \in V\}$ для $U, V \subset \mathbf{Z}^d$, а $|U|$ — число элементов множества U . Будем также считать, что U , имеющее $c(U) = r$, разбивается на $U_1 \cup U_2$ с $\rho(U_1, U_2) = r$ однозначно, например, по способу, описанному в [1].

Оценку моментов четного порядка k начнем, как в [2], со следующего неравенства:

$$\mathbf{E} \left(\sum_{j \in T} Y_j \right)^k \leq A_k = \sum_{S \in T^k} |\mathbf{E}Y(S)| = \sum_{\tilde{S} \in \tilde{T}^k} \frac{k!}{\Pi(\tilde{S})} |\mathbf{E}Y(\tilde{S})|.$$

Заметим, что $Y(\tilde{S}) = Y(S)$, $\Pi(\tilde{S}) = \Pi(S)$. Для $m \leq k$ имеем

$$A_m \leq \sum_{r=1}^{\text{diam} T} \sum_{q=1}^{k-1} \sum'_{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2} \frac{m!}{\Pi(\tilde{S})} |\mathbf{E}Y(\tilde{S}_1)Y(\tilde{S}_2)| + \sum_{j \in T} |\mathbf{E}Y_j^m|^k, \quad (8)$$

где $\sum'$ берется по таким наборам $\tilde{S}_1 \in \tilde{T}^q$, $\tilde{S}_2 \in \tilde{T}^{m-q}$, что

$$\rho(U(\tilde{S}_1), U(\tilde{S}_2)) = c(U(\tilde{S}_1) \cup U(\tilde{S}_2)) = r. \quad (9)$$

Первую сумму в правой части (8) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{\text{diam} T} \sum_{q=1}^{m-1} \sum'_{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2} \frac{m!}{\Pi(\tilde{S})} |\mathbf{E}Y(\tilde{S}_1)Y(\tilde{S}_2)| \\ & \leq \sum_{r=1}^{\text{diam} T} \sum_{q=1}^{m-1} \sum'_{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2} \frac{m!}{\Pi(\tilde{S})} |\mathbf{E}Y(\tilde{S}_1)| |\mathbf{E}Y(\tilde{S}_2)| \\ & \quad + \sum_{r=1}^{\text{diam} T} \sum_{q=1}^{m-1} \sum'_{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2} \frac{m!}{\Pi(\tilde{S})} |\text{Cov}(Y(\tilde{S}_1), Y(\tilde{S}_2))| = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что $\Pi(S_1, S_2) = \Pi(S_1)\Pi(S_2)$, если $U(S_1) \cap U(S_2) = \emptyset$. Поэтому

$$I_1 \leq \sum_{q=1}^{m-1} \binom{m}{q} \sum_{S_1 \in T^q} |\mathbf{E}Y(S_1)| \sum_{S_2 \in T^{m-q}} |\mathbf{E}Y(S_2)| = \sum_{q=1}^{m-1} \binom{m}{q} A_q A_{m-q},$$

где, как обычно, $\binom{m}{q} = m!/(q!(m-q)!)$. Применяя лемму 1 и замечая, что $\text{Cov}(Y_j, Y_s) \leq u(r)$, если $j \in U(S_1)$, $s \in U(S_2)$ и S_1, S_2 удовлетворяют (9), получим оценку

$$\begin{aligned} I_2 &\leq m! \sum_{r=1}^{\text{diam} T} \sum_{q=1}^{m-1} \sum'_{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2} 3m^{2\delta/(m+\delta-2)} (u(r))^{\delta/(m+\delta-2)} F((\tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2)) \\ &= 3m! m^{2\delta/(m+\delta-2)} \sum_{r=1}^{\text{diam} T} (u(r))^{\delta/(m+\delta-2)} \sum''_{\tilde{S} \in \tilde{T}^m} F(\tilde{S}). \end{aligned}$$

Здесь $\sum''$ берется по всем наборам $\tilde{S} \in \tilde{T}^m$ таким, что $c(U(\tilde{S})) = r$, а

$$F(\tilde{S}) = F(S) = \left(\prod_{i=1}^m \|Y_{s_i}\|_{m+\delta} \sum_{i=1}^k \|Y_{s_i}\|_{m+\delta}^\delta \right)^{(m-2)/(m+\delta-2)},$$

причем через $\tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$ для $\tilde{S}_1 \in \tilde{T}^q$ и $\tilde{S}_2 \in \tilde{T}^{m-q}$ мы обозначили объединение этих наборов, принадлежащее $\tilde{T}^m$.

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} F(S) &\leq m^{(m-2)/(m+\delta-2)} \max_{s \in U(S)} \|Y_s\|_{m+\delta}^{(m+\delta)(m-2)/(m+\delta-2)} \\ &\leq m^{(m-2)/(m+\delta-2)} \sum_{s \in U(S)} \|Y_s\|_{m+\delta}^{(m+\delta)(m-2)/(m+\delta-2)}, \end{aligned}$$

получаем, что

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 3m^{(m-2+2\delta)/(m+\delta-2)} \\ &\times \sum_{r=1}^{\text{diam} T} (u(r))^{\delta/(m+\delta-2)} \sum'''_{UCT} \sum_{s \in U} \|Y_s\|_{m+\delta}^{(m+\delta)(m-2)/(m+\delta-2)}, \end{aligned}$$

где $\sum'''$ берется по всем таким $U \subset T$, что $c(U) = r$, $2 \leq |U| \leq k$. Последнее неравенство перепишем так:

$$I_2 \leq D(m, \delta) \sum_{r=1}^{\text{diam} T} (u(r))^{\delta/(k+\delta-2)} \sum_{s \in T} \|Y_s\|_{k+\delta}^{(k+\delta)(k-2)/(k-2+\delta)} \sum'''_{UCT, U \ni s} 1.$$

Осталось оценить число таких множеств $U \subset T$, что $c(U) = r$, $|U| \leq k$ и $U \ni s$. Пусть $U = U_1 \cup U_2$, причем $s \in U_1$, $|U_1| = q$, $|U_2| = p$. При $q > 1$ в шаре с центром в s и радиусом r найдется точка из U_1 , отличная от s . Если $q > 2$, то в объединении шаров радиуса r с центрами в этих двух точках найдется еще одна точка из U_1 , отличная от двух найденных ранее. Будем продолжать эту процедуру, пока не исчерпаем всех точек из U_1 . Далее, на объединении всех сфер радиуса r с центрами в точках

из U_1 есть точка из U_2 . Если $p > 1$, то в объединении шара радиуса r с центром в этой точке и сфер радиуса r с центрами в точках из U_1 есть еще одна точка из U_2 . Продолжая рассуждения таким образом, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \sum_{UCT, U \ni s}''' 1 &\leq \sum_{UCZ^d, U \ni s}''' 1 \\ &\leq \sum_{i=2}^m \sum_{q=1}^{i-1} b_r 2b_r \cdots (q-1) b_r q s_r (q s_r + b_r) \\ &\quad \cdots (q s_r + (i-q-1) b_r) \leq m! m^2 s_r b_r^{m-2}, \end{aligned}$$

где s_r и b_r обозначают число элементов сферы радиуса r и шара радиуса r соответственно (в Z^d с метрикой ρ). Мы учли также, что должна найтись точка из U_2 , отстоящая от одной из точек U_1 на расстояние r .

Итак, получена следующая оценка:

$$I_2 \leq G(m, \delta) \sum_{r=1}^{\text{diam} T} (u(r))^{\delta/(m+\delta-2)} s_r b_r^{m-2} \sum_{s \in T} \|Y_s\|_{m+\delta}^{(m+\delta)(m-2)/(m+\delta-2)}.$$

Поскольку $\sigma^2 \leq \mathbf{E} Y_j^2 = \|Y_j\|_2^2$ при всех j , то предыдущее неравенство можно переписать так:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq G(m, \delta) \sum_{r=1}^{\text{diam} T} (\sigma^{-2} u(r))^{\delta/(m+\delta-2)} s_r b_r^{m-2} \\ &\quad \times \sum_{s \in T} \|Y_s\|_{m+\delta}^{(m+\delta)(m-2)/(m+\delta-2)} \|Y_s\|_2^{2\delta/(m+\delta-2)} \\ &\leq G(m, \delta) \sum_{r=1}^{\text{diam} T} (\sigma^{-2} u(r))^{\delta/(m+\delta-2)} s_r b_r^{m-2} \sum_{s \in T} \|Y_s\|_{m+\delta}^m, \end{aligned}$$

где последнее неравенство вытекает из неравенства Ляпунова. Снова применяя неравенство Ляпунова, получим

$$\begin{aligned} A_m &\leq \sum_{q=1}^{m-1} \binom{m}{q} A_q A_{m-q} \\ &\quad + \left(1 + m! G(m, \delta) \sum_{r=1}^{\text{diam} T} (\sigma^{-2} u(r))^{\delta/(m+\delta-2)} s_r b_r^{m-2} \right) \\ &\quad \times \sum_{s \in T} \|Y_s\|_{m+\delta}^m. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим

$$H(m, \delta) = 1 + m! G(m, \delta) \sum_{r=1}^{\infty} (\sigma^{-2} u(r))^{\delta/(m+\delta-2)} s_r b_r^{m-2}, \quad (11)$$

причем ряд в (11) сходится по условию (4), поскольку $s_r \leq r^{d-1} 3^{d-1} 2d$ и $b_r \leq 3^d r^d$.

Теперь мы можем доказать, что $A_k \leq C_k Q_k$, где C_k не зависит от T , а выражается лишь через $k, \delta, d, \sigma^{-2} u(\cdot)$. Поскольку $A_1 = \sum_{j \in T} |EY_j| = 0$, из (10) вытекает, что $A_2 \leq H(2, \delta) Q_2$. Если $k \geq 3$, то применяя оценку (10) для $m = 3, \dots, k$ и пользуясь леммой 2, видим, что

$$\begin{aligned} A_k &\leq \sum_{q=1}^{k-1} \binom{k}{q} C_q C_{k-q} Q_q Q_{k-q} + H(k, \delta) Q_k \\ &\leq Q_k \left(\sum_{q=1}^{k-1} \binom{k}{q} C_q C_{k-q} + H(k, \delta) \right), \end{aligned}$$

что завершает доказательство неравенства (5) и теоремы 1.

З а м е ч а н и е 1. В работах [1] и [11] были независимо предложены подходы к оценке моментов сумм с.в. в терминах поведения функции

$$\left| \text{Cov} \left(\prod_{j \in U_1} X_j, \prod_{s \in U_2} X_s \right) \right|$$

в зависимости от $\rho(U_1, U_2)$, $|U_1|$, $|U_2|$ и других параметров. В [1] рассматривались случайные поля, а в [11] — процессы. Использование в моментных оценках функций такого вида позволяет рассматривать не только ассоциированные, но и другие зависимые с.в. В [11] при некоторых условиях на упомянутую функцию для ассоциированной последовательности X_j доказаны неравенства типа Розенталя для сумм $f(X_j)$, где f — ограниченная функция, удовлетворяющая условию Липшица. Изучение функций от зависимых случайных величин имеет важные приложения в математической статистике. Поэтому приведем соответствующий аналог теоремы 1 в этом случае. Отметим, что в отличие от [11] мы рассматриваем случайные поля и не предполагаем ограниченности функции f .

Теорема 2. Пусть $Y = \{Y_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ — поле ассоциированных случайных величин, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ такова, что для $Z_j = f(X_j)$ выполнено $EZ_j = 0$, $EZ_j^2 \geq \sigma^2$, $j \in \mathbb{Z}^d$. Пусть также для целого четного $k \geq 2$, $\delta > 0$ и коэффициента Кокса–Гриммета $u(r)$ поля Y выполнены следующие условия:

$$\sum_{r=1}^{\infty} (u(r))^{\delta/(k+\delta-2)} r^{d(k-1)-1} < \infty, \quad E|Z_j|^{k+\delta} < \infty, \quad j \in \mathbb{Z}^d.$$

Тогда существует такое $C = C(k, d, \delta, \sigma^{-2}u(\cdot), L(f))$, что для любого конечного множества $T \subset \mathbf{Z}^d$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E} \left| \sum_{j \in T} Z_j \right|^k \leq C \max \left(\sum_{j \in T} \|Z_j\|_{k+\delta}^k, \left(\sum_{j \in T} \|Z_j\|_{2+\delta}^2 \right)^{k/2} \right).$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

З а м е ч а н и е 2. При помощи модификации интерполяционной техники (см. [10]) можно при условиях теоремы 1 доказать для всех $T \subset \mathbf{Z}^d$ и $2 \leq t \leq k$ неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \sum_{j \in T} Y_j \right|^t &\leq C(k, t, d, \delta, \sigma^{-2}u(\cdot)) \\ &\times \max \left(\sum_{j \in T} \|Y_j\|_{t+\delta}^t, \left(\sum_{j \in T} \|Y_j\|_{2+\delta}^2 \right)^{t/2} \right). \end{aligned}$$

3. Скорость сходимости в УЗБЧ для последовательностей.

Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ — последовательность ассоциированных с.в., для которых

$$\mathbf{E}X_j = 0, \quad 0 < \sigma^2 = \mathbf{E}X_j^2 < \infty. \quad (12)$$

Обозначим $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $M_n = \max(|S_1|, \dots, |S_n|)$.

Теорема 3. Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ — последовательность ассоциированных одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих (12). Пусть, кроме того, для некоторых $p \geq 2$, $\delta > 0$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ и k — целого четного, большего $(p\alpha - 1)/(\alpha - \frac{1}{2})$, выполнены условия

$$\mathbf{E}|X_1|^{p+\delta} < \infty, \quad (13)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} (u(r))^{\delta/(k-2+\delta)} r^{k-2} < \infty. \quad (14)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} \mathbf{P}\{M_n \geq \varepsilon n^\alpha\} < \infty. \quad (15)$$

З а м е ч а н и е 3. Из (15), с помощью рассуждений, проведенных в [13], можно вывести, что в условиях теоремы 3 выполнено также утверждение (3).

Доказательство теоремы будет производиться с помощью метода урезания и доказанного выше аналога неравенства Розенталя.

Нам понадобится следующее максимальное неравенство.

Лемма 3 ([14]). Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ — ассоциированная последовательность с $EX_i = 0$ и $EX_i^2 < \infty$, $\sigma_n = ES_n^2$. Тогда при $\alpha_2 - \alpha_1 > 1$ и любом n справедлива оценка

$$P\{M_n \geq \alpha_2 \sigma_n\} \leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 - 1} P\{|S_n| \geq \alpha_1 \sigma_n\}.$$

Доказательство теоремы 3. Для $a > 0$ введем обозначения

$$X_k(a) = ((X_k \wedge a) \vee -a) - E((X_k \wedge a) \vee -a),$$

$$S_k(a) = X_1(a) + \dots + X_k(a), \quad M_k(a) = \max(|S_1(a)|, \dots, |S_n(a)|).$$

Тогда имеет место оценка

$$P\{M_n \geq \varepsilon a\} \leq P\{M_n(a) \geq \varepsilon a\} + nP\{|X_1| \geq a\}.$$

Поскольку в случае ассоциированных с.в. $\sigma^2 \leq \sigma_n^2/n \leq u(0)$, то, беря $a = n^\alpha$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, и замечая, что по предыдущему неравенству при всех достаточно больших n выполнено $a\varepsilon/(2\sigma_n) > \sqrt{2}$, получим, с учетом леммы 3, что

$$P\{M_n(a) \geq \varepsilon a\} \leq 2P\{|S_n(a)| \geq \frac{a\varepsilon}{2}\}$$

при всех достаточно больших n . Далее, воспользовавшись неравенством Чебышева, получим

$$P\{M_n(a) \geq \varepsilon a\} \leq 2^{k+1}(\varepsilon a)^{-k} \|S_n(a)\|_k^k.$$

При достаточно большом a имеем $E(X_1(a))^2/\sigma^2 > \frac{1}{2}$. По теореме 1 (ее условия выполнены, поскольку справедливо (14)) при таких a

$$\|S_n(a)\|_k^k \leq B \max\left(n\|X_1(a)\|_{k+\delta}^k, n^{k/2}\|X_1(a)\|_{2+\delta}^k\right), \quad (16)$$

причем B можно взять равным $2C_k$ (где C_k фигурирует в (5)). Действительно, в силу леммы из введения для коэффициента Кокса–Гриммета последовательности $X_i(a)$ (ассоциированной, поскольку функция $h_a(x) = (x \wedge a) \vee -a$ не убывает на $\mathbf{R}$) верно неравенство $\sigma_a^{-2}u_a(r) \leq 2\sigma^{-2}u(r)$ при всех $r \geq 0$, здесь $\sigma_a^2 = EX_1^2(a)$.

Теперь оценим сумму $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2 - \alpha k} \|S_n(n^\alpha)\|_k^k$. Согласно (16), она не превосходит

$$B_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2 - \alpha k} \left(n\|X_1(n^\alpha)\|_{k+\delta}^k + n^{k/2}\|X_1(n^\alpha)\|_{2+\delta}^k \right) = I_1 + I_2,$$

где множитель B_1 зависит от k, δ и $\sigma^{-2}u(\cdot)$.

Оценим I_q , $q = 1, 2$. Заметим, что $|X_1(a)| \leq |X_1| + |\mathbf{E}h_a(X_1)| \leq |X_1| + 1$ при достаточно больших n , и, следовательно, $\|X_1(a)\|_b \leq \|X_1\|_b + 1$ для $b \leq p + \delta$. Получим

$$I_2 = O \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2 - \alpha k + k/2} \right) = O \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1 + (\alpha p - 1) - (\alpha - \frac{1}{2})k} \right) < \infty$$

по выбору k .

Введем обозначение $p_j = \mathbf{P}\{j - 1 \leq |X_1| < j\}$, $j \in \mathbf{N}$, и оценим I_1 , заметив, что либо при достаточно большом a выполняется $\|X_1(a)\|_{k+\delta}^k \geq 1$, либо $\mathbf{E}|X_1|^{k+\delta} < \infty$. В первом случае

$$\begin{aligned} I_2 &= O \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 1 - \alpha k} \left(\sum_{j=1}^{[n^\alpha]} j^{k+\delta} p_j + n^{\alpha(k+\delta)} \sum_{j > n^\alpha} p_j \right) \right) \\ &= O \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{k+\delta} p_j \sum_{n \geq j^{1/\alpha}} n^{\alpha p - 1 - \alpha k} + \sum_{j=1}^{\infty} p_j \sum_{n \leq j^{1/\alpha}} n^{\alpha(p+\delta)-1} \right) \\ &= O \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{k+\delta} p_j j^{p-k} + \sum_{j=1}^{\infty} p_j j^{p+\delta} \right) = O \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{p+\delta} p_j \right) < \infty, \end{aligned}$$

а во втором, учитывая, что $k > p$, имеем

$$I_2 = O \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 1 - \alpha k} \right) < \infty.$$

Осталось доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p\alpha-1} \mathbf{P}\{|X_1| \geq n^\alpha\} < \infty.$$

Но эта сумма не превосходит

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p\alpha-1} \sum_{j \geq n^\alpha} p_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} p_j \sum_{n \leq j^{1/\alpha}} n^{p\alpha-1} = O \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^p p_j \right) < \infty$$

в силу (13), и теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4. Из доказательства видно, что вместо одинаковой распределенности величин X_n можно потребовать, например, чтобы для $p_j = \sup_n \mathbf{P}\{j - 1 \leq |X_n| \leq j\}$ выполнялось условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{p+\delta} p_j < \infty.$$

4. Скорость сходимости в УЗБЧ для полей. Теорема 3 может быть переформулирована для случайных полей на $\mathbf{Z}^d$, $d \geq 1$. Однако, при $d \geq 2$, неравенство Ньюмена–Райта (лемма 3) для таких полей перестает быть справедливым. В этом случае нужно пользоваться максимальным неравенством Булинского–Кина (см. [8]). Приведем этот результат. Пусть задано случайное поле $\{X_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$. Пусть $\mathcal{A}$ — множество параллелепипедов в $\mathbf{Z}^d$ вида $V = (x, y) = \{z \in \mathbf{Z}^d: x_i < z_i \leq y_i, i = 1, \dots, d\}$, где $x, y \in \mathbf{Z}^d$. Обозначим

$$S_V = \sum_{j \in V} X_j, \quad M_V = \max\{|S(Q)|: Q = (x, w] \subset V\}.$$

Лемма 4 ([4]). Пусть $\{X_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$, $d \geq 1$, — ассоциированное центрированное случайное поле, и выполнены условия

$$\begin{aligned} R_{2+\delta} &= \sup_j \mathbf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty \quad \text{для некоторого } \delta > 2, \\ u(r) &= O(r^{-\nu}) \quad \text{для некоторого } \nu > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда существует такое a_0 , что при всех $V \in \mathcal{A}$ и $a \geq a_0$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\left\{M_V \geq a\sqrt{|V|}\right\} \leq 2\mathbf{P}\left\{|S_V| \geq \frac{a\sqrt{|V|}}{2}\right\}.$$

Теперь сформулируем и докажем обобщение теоремы 3 для случайных полей.

Теорема 4. Пусть $\{X_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$ — поле ассоциированных одинаково распределенных случайных величин с

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2.$$

Пусть, кроме того, для некоторых $p \geq 2$, $\delta > 0$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ и k — целого четного, большего $(p\alpha - 1)/(\alpha - \frac{1}{2})$, выполнены условия

$$\mathbf{E}|X_1|^{p+\delta} < \infty, \quad (18)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} (u(r))^{\delta/(k-2+\delta)} r^{d(k-1)-1} < \infty. \quad (19)$$

Тогда для последовательности кубов $V_n = (0, n]^d \cap \mathbf{Z}^d$ справедливо следующее утверждение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |V_n|^{\alpha p - 2} \mathbf{P}\{M_{V_n} \geq \varepsilon |V_n|^{\alpha}\} < \infty.$$

З а м е ч а н и е 5. Вместо кубов можно взять регулярно растущие множества из $\mathcal{A}$. Например, $V_n \subset V_{n+1}$ и $a_1 n^d \leq |V_n| \leq a_2 n^d$ для некоторых $a_1, a_2 > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Как и в доказательстве теоремы 3, рассмотрим урезанные величины $X_j(v_n)$, $S_{V_n}(v_n)$, $M_{V_n}(v_n)$, где мы обозначили $v_n = |V_n|$. Аналогично одномерному случаю будем иметь

$$\mathbf{P}\{M_{V_n} \geq \varepsilon v_n^\alpha\} \leq \mathbf{P}\{M_{V_n}(v_n) \geq \varepsilon v_n^\alpha\} + v_n \mathbf{P}\{|X_1| \geq \varepsilon v_n^\alpha\}.$$

Поскольку, очевидно, условие (19) влечет выполнение условия (17) с некоторым $\nu > 0$, то, используя лемму 4, а также то, что $\varepsilon v_n^{\alpha-1/2}$ неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$, получим, что при всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{M_{V_n}(v_n) \geq \varepsilon v_n^\alpha\} \leq 2\mathbf{P}\left\{|S_{V_n}(v_n)| \geq \frac{\varepsilon v_n^\alpha}{2}\right\}.$$

Значит, по неравенству Чебышева,

$$\mathbf{P}\{M_{V_n}(v_n) \geq \varepsilon v_n^\alpha\} \leq 2^{k+1} \varepsilon^{-k} v_n^{-k\alpha} \|S_{V_n}(v_n)\|_k^k,$$

а по теореме 1

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{M_{V_n}(v_n) \geq \varepsilon v_n^\alpha\} \\ \leq 2^{k+1} \varepsilon^{-k} v_n^{-k\alpha} 2C \max\left(v_n \|X_1(v_n)\|_{k+\delta}^k, v_n^{k/2} \|X_1(v_n)\|_{2+\delta}^k\right), \end{aligned}$$

где C — не зависит от n (n столь велико, что $\sigma^{-2} \mathbf{E} X_1(v_n)^2 \geq \frac{1}{2}$). Далее доказательство проводится так же, как и в одномерном случае. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{\alpha p - 2 - \alpha k + k/2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-d + d((\alpha p - 1) - (\alpha - \frac{1}{2})k)} < \infty$$

по выбору k .

Вводя снова обозначение $p_j = \mathbf{P}\{j-1 \leq |X_1| < j\}$, $j \in \mathbb{N}$, получим, что либо при всех достаточно больших n выполняется $\|X_1(v_n)\|_{k+\delta}^k \geq 1$, и тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{\alpha p - 1 - \alpha k} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor v_n^\alpha \rfloor} j^{k+\delta} p_j + v_n^{\alpha(k+\delta)} \sum_{j > v_n^\alpha} p_j \right) \\ = \sum_{j=1}^{\infty} j^{k+\delta} p_j \sum_{n^d \geq j^{1/\alpha}} n^{d\alpha p - d - d\alpha k} + \sum_{j=1}^{\infty} p_j \sum_{n^d \leq j^{1/\alpha}} n^{d\alpha(p+\delta) - d} \\ = O\left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{k+\delta} p_j j^{p-k-(d-1)/(\alpha d)} + \sum_{j=1}^{\infty} p_j j^{p+\delta-(d-1)/(\alpha d)} \right) < \infty, \end{aligned}$$

поскольку выполнено (18), либо $E|X_1|^{k+\delta} < \infty$, и в этом случае, учитывая, что $k > p$, имеем $\sum_{n=1}^{\infty} n^{d(\alpha p - 1 - \alpha k)} < \infty$. Значит, в условиях теоремы 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{\alpha p - 2} P\{M_{V_n}(v_n) \geq \varepsilon v_n^{\alpha}\} < \infty.$$

Осталось доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{p\alpha - 1} P\{|X_1| \geq v_n^{\alpha}\} < \infty$. Но эта сумма не превосходит

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{dp\alpha - d} \sum_{j \geq n^{d\alpha}} p_j &\leq \sum_{j=1}^{\infty} p_j \sum_{n \leq j^{1/(\alpha d)}} n^{dp\alpha - d} \\ &= O\left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{p-(d-1)/(\alpha d)} p_j\right) < \infty \end{aligned}$$

в силу (18), и теорема доказана.

5. Оценка запаса моментов слагаемых по скорости сходимости максимумов сумм. При некоторых условиях на коэффициент Кокса–Гриммета из соотношения типа (3), описывающего скорость сходимости в УЗБЧ, можно вывести существование момента определенного порядка у случайных величин, образующих исходную последовательность.

Теорема 5. Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ — последовательность ассоциированных одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих (12). Пусть, кроме того, для некоторых $p > 2$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, $0 < \delta < \min(p - 1/\alpha, 1/\alpha)$ и всех $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} P\{M_n \geq \varepsilon n^{\alpha}\} < \infty, \quad (20)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{(p-2-\delta)/\delta - 1} u(r) < \infty. \quad (21)$$

Тогда

$$E|X_1|^{p-\delta} < \infty.$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 5. Пусть X, Y — ассоциированные случайные величины с конечным вторым моментом, $\text{Cov}(X, Y) = \rho^2$. Тогда для любого $t > 0$ справедливо неравенство

$$P\{X \geq t, Y \geq t\} \leq P\left\{X \geq \frac{t}{2}\right\} P\left\{Y \geq \frac{t}{2}\right\} + \frac{4\rho^2}{t^2}.$$

Доказательство леммы 5. С помощью интегрирования по частям получим

$$\rho^2 = \int_{\mathbf{R}^2} H(x, y) dx dy,$$

где $H(x, y) = \mathbf{P}\{X \geq x, Y \geq y\} - \mathbf{P}\{X \geq x\} \mathbf{P}\{Y \geq y\}$. Поскольку $H(x, y) \geq 0$ (в силу ассоциированности X и Y), то, для $t > 0$, обозначив $K_t = \{(x, y) \mid t/2 \leq x \leq t, t/2 \leq y \leq t\}$, имеем

$$\rho^2 \geq \int_{K_t} H(x, y) dx dy.$$

На K_t выполнено неравенство $H(x, y) \geq \mathbf{P}\{X \geq t, Y \geq t\} - \mathbf{P}\{X \geq t/2\} \mathbf{P}\{Y \geq t/2\}$. Поэтому после интегрирования получим

$$\rho^2 \geq \frac{t^2}{4} \left(\mathbf{P}\{X \geq t, Y \geq t\} - \mathbf{P}\left\{X \geq \frac{t}{2}\right\} \mathbf{P}\left\{Y \geq \frac{t}{2}\right\} \right),$$

откуда следует утверждение леммы 5.

Доказательство теоремы 5. Из справедливости при любом $\varepsilon > 0$ соотношения (20) вытекает, что

$$W(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{p\alpha-2} \mathbf{P}\left\{\max_{j \leq n} |X_j| \geq \varepsilon n^\alpha\right\} < \infty \quad (22)$$

при любом $\varepsilon > 0$. Значит,

$$\begin{aligned} n^{p\alpha-1} \mathbf{P}\left\{\max_{j \leq n} |X_j| \geq \varepsilon n^\alpha\right\} &\leq O\left(\sum_{k=n}^{2n} k^{p\alpha-2} \mathbf{P}\left\{\max_{j \leq k} |X_j| \geq \varepsilon \left(\frac{k}{2}\right)^\alpha\right\}\right) \\ &= o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку $1/\alpha \leq 2$, то по неравенству Чебышева

$$\sup_n n \mathbf{P}\{|X_1| \geq \varepsilon n^\alpha\} \leq \frac{\mathbf{E}|X_1|^{1/\alpha}}{\varepsilon^{1/\alpha}} \leq R(\varepsilon). \quad (24)$$

Далее, возьмем целое $q < n$ и воспользуемся неравенством

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\max_{j \leq n} X_j \geq \varepsilon n^\alpha\right\} &\geq \sum_{j=1}^{[n/q]} \mathbf{P}\left\{\max_{i < j} X_{iq} < \varepsilon n^\alpha, X_{jq} \geq \varepsilon n^\alpha\right\} \\ &= \frac{n}{q} \mathbf{P}\{X_1 \geq \varepsilon n^\alpha\} - \sum_{j=1}^{[n/q]} \mathbf{P}\left\{\max_{i < j} X_{iq} \geq \varepsilon n^\alpha, X_{jq} \geq \varepsilon n^\alpha\right\}. \end{aligned}$$

Величины $\max_{i < j} X_{iq}$ и X_{jq} — ассоциированы, оценим их ковариацию. Поскольку функция $x_1 + \dots + x_{j-1} - \max_{i \leq j-1} x_i$ не убывает по каждой переменной, то

$$\text{Cov}(X_{jq}, X_q + X_{2q} + \dots + X_{(j-1)q} - \max_{i < j} X_{iq}) \geq 0,$$

откуда следует, что $\text{Cov}(X_{jq}, \max_{i < j} X_{iq}) \leq u(q)$. Далее, воспользовавшись леммой 5, получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\max_{j \leq n} X_j \geq \varepsilon n^\alpha\right\} \geq \frac{n}{q} \mathbf{P}\{X_1 \geq \varepsilon n^\alpha\} \\ & - \sum_{j=1}^{[n/q]} \mathbf{P}\left\{\max_{i < j} X_{iq} \geq \frac{n^\alpha \varepsilon}{2}\right\} \mathbf{P}\left\{X_{jq} \geq \frac{n^\alpha \varepsilon}{2}\right\} \\ & - \frac{4n^{1-2\alpha} u(q)}{\varepsilon^2 q} \geq \frac{n}{q} \mathbf{P}\{X_1 \geq \varepsilon n^\alpha\} \\ & - \frac{n}{q} \mathbf{P}\left\{\max_{j \leq n} X_j \geq \frac{n^\alpha \varepsilon}{2}\right\} \mathbf{P}\left\{X_1 \geq \frac{n^\alpha \varepsilon}{2}\right\} - \frac{4n^{1-2\alpha} u(q)}{\varepsilon^2 q}. \quad (25) \end{aligned}$$

Из (25) с учетом (24) получаем

$$\begin{aligned} \frac{n}{q} \mathbf{P}\{X_1 \geq \varepsilon n^\alpha\} & \leq \mathbf{P}\left\{\max_{j \leq n} X_j \geq \varepsilon n^\alpha\right\} + \frac{R(\varepsilon/2)}{q} \mathbf{P}\left\{\max_{i \leq n} X_j \geq \frac{n^\alpha \varepsilon}{2}\right\} \\ & + \frac{4n^{1-2\alpha} u(q)}{\varepsilon^2 q}. \end{aligned}$$

Домножая обе части последнего неравенства на $n^{p\alpha-2}$, полагая $q = [n^{\delta\alpha}]$ и суммируя по n , получаем с учетом (22), что

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{(p-\delta)\alpha-1} \mathbf{P}\{X_1 \geq \varepsilon n^\alpha\} \\ & \leq B_3 \left(W(\varepsilon) + W\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) R\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + 4\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha(p-2-\delta)-1} u([n^{\delta\alpha}]) \right), \quad (26) \end{aligned}$$

где $B_3 = B_3(p, \alpha, \delta) > 0$. Заметим, что сходимость ряда (21) равносильна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha(p-2-\delta)-1} u([n^{\delta\alpha}])$. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha(p-2-\delta)-1} u([n^{\delta\alpha}]) & = \sum_{r=1}^{\infty} u(r) \sum_{r \leq n^{\delta\alpha} < r+1} n^{\alpha(p-2-\delta)-1} \\ & \sim \sum_{r=1}^{\infty} u(r) r^{(p-2-\delta)/\delta-1/(\alpha\delta)} r^{1/(\alpha\delta)-1} = \sum_{r=1}^{\infty} u(r) r^{(p-2-\delta)/\delta-1}. \end{aligned}$$

Значит, левая часть неравенства (26) конечна, а это влечет существование момента $E(X_1^+)^{p-\delta} < \infty$.

Рассматривая вместо последовательности X_j последовательность $-X_j$ (которая также является ассоциированной и удовлетворяет условиям теоремы 5), видим, что $E((-X_1)^+)^{p-\delta} < \infty$, а следовательно, и $E|X_1|^{p-\delta} < \infty$. Теорема доказана.

Автор искренне благодарен проф. А. В. Булинскому за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения, а также рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баттин Ю. Ю., Булинский А. В. Моментные неравенства для сумм зависимых мультииндексированных случайных величин. — Фунд. и прикл. матем., 1997, т. 3, № 4, с. 1101–1108.
2. Булинский А. В. Неравенства для моментов сумм ассоциированных мультииндексированных случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 417–425.
3. Булинский А. В. Предельные теоремы в условиях слабой зависимости. М.: Изд-во МГУ, 1989, 135 с.
4. Булинский А. В. Функциональный закон повторного логарифма для ассоциированных случайных полей. — Фунд. и прикл. матем., 1995, т. 1, № 3, с. 623–639.
5. Baum L. E., Katz M. Convergence rates in the law of large numbers. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, v. 120, № 1, p. 108–123.
6. Birkel T. Moment bounds for associated sequences. — Ann. Probab., 1988, v. 16, № 3, p. 1184–1193.
7. Bulinski A. V. On the convergence rates in the CLT for positively and negatively dependent random fields. — In: Probability Theory and Mathematical Statistics (Lectures presented at the Kolmogorov Semester, March 1993, St. Petersburg). Ed. by I. A. Ibragimov et al. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996, p. 3–14.
8. Bulinski A. V., Keane M. S. Invariance principle for associated random fields. — J. Math., 1996, v. 85, № 5, p. 2905–2911.
9. Cox J. T., Grimmett G. Central limit theorem for associated random variables and the percolation model. — Ann. Probab., 1984, v. 12, № 2, p. 514–528.
10. Doukhan P. Mixing. Properties and Examples. New York: Springer-Verlag, 1994.
11. Doukhan P., Louhichi S. Weak Dependence and Moment Inequalities. Preprint. Université de Paris-Sud, 1997.
12. Hipp C. Convergence rates of the strong law for stationary mixing sequences. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, B. 49, H. 1, S. 49–62.
13. Lai T. L. Convergence rates and r -quick versions of the strong law for stationary mixing sequences. — Ann. Probab., 1977, v. 5, № 3, p. 693–706.
14. Newman C. M., Wright A. L. Associated random variables and martingale inequalities. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1982, B. 59, H. 4, S. 361–371.
15. Peligrad M. The rate of convergence in the strong law for the stationary mixing sequences. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1985, B. 76, H. 3, S. 307–314.
16. Rio E. A maximal inequality and dependent Marcinkiewicz–Zygmund strong laws. — Ann. Probab., 1995, v. 23, № 2, p. 918–937.

Поступила в редакцию
21.IV.1997