Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Нагаев, Крамеровские большие отклонения в случае, когда крайнее сопряженное распределение имеет тяжелый хвост, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 3, 456–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 05:13:53

© 1998 г.

НАГАЕВ А. В.*

**КРАМЕРОВСКИЕ БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ В СЛУЧАЕ,
КОГДА КРАЙНЕЕ СОПРЯЖЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
ИМЕЕТ ТЯЖЕЛЫЙ ХВОСТ¹⁾**

Рассматривается классическая проблема больших отклонений в предположении, что одностороннее условие Крамера выполнено в замкнутом промежутке. Предполагается, что крайнее сопряженное распределение принадлежит области притяжения устойчивого закона. Устанавливается граница, до которой асимптотическое представление Крамера-Петрова сохраняет силу.

Ключевые слова и фразы: сопряженное распределение, медленно изменяющаяся функция, монотонная ε -аппроксимация.

1. Введение и основные результаты

В настоящее время теория больших отклонений получила достаточное развитие и находит применение во многих разделах теории вероятностей. Ее классическая часть имела дело с вероятностями больших отклонений сумм независимых случайных величин. В последующем она охватила гораздо более общие схемы. В наши планы, однако, не входит обзор этой теории. Желающие получить о ней более полное представление могут обратиться к работам [1]–[6].

Целью данной статьи является решение одной задачи, связанной с классическим результатом Крамера [7]. Приводимые ниже результаты были анонсированы в [8].

Пусть случайные величины $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют общее распределение $F(x)$. Положим

$$\zeta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

и

$$F_n(x) = P\{\zeta_n < x\}, \quad P_n(x) = P\{\zeta_n \geq x\}.$$

Предположим, что выполнено одностороннее условие Крамера, т.е.

$$0 = \inf(s: Ee^{s\xi} < \infty) < \sup(s: Ee^{s\xi} < \infty) = \lambda < \infty. \quad (1)$$

*Университет Н. Коперника, Торунь, Польша.

¹⁾При поддержке KBN, грант PB 591/P03/95/08.

Условие (1) означает, что $P_1(x)$, правый хвост исходного распределения $F(x)$, показательнo быстро убывает при $x \rightarrow \infty$. Через $f(s)$ обозначим производящую функцию ξ . Согласно (1) $f(s) < \infty$, по меньшей мере, для $s \in (0, \lambda)$. Положим

$$M(s) = \frac{f'(s)}{f(s)}, \quad M = \lim_{s \rightarrow \lambda} M(s). \quad (2)$$

Поскольку

$$M'(s) = (f(s))^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(s))^2 e^{sx} dF(x) > 0,$$

уравнение $x = M(s)$ имеет единственный корень при $M(0) < x < M$. Следует заметить, что $M(0)$ или конечно или равно $-\infty$.

Определим функцию уклонений

$$\rho(x) = \inf_{0 \leq s < \lambda} f(s) e^{-sx}.$$

Легко видеть, что при $M(0) < x < M$

$$\rho(x) = f(s(x)) \exp(-xs(x)). \quad (3)$$

Далее положим

$$M_\delta = \begin{cases} M - \delta, & \text{если } M < \infty, \\ \delta^{-1}, & \text{если } M = \infty, \end{cases} \quad (4)$$

и

$$m_\delta = \begin{cases} M(0) + \delta, & \text{если } M(0) \text{ конечно,} \\ -\delta^{-1}, & \text{если } M(0) = -\infty. \end{cases} \quad (5)$$

С этого момента δ будет обозначать произвольно малое фиксированное число, так что в (4) и (5) значения δ могут быть разными.

Следующая теорема хорошо известна (см. [9], ср. с [19]).

Теорема 1. Пусть выполнено условие (1). Тогда

1°. Если $F(x)$ нерешетчато, то при $n \rightarrow \infty$

$$P_n(x) = A(xn^{-1}) n^{-1/2} \rho^n(xn^{-1}) (1 + o(1)) \quad (6)$$

равномерно по x , $m_\delta \leq xn^{-1} \leq M_\delta$;

2°. Если ξ_1 принимает значения $a + kh$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где h является максимальным шагом распределения, то

$$P_n(x) = B(xn^{-1}) n^{-1/2} \rho^n(xn^{-1}) (1 + o(1)) \quad (7)$$

равномерно по x , $x = na + kh$, $m_\delta \leq xn^{-1} \leq M_\delta$. Здесь

$$A(x) = \left(2\pi s^2(x) M'(s(x)) \right)^{-1/2},$$

$$B(x) = \left(2\pi M'(s(x)) \right)^{-1/2} \frac{h}{1 - e^{-s(x)h}},$$

а $s(x)$ корень уравнения $M(s) = x$ или, иначе, $s(x) = M^{-1}(x)$.

В связи с теоремой возникает ряд вопросов. В частности,

1) Насколько можно расширить область уклонений, сохраняя справедливость асимптотических соотношений (6) и (7)?

2) Какая асимптотика возникает, когда $xn^{-1} < m_\delta$ или $xn^{-1} > M_\delta$, а соотношения (6) и (7) не выполняются?

3) Какая асимптотика ожидается при $\lambda = \infty$?

Случай $xn^{-1} < m_\delta$ изучался в [10] и [11]. В данной работе нас интересует случай $xn^{-1} > M_\delta$.

Легко предвидеть, что ширина области больших уклонений, допускающей крамеровскую асимптотику, зависит от регулярности изменения $P_1(x)$. Некоторые условия регулярности, гарантирующие указанную асимптотику для всех $x \geq nm_\delta$, были предложены в [12]. Они относятся к случаю $\lambda = \infty$. Любопытные явления, возникающие, когда ξ целочисленна, описаны в [13].

Если же $\lambda < \infty$, то нам приходится различать случаи $f(\lambda) < \infty$ и $f(\lambda) = \infty$. В этой работе мы сосредоточимся на первом из этих случаев. Второму случаю будет посвящена отдельная работа.

Если $f(\lambda) < \infty$, то существует крайнее правое сопряженное распределение

$$H(x) = \frac{1}{f(\lambda)} \int_{-\infty}^x e^{\lambda u} dF(u). \quad (8)$$

Из (1) следует, что левый хвост $H(x)$ убывает экспоненциально быстро. Очевидно, (см. (2) и следующее за ним соотношение) $M = M(\lambda)$ и $M'(\lambda)$ являются соответственно математическим ожиданием и дисперсией распределения $H(x)$. Если $M'(\lambda) < \infty$, то легко показать, что асимптотики (6) и (7) могут быть продолжены до области $xn^{-1} \in (m_\delta, M + X\sqrt{M'(\lambda)})$ для любого фиксированного $X > 0$. Так что остается рассмотреть случай, когда $H(x)$ имеет тяжелый правый хвост.

В дальнейшем мы предполагаем, что для $x \geq 0$

$$1 - H(x) = x^{-\alpha} m(x), \quad (9)$$

где $0 < \alpha \leq 2$, а $m(x)$ медленно изменяется при $x \rightarrow \infty$. Более того, мы предполагаем, что $M'(\lambda) = \infty$, т.е. при $\alpha = 2$

$$\int_1^\infty u^{-1} m(u) du = \infty.$$

Пусть

$$b_n = \begin{cases} \inf \left(x: n(1 - H(x)) \leq 1 \right), & \text{если } 0 < \alpha < 2, \\ \inf \left(x: nx^{-2} \int_{-x}^x u^2 dH(u) \leq 1 \right), & \text{если } \alpha = 2, \end{cases} \quad (10)$$

и

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ n \int_{-b_n}^{b_n} u dH(u), & \text{если } \alpha = 1, \\ nM, & \text{если } 1 < \alpha \leq 2. \end{cases} \quad (11)$$

Обозначим через $H_n(x)$ n -ю свертку (8). Хорошо известно, что (см., например, гл. II в [14]), при выполнении (9) и $n \rightarrow \infty$

$$\sup_x \left| H_n(xb_n + a_n) - \int_{-\infty}^x g_\alpha(u) du \right| = o(1),$$

где $g_\alpha(x)$ — плотность спектрально положительного устойчивого закона с характеристическим показателем α .

Далее, положим

$$x_n = \begin{cases} \epsilon_n b_n, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ a_n - z_n b_n, & \text{если } 1 \leq \alpha \leq 2, \end{cases} \quad (12)$$

где $\epsilon_n \rightarrow 0$, $\epsilon_n b_n/n \rightarrow \infty$, а $z_n \rightarrow \infty$, $z_n = o(a_n/b_n)$. Заметим, что $x_n > nM_\delta$ изменяется в области больших уклонений для $H_n(x)$.

Без потери общности в дальнейшем мы предположим, что случайная величина ξ либо нерешетчата, либо целочисленна.

Теорема 2. Если выполнено (9), то утверждение теоремы 1 сохраняет силу для $nt_\delta \leq x \leq x_n$. Если же $x - a_n \asymp b_n$, то

$$P_n(x) = \Delta(\lambda) b_n^{-1} g_\alpha(b_n^{-1}(x - a_n)) f^n(\lambda) e^{-\lambda x} (1 + o(1)),$$

где

$$\Delta(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \text{если } \xi \text{ нерешетчата,} \\ (1 - e^{-\lambda})^{-1}, & \text{если } \xi \text{ целочисленна.} \end{cases}$$

Таким образом, x_n является границей, до которой может быть продолжена асимптотика (6). Случай, когда $b_n^{-1}(x - a_n) \rightarrow \infty$, заслуживает специального исследования.

2. Предварительные замечания

Пусть для любого $s \in (0, \lambda]$ случайные величины $\xi(s)$, $\xi_1(s)$, $\xi_2(s)$, ... независимы и имеют общее распределение

$$F_s(x) = \frac{1}{f(s)} \int_{-\infty}^x e^{su} dF(u), \quad (13)$$

называемое сопряженным по отношению к $F(u)$. Очевидно, что

$$E\xi(s) = M(s), \quad D\xi(s) = M'(s).$$

Напомним, что в рассматриваемом случае существует крайнее правое сопряженное распределение $F_\lambda(x) = H(x)$ (см. (8)). При этом для любого фиксированного $s \in (0, \lambda)$ распределение $F_s(x)$ принадлежит области нормального притяжения нормального закона, тогда как $H(x)$ лежит в области притяжения устойчивого закона с бесконечной дисперсией.

Положим

$$\zeta_n(s) = \xi_1(s) + \dots + \xi_n(s)$$

и рассмотрим меры

$$Q_{ns}(A) = \sqrt{2\pi n M'(s)} P\{\zeta_n(s) - nM(s) \in A\}.$$

Если ξ нерешетчата, то из [15] следует, что Q_{ns} слабо сходится к мере Лебега равномерно по $s \in [s_1, s_2] \subset (0, \lambda)$, т.е. для любой функции $g(x)$, имеющей компактный носитель,

$$\int g(x) Q_{ns}(dx) \longrightarrow \int g(x) dx$$

равномерно по s .

Легко видеть, что равномерная сходимостъ сохранится, если предположить, что $g(x)$ принадлежит некоторому классу равномерно непрерывных функций.

Поэтому теорема 1 немедленно следует из хорошо известного представления

$$P\{\zeta_n > x\} = \frac{\rho^n(xn^{-1})}{\sqrt{2\pi n M'(s(xn^{-1}))}} \int_0^\infty e^{-su} Q_{ns}(du).$$

Если $M'(\lambda) < \infty$, то Q_{ns} сходится равномерно по $s \in [s_1, \lambda]$. Если же $M'(\lambda) = \infty$, то приходится искать такую пороговую последовательность $s_n \rightarrow \lambda$, что указанная сходимостъ выполняется равномерно по $s \in [s_1, s_n]$. Ниже будет показано, что s_n находится из уравнения $n^{-1}x_n = M(s)$, где x_n определено соотношениями (12).

Легко предвидеть, что все сведется к предельной задаче для схемы серий. В зависимости от величины α в формуле (9) приходится рассматривать пять случаев. Если случаи $0 < \alpha < 1$ и $0 < \alpha < 2$ довольно просты, то пограничные случаи

$$\alpha = 1, \quad \int x dH(x) = \infty \text{ или } \int x dH(x) < \infty$$

и $\alpha = 2$ требуют некоторых усилий.

Стоит заметить, что (9) выполняется, в частности, если для $x > x_0 > 0$

$$P_1(x) = e^{-\lambda x} x^{-\alpha-1} l(x), \quad (14)$$

где $l(x)$ медленно изменяется. Интегрируя по частям и используя теорему VIII.9.1 из [16], получаем, что

$$1 - H(x) \sim \frac{\lambda}{\alpha f(\lambda)} x^{-\alpha} l(x),$$

т.е.

$$m(x) \sim \frac{\lambda}{\alpha f(\lambda)} l(x).$$

Однако целочисленная случайная величина ξ не может удовлетворять соотношению (14) для всех $x \geq x_0$. Если же предположить, что (14) выполнено только для целых x , то

$$P\{\xi = k\} \sim (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda k} k^{-\alpha-1} l(k), \quad (15)$$

т.е. интегральная и локальная формы условия совпадают. При этом ни (14), ни (15) не влекут за собой (9) без дополнительных ограничений на $m(x)$.

Ниже приведено доказательство только для нерешетчатой случайной величины ξ . Изменения, необходимые в случае целочисленной ξ , очевидны.

3. Замечания по поводу медленно изменяющихся функций

Условимся обозначать буквой c любую положительную постоянную, т.е. величину, независимую от n и x . Буквой θ мы обозначим любую величину, принимающую значения из отрезка $[-1, 1]$, и пусть $\omega(t)$ означает любую функцию такую, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0$. При таком соглашении, например, $c + c = c$, $c^2 = c$, $\omega(t) + \omega(t) = \omega(t)$ и т.д.

Пусть $m(x) > 0$ и медленно изменяется при $x \rightarrow \infty$. Предположим, что

$$\hat{m}(x) = \int_0^x u^{-1} m(u) du$$

конечна для всех $x > 0$. Хорошо известно (см., например, теорему VIII.9.1 в [16]), что если

$$\int_0^\infty u^{-1} m(u) du = \infty,$$

то $\hat{m}(x)$ медленно изменяется и

$$m(x) = o(\hat{m}(x)). \quad (16)$$

Если же

$$\int_0^{\infty} u^{-1} m(u) du < \infty,$$

то

$$\tilde{m}(x) = \int_x^{\infty} u^{-1} m(u) du$$

медленно изменяется и

$$m(x) = o(\tilde{m}(x)). \quad (17)$$

С помощью хорошо известного представления Караматы (см., например, следствие VIII.9 в [16]) можно утверждать, что существует такое $X > 0$, что для $\min(x, y) > X$ и любого $\delta > 0$

$$\frac{1}{2} \min \left(\left(\frac{x}{y} \right)^{\delta}, \left(\frac{y}{x} \right)^{\delta} \right) \leq \frac{m(x)}{m(y)} \leq 2 \max \left(\left(\frac{x}{y} \right)^{\delta}, \left(\frac{y}{x} \right)^{\delta} \right). \quad (18)$$

Следующее свойство удобно сформулировать в виде леммы.

Лемма 1. Пусть $m(x)$ медленно изменяется при $x \rightarrow \infty$, а $g(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. для любого $\epsilon > 0$

$$\int_{\epsilon}^{1/\epsilon} |g(u)| du < \infty;$$

2°. существует $\delta > 0$ такое, что для некоторого β

$$\int_0^{\epsilon} |u|^{\beta-\delta} |g(u)| du < \infty \quad \text{и} \quad \int_{1/\epsilon}^{\infty} |u|^{\beta+\delta} |g(u)| du < \infty;$$

3°. для $\tau \rightarrow 0$

$$\int_0^{\tau} u^{\beta} |g(u)| du = o(m(\tau^{-1})).$$

Тогда при $\tau \rightarrow 0$

$$I(\tau) = \int_0^{\infty} u^{\beta} m(u) g(u\tau) du \sim \tau^{-(\beta+1)} m(\tau^{-1}) \int_0^{\infty} u^{\beta} g(u) du.$$

Мы опускаем доказательство этой леммы, которое мало отличается от доказательства приведенных свойств функций с медленным изменением.

4. Свойства производящей функции

Положим

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau u} dH(u).$$

Ясно, что

$$h(\tau) = \frac{f(\lambda - \tau)}{f(\lambda)},$$

и что $h(\tau)$ аналитична в полосе $0 < \operatorname{Re} \tau < \lambda$.

Обозначим через $l(x)$ любую функцию с медленным изменением такую, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(x)}{m(x)} = c > 0.$$

Следует подчеркнуть, что конкретное значение c не играет роли.

Лемма 2. В зависимости от α , функция $1 - h(\tau)$ допускает одно из следующих представлений:

$$1 - h(\tau) = \begin{cases} \tau^\alpha l(\tau^{-1}), & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ \tau(\widehat{m}(\tau^{-1}) - l(\tau^{-1})), & \text{если } \alpha = 1, h'(0) = -\infty, \\ -h'(0)\tau - \tau(\widetilde{m}(\tau^{-1}) + l(\tau^{-1})), & \text{если } \alpha = 1, h'(0) > -\infty, \\ -h'(0)\tau - \tau^\alpha l(\tau^{-1}), & \text{если } 1 < \alpha < 2, \\ -h'(0)\tau - \tau^2(\widehat{m}(\tau^{-1}) + l(\tau^{-1})), & \text{если } \alpha = 2. \end{cases}$$

Здесь, как и в (16) и (17),

$$\widehat{m}(x) = \int_0^x u^{-1} m(u) du, \quad \widetilde{m}(x) = \int_x^\infty u^{-1} m(u) du.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$h(\tau) = \tau \int_{-\infty}^\infty e^{-\tau u} H(u) du = 1 - \tau \int_0^\infty e^{-\tau u} (1 - H(u)) du + O(\tau). \quad (19)$$

Напомним, что $H(-u) = O(e^{-\lambda u})$ при $u \rightarrow \infty$.

Подобным образом, если $h'(0) > -\infty$, то

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \int_0^\infty e^{-\tau u} dH(u) + \int_{-\infty}^0 e^{-\tau u} dH(u) \\ &= 1 - \tau \int_0^\infty e^{-\tau u} (1 - H(u)) du + \tau \int_{-\infty}^0 e^{-\tau u} H(u) du; \end{aligned}$$

откуда

$$h(\tau) = 1 + h'(0)\tau - \tau \int_0^\infty (e^{-\tau u} - 1)(1 - H(u)) du + O(\tau^2). \quad (20)$$

Если $0 < \alpha < 1$, то достаточно применить к (19) лемму 1 с $g(u) = e^{-u}$ и $\beta = -\alpha$. Если $1 < \alpha < 2$, то следует применить лемму к (20), положив $g(u) = e^{-u} - 1$ и $\beta = -\alpha$.

Если же $\alpha = 1$ или $\alpha = 2$, то необходимы несколько более сложные рассуждения.

Предположим, что $\alpha = 1$, $h'(0) = -\infty$. Из (19) легко получаем, что

$$h(\tau) = 1 - \tau \int_0^\infty (e^{-\tau u} - \Delta(\tau u)) u^{-1} m(u) du - \tau \hat{m}(\tau^{-1}) + O(\tau),$$

где

$$\Delta(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < u \leq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Остается положить в лемме 1 $g(u) = e^{-u} - \Delta(u)$, $\beta = -1$.

Если $\alpha = 1$, но $h'(0) > -\infty$, то из (20) имеем

$$h(\tau) = 1 + h'(0)\tau - \tau \int_0^\infty (e^{-\tau u} - \Delta(\tau u)) u^{-1} m(u) du + \tau \tilde{m}(\tau^{-1}) + O(\tau^2).$$

Пусть $\alpha = 2$. Из (20) получаем, что

$$h(\tau) = 1 + h'(0)\tau - \tau \int_0^\infty (e^{-\tau u} - 1 + \tau u \Delta(\tau u)) u^{-2} m(u) du + \tau^2 \hat{m}(\tau^{-1}) + O(\tau^2).$$

Остается положить в лемме 1

$$g(u) = u^{-2}(e^{-u} - 1 + \Delta(u)), \quad \beta = 0.$$

Лемма доказана.

Заметим, что в каждом из рассмотренных случаев мы могли бы указать вид константы c , которая связывает $l(u)$ и $m(u)$, используя для этого формулы 8.212.1, 8.211.1, 3.351.5 и 3.434.1 из [17].

Лемма 3. В зависимости от α , функция $-h'(\tau)$ допускает одно из следующих представлений:

$$-h'(\tau) = \begin{cases} \tau^{\alpha-1} l(\tau^{-1}), & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ \hat{m}(\tau^{-1}) - l(\tau^{-1}), & \text{если } \alpha = 1, h'(0) = -\infty, \\ -h'(0) - \tilde{m}(\tau^{-1}) - l(\tau^{-1}), & \text{если } \alpha = 1, h'(0) > -\infty, \\ -h'(0) - \tau^{\alpha-1} l(\tau^{-1}), & \text{если } 1 < \alpha < 2, \\ -h'(0) - 2\tau \hat{m}(\tau^{-1}) - \tau l(\tau^{-1}), & \text{если } \alpha = 2. \end{cases}$$

Здесь $\hat{m}(x)$ и $\tilde{m}(x)$ имеют тот же смысл, что и в лемме 2.

Доказательство. В этом случае, вместо (19) и (20) следует начинать с соотношений

$$-h'(\tau) = \int_0^\infty u e^{-\tau u} dH(u) + O(1) = \int_0^\infty e^{-\tau u} (1 - \tau u) (1 - H(u)) du + O(1)$$

и

$$\begin{aligned} -h'(\tau) &= -h'(0) + \int_0^\infty u(e^{-\tau u} - 1) dH(u) + O(\tau) \\ &= h'(0) + \int_0^\infty (e^{-\tau u}(1 - \tau u) - 1)(1 - H(u)) du + O(\tau) \end{aligned}$$

в зависимости от того, существует $h'(0)$ или нет. Остальное очевидно. Лемма доказана.

Лемма 4. Вторая производная функции $h(\tau)$ допускает представления

$$h''(\tau) = \begin{cases} \tau^{\alpha-2} l(\tau^{-1}), & \text{если } 0 < \alpha < 2, \\ 2\hat{m}(\tau^{-1}) - l(\tau^{-1}), & \text{если } \alpha = 2. \end{cases}$$

Доказательство нужно начинать с формулы

$$h''(\tau) = 2 \int_0^\infty u^{1-\alpha} m(u) e^{-\tau u} du - \tau \int_0^\infty u^{2-\alpha} m(u) e^{-\tau u} du + O(1).$$

Остальное очевидно.

Лемма 5. Для любого $k \geq 3$

$$(-1)^k h^{(k)}(\tau) = \tau^{\alpha-k} l(\tau^{-1}).$$

Доказательство следует начать с формулы

$$(-1)^k h^{(k)}(\tau) = k \int_0^\infty u^{k-\alpha-1} m(u) e^{-\tau u} du - \tau \int_0^\infty u^{k-\alpha} m(u) e^{-\tau u} du + O(1).$$

Теперь утверждение будет вытекать из леммы 1.

Нам понадобятся свойства $h(\tau - it)/h(\tau)$ при малых $|t|$. Рассмотрим

$$\lambda(t, \tau) = t \int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-\tau u} \sin tu du + \tau \int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-\tau u} (\cos tu - 1) du,$$

где $t > 0$, $\tau > 0$, $0 < \alpha < 2$.

Если $0 < \alpha < 1$, то с помощью формул 3.944.5 и 3.944.6 из [17] и очевидных вычислений получаем

$$\lambda(t, \tau) = c(t^2 + \tau^2)^{\alpha/2} \left(\cos \left(\alpha \arctg \frac{t}{\tau} \right) - \cos^\alpha \left(\arctg \frac{t}{\tau} \right) \right).$$

Если $0 < \alpha < 1$, то $\cos \alpha u - (\cos u)^\alpha$ строго возрастает в интервале $(0, \pi/2)$. Следовательно, для $t \geq \tau \Delta$

$$\lambda(t, \tau) \geq c(\Delta) t^\alpha, \quad (21)$$

где

$$c(\Delta) = c(\cos(\alpha \arctg \Delta) - \cos^\alpha(\arctg \Delta)).$$

Если $1 < \alpha < 2$, то формулы 3.944.5 и 3.945.2 [17] приводят к соотношению

$$\lambda(t, \tau) = c(t^2 + \tau^2)^{\alpha/2} \left(\cos^\alpha \left(\operatorname{arctg} \frac{t}{\tau} \right) - \cos \left(\alpha \operatorname{arctg} \frac{t}{\tau} \right) \right).$$

Здесь $(\cos u)^\alpha - \cos \alpha u$ строго возрастает в интервале $(0, \pi/2)$. Следовательно, для $t \geq \tau \Delta$ справедливо (21) с

$$c(\Delta) = c(\cos^\alpha(\operatorname{arctg} \Delta) - \cos(\alpha \operatorname{arctg} \Delta)).$$

Если же $\alpha = 1$, то из формул 3.941 и 3.943 [17] следует, что

$$\lambda(t, \tau) = t \left(\operatorname{arctg} \frac{t}{\tau} - \frac{\tau}{2t} \ln \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2} \right) \right).$$

Легко видеть, что соотношение (21) сохраняет силу при

$$c(\Delta) = \operatorname{arctg} \Delta - \frac{1}{2\Delta} \ln(1 + \Delta^2).$$

Лемма 6. Для любого $\Delta > 0$ существует такое значение $\eta = \eta(\Delta)$, что при $\Delta\tau \leq |t| \leq \eta$

$$h(\tau) - \operatorname{Re} h(\tau - it) \geq \begin{cases} \frac{c(\Delta)}{2} |t|^\alpha m\left(\frac{1}{|t|}\right), & \text{если } 0 < \alpha < 2, \\ \frac{1}{4} e^{-\Delta^{-1}} t^2 \hat{m}\left(\frac{1}{|t|}\right), & \text{если } \alpha = 2. \end{cases}$$

Здесь $c(\Delta)$ то же, что и в (21).

Доказательство. 1°. Пусть $0 < \alpha < 2$. Интегрируя по частям, получим, что

$$\begin{aligned} h(\tau) - \operatorname{Re} h(\tau - it) &= \int_0^\infty e^{-\tau u} (1 - \cos(tu)) dH(u) + O(t^2) \\ &= |t| \int_0^\infty (1 - H(u)) e^{-\tau u} \left(\sin |t| u + \frac{\tau}{|t|} (\cos tu - 1) \right) du + O(t^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Для удобства будем писать t вместо $|t|$. Положим

$$J = \int_0^\infty (1 - H(u)) e^{-\tau u} v(tu, z) du, \quad (23)$$

где

$$v(u, z) = \sin u + z(\cos u - 1), \quad z = \frac{\tau}{t}.$$

Представим J следующим образом:

$$J = \int_0^X + \int_X^{\epsilon/t} + \int_{\epsilon/t}^{1/(\epsilon t)} + \int_{1/(\epsilon t)}^\infty = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \quad (24)$$

Напомним, что для $\min(x, y) > X$ выполняется (18). Без потери общности можно выбрать $X > 1$. Очевидно, что

$$|J_1| \leq cX^3(t + zt^2) \leq ct. \quad (25)$$

Из (18), (23) и (24) следует, что

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq ct \int_X^{\epsilon/t} u^{-\alpha+1} m(u) du \leq ct^{\alpha-1} m(t^{-1}) \int_{Xt}^{\epsilon} u^{-\alpha+1} \frac{m(ut^{-1})}{m(t^{-1})} du \\ &\leq ct^{\alpha-1} m(t^{-1}) \int_0^{\epsilon} u^{-\alpha+1-\delta} du = \omega(\epsilon^{-1}) t^{\alpha-1} m(t^{-1}) \end{aligned} \quad (26)$$

при условии, что $0 < \delta < 2 - \alpha$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} J_3 &= t^{\alpha-1} m(t^{-1}) \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} u^{-\alpha} e^{-zu} v(u, z) du \\ &\quad + \theta c(\epsilon) t^{\alpha-1} m(t^{-1}) \sup_{\epsilon \leq u \leq 1/\epsilon} \left| \frac{m(ut^{-1})}{m(t^{-1})} - 1 \right|. \end{aligned} \quad (27)$$

Представим J_4 в виде

$$\begin{aligned} J_4 &= \int_{1/(\epsilon t)}^{\infty} (1 - H(u)) e^{-\tau u} (\sin tu + z \cos tu) du \\ &\quad - z \int_{1/(\epsilon t)}^{\infty} (1 - H(u)) e^{-\tau u} du = J_{41} + J_{42}. \end{aligned}$$

Так как функция $(1 - H(u)) e^{-\tau u}$ монотонна, то можно применить вторую теорему о среднем значении. С ее помощью получаем

$$\begin{aligned} J_{41} &= \theta \left(1 - H((\epsilon t)^{-1}) \right) \\ &\quad \times \left(\sup_{A > (\epsilon t)^{-1}} \left| \int_{(\epsilon t)^{-1}}^A \sin tu du \right| + z \left(\sup_{B > (\epsilon t)^{-1}} \left| \int_{(\epsilon t)^{-1}}^B \cos tu du \right| \right) \right) \\ &= \theta \omega(\epsilon^{-1}) t^{\alpha-1} m(t^{-1}). \end{aligned}$$

Подобным же образом

$$|J_{42}| \leq t^{-1} \left(1 - H((\epsilon t)^{-1}) \right) = \theta \omega(\epsilon^{-1}) t^{\alpha-1} m(t^{-1}). \quad (28)$$

Следовательно,

$$J_4 = \theta \omega(\epsilon^{-1}) t^{\alpha-1} m(t^{-1}).$$

Пусть δ_1 произвольно мало. Можно выбрать ϵ настолько малым, чтобы, в соответствии с (26) и (28), для любого фиксированного $\Delta > 0$ выполнялись соотношения:

$$\max(|J_2|, |J_4|) \leq \delta_1 t^{\alpha-1} m(t^{-1})$$

и

$$\max \left(\left| \int_0^\epsilon u^{-\alpha} e^{-zu} v(u, z) du \right|, \left| \int_{1/\epsilon}^\infty u^{-\alpha} e^{-zu} v(u, z) du \right| \right) \leq \delta_1.$$

Выберем η таким образом, чтобы для $t < \eta$ последняя оценка в (25) имела вид

$$|J_1| < \delta_1 t^{\alpha-1} m(t^{-1}),$$

а в (27) —

$$c(\epsilon) \sup_{\epsilon \leq u \leq 1/\epsilon} \left| \frac{m(ut^{-1})}{m(t^{-1})} - 1 \right| \leq \delta_1.$$

Объединяя эти оценки с (23) и (24), мы приходим к соотношению

$$J = t^{\alpha-1} m(t^{-1}) \int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-zu} v(u, z) du + 6\theta\delta_1 t^{\alpha-1} m(t^{-1}),$$

справедливому для $\Delta\tau \leq t \leq \eta$. Учитывая (22) и (23), получим

$$h(\tau) - \operatorname{Re} h(\tau - it) = m(t^{-1}) \lambda(t, \tau) + 6\delta_1 \theta t^\alpha m(t^{-1}) + O(t^2).$$

Остается вспомнить про неравенство (21) и принять во внимание произвольность δ_1 .

2°. Пусть $\alpha = 2$. Рассмотрим интегралы в (25) по-отдельности. Используя те же рассуждения что и в п. 1°, легко получаем

$$\int_0^\infty (1 - H(u)) e^{-\tau u} (1 - \cos tu) du \leq t m(t^{-1}). \quad (29)$$

Далее (ср. с п. 5° в доказательстве леммы 2)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1 - H(u)) e^{-\tau u} \sin tu du &= \int_0^\infty u^{-2} m(u) e^{-\tau u} (\sin tu - \Delta_1(tu)) du \\ &+ t \int_0^{1/t} u^{-1} m(u) e^{-\tau u} du = A_1 + t A_2. \end{aligned} \quad (30)$$

С помощью леммы 1 получаем

$$A_1 = c \theta t m(t^{-1}). \quad (31)$$

Для $\tau \leq \Delta t$ и всех достаточно малых t

$$A_2 \geq e^{-\Delta^{-1}} \hat{m}(t^{-1}). \quad (32)$$

Из (16) и (30)–(32) следует, что для любого Δ и всех достаточно малых t

$$\int_0^\infty (1 - H(u)) e^{-\tau u} \sin tu du \geq \frac{1}{2} e^{-\Delta^{-1}} \hat{m}(t^{-1}). \quad (33)$$

Остается объединить (22), (29) и (33). Лемма доказана.

5. Свойства корня основного уравнения

Основным мы называем уравнение $nM(s) = x$ или, иначе, $nM(\lambda - \tau) = x$. Если $x \leq x_n$, то $\tau \geq \tau_n$, где τ_n — корень уравнения

$$\frac{x_n}{n} = M(\lambda - \tau_n) = -\frac{h'(\tau_n)}{h(\tau_n)}. \quad (34)$$

Пусть a_n , b_n и x_n определены как в (10)–(12).

Лемма 7. Если τ_n является корнем уравнения (34), то

$$b_n \tau_n \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Доказательство. Как и в лемме 1 приходится различать пять случаев.

1°. Пусть $0 < \alpha < 1$. Из лемм 2, 3 и (34) получаем $x_n = c n \tau_n^{\alpha-1} l(\tau_n^{-1})$. Согласно (9) и (10) имеем $n b_n^{-\alpha} l(b_n) \geq c$. Принимая во внимание (12), находим, что $(b_n \tau_n)^{1-\alpha} l(b_n) / l(\tau_n^{-1}) \geq c / \epsilon_n$. Так как $b_n \rightarrow \infty$, $\tau_n \rightarrow 0$, то из (18) следует, что для любого $\delta > 0$

$$\max \left((b_n \tau_n)^{1-\delta-\alpha}, (b_n \tau_n)^{1+\delta-\alpha} \right) \geq c \epsilon_n^{-1}.$$

Таким образом, утверждение (35) доказано.

2°. Пусть $\alpha = 1$, $h'(0) = -\infty$. Заметим, что согласно (1)

$$a_n = n \int_0^{b_n} u dH(u) + n \int_{-\infty}^0 u dH(u) + o(1).$$

Интегрируя по частям, получим, что

$$a_n = n \hat{m}(b_n) - n m(b_n) - n c + o(1).$$

Комбинируя (12), (34) с леммами 2 и 3, получаем

$$n^{-1} x_n = \hat{m}(b_n) - m(b_n) - c - z_n n^{-1} b_n (1 + o(1)) = \hat{m}(\tau_n^{-1}) - l(\tau_n^{-1}). \quad (36)$$

Если $b_{n_k} \tau_{n_k} \rightarrow 0$, то для $n = n_k$, в соответствии с (18),

$$\begin{aligned} \hat{m}(\tau_n^{-1}) - \hat{m}(b_n) &= \int_{b_n \tau_n}^1 u^{-1} m(u \tau_n^{-1}) du \geq \frac{1}{2} m(\tau_n^{-1}) \int_{b_n \tau_n}^1 u^{\delta-1} du \\ &\geq \frac{1}{2\delta} m(\tau_n^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, $-c \geq \hat{m}(\tau_n^{-1}) - \hat{m}(b_n) - l(\tau_n^{-1}) \geq c m(\tau_n^{-1})$, т.е.,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \tau_n > 0.$$

Если $b_{n_k} \tau_{n_k} < c$, то $b_n \tau_n \asymp 1$ для $n = n_k$ и, следовательно, $l(\tau_n) \sim l(b_n)$. Далее,

$$\widehat{m}(b_n) - \widehat{m}(\tau_n^{-1}) = l(b_n) \int_{b_n \tau_n}^1 u^{-1} du = O(m(b_n)),$$

откуда, учитывая (36),

$$c + z_n n^{-1} b_n (1 + o(1)) = O(m(b_n)). \quad (37)$$

Из (10) следует, что $m(b_n) = o(z_n n^{-1} b_n)$ и, значит, (37) не выполняется. Таким образом, $b_n \tau_n \rightarrow \infty$.

3°. Пусть $\alpha = 1$, $h'(0) > -\infty$. В этом случае

$$a_n = nM - n \int_{b_n}^{\infty} u dH(u) + o(1).$$

Интегрируя по частям, получим, что

$$a_n = n(M - \widetilde{m}(b_n) - m(b_n)) + o(1).$$

Вместо (36) имеем

$$n^{-1} x_n = M - \widetilde{m}(b_n) - m(b_n) - z_n n^{-1} b_n (1 + o(1)) = M - \widetilde{m}(\tau_n^{-1}) - l(\tau_n^{-1}).$$

Остается повторить только что использованные рассуждения.

4°. Пусть $1 < \alpha < 2$. Принимая во внимание леммы 1 и 2, уравнение (34) можно переписать следующим образом:

$$n^{-1} x_n = M - c \tau_n^{\alpha-1} l(\tau_n^{-1}),$$

откуда

$$z_n b_n = n c \tau_n^{\alpha-1} l(\tau_n^{-1}).$$

Принимая во внимание (9) и (10),

$$(b_n \tau_n)^{\alpha-1} \frac{l(\tau_n^{-1})}{l(b_n)} \geq c z_n.$$

Остается, как и в случае $0 < \alpha < 1$, применить (18).

5°. Наконец, пусть $\alpha = 2$. Из (10), (34) и лемм 2, 3 следует, что

$$n^{-1} z_n = M - 2 \tau_n \widehat{m}(\tau_n^{-1}) (1 + o(1)) = M - z_n n^{-1} b_n. \quad (38)$$

Интегрируя по частям, получим, что

$$\int_{-x}^x u^2 dH(u) = \int_0^x u^2 dH(u) + O(1) = 2 \widehat{m}(x) (1 + o(1)).$$

Из (10) следует, что $nb_n^{-2}\widehat{m}(b_n) \geq c$. Учитывая (38),

$$z_n n^{-1} b_n \leq \tau_n \widehat{m}(\tau_n^{-1}),$$

откуда

$$(b_n \tau_n)^{\alpha-1} \frac{\widehat{m}(\tau_n^{-1})}{\widehat{m}(b_n)} \geq c z_n.$$

Остается, как и в случае $0 < \alpha < 1$, воспользоваться неравенствами (18). Лемма доказана.

6. Доказательство теоремы 2

Сначала мы докажем ряд соотношений, играющих важную роль в доказательстве теоремы.

С помощью лемм 4 и 7, а также соотношений (18) и (10), получаем

$$n\tau^2 h''(\tau) = cn\tau^2 l_1(\tau^{-1}) = cnb_n^{-\alpha} l_1(b_n) (b_n \tau)^\alpha \frac{l_1(\tau^{-1})}{l_1(b_n)} \geq c(b_n \tau)^{\alpha-\delta},$$

где

$$l_1(x) = \begin{cases} l(x), & \text{если } 0 < \alpha < 2, \\ \widehat{m}(x), & \text{если } \alpha = 2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$n \inf_{\tau_n \leq \tau \leq \delta} \tau^2 h''(\tau) \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Далее

$$nh''(\tau) = nc b_n^{-\alpha} l_1(b_n) (b_n \tau)^{\alpha-2} b_n^2 \frac{l_1(\tau^{-1})}{l_1(b_n)}.$$

Если $0 < \alpha < 2$, то, как и прежде, для $\tau \geq \tau_n$ получаем, что

$$nb_n^{-2} h''(\tau) \leq c(b_n \tau)^{\alpha-2+\delta} = o(1).$$

Если же $\alpha = 2$, то для $\tau \geq \tau_n$

$$\frac{l_1(\tau^{-1})}{l_1(b_n)} = \frac{\widehat{m}(\tau^{-1})}{\widehat{m}(b_n)} \leq c,$$

поскольку $\widehat{m}(x)$ монотонно возрастает. Следовательно, $nb_n^{-2} h''(\tau) \leq c$. Таким образом,

$$nb_n^{-2} \sup_{\tau_n \leq \tau \leq \delta} h''(\tau) = \begin{cases} \theta\omega(n), & \text{если } 0 < \alpha < 2, \\ \theta c, & \text{если } \alpha = 2. \end{cases} \quad (40)$$

Положим

$$\rho(\tau) = |h'''(\tau)| (h''(\tau))^{-3/2}. \quad (41)$$

Из лемм 4 и 5 следует, что

$$\rho(\tau) = \begin{cases} c\tau^{-\alpha/2} (l(\tau^{-1}))^{-1/2}, & \text{если } 0 < \alpha < 2, \\ c\tau^{-1} (\widehat{m}(\tau^{-1}))^{-3/2} l(\tau^{-1}), & \text{если } \alpha = 2, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\tau \sqrt{h''(\tau)} = \begin{cases} O((\rho(\tau))^{-1}), & \text{если } 0 < \alpha < 2, \\ o((\rho(\tau))^{-1}), & \text{если } \alpha = 2. \end{cases} \quad (42)$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Предположим сначала, что $x \leq x_n$. Очевидно можно ограничиться случаем $nM_\delta \leq x \leq x_n$.

Пусть $\xi_j(s)$, $j = 1, 2, \dots$, независимы и имеют общее распределение (13), а $\zeta_n(s) = \xi_1(s) + \dots + \xi_n(s)$. Определим на борелевских множествах меру

$$Q_{ns}(A) = \sqrt{2\pi nM'(s)} P\{\zeta_n(s) - nM(s) \in A\}.$$

Прежде всего покажем, что Q_{ns} слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к мере Лебега, причем равномерно по s , $0 < \delta \leq s \leq \lambda - \tau_n$. Тут нужно слегка изменить форму классической интервальной локальной предельной теоремы, приведенной в [15] (см. также [18]). Положим

$$q(t) = e^{-itM(s)} \mathbf{E} e^{it\xi_1(s)} = e^{-itM(s)} \frac{h(\tau - it)}{h(\tau)}, \quad s = \lambda - \tau.$$

Введем индикаторную функцию

$$e(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \in [0, y), \\ 0, & \text{если } u \notin [0, y), \end{cases}$$

где $y > 0$ фиксированно. Рассмотрим далее для произвольно малого $\varepsilon > 0$ монотонные ε -аппроксимации функции $e(u)$, т.е. такие функции $e_-(u)$ и $e_+(u)$, что

- а) $e_-(u) \leq e_+(u)$;
- б) $\int (e_+(u) - e_-(u)) du < \varepsilon$;
- с) $\widehat{e}_\pm(t) = \int e^{itu} e_\pm(u) du$ имеют компактные носители.

Из тождества Парсеваля следует, что

$$\mathbf{E} e(\zeta_n(s) - x) \leq \mathbf{E} e_+(\zeta_n(s) - x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \widehat{e}_+(-t) q^n(t) dt.$$

Подобным же образом получаем, что

$$\mathbf{E} e(\zeta_n(s) - x) \geq \mathbf{E} e_-(\zeta_n(s) - x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \widehat{e}_-(-t) q^n(t) dt.$$

Учитывая свойство с) монотонной ε -аппроксимации, существует такое $T > 0$, что

$$\int e^{-itx} \widehat{e}_{\pm}(-t) q^n(t) dt = \int_{|tT| < T} e^{-itx} \widehat{e}_{\pm}(-t) q^n(t) dt.$$

Достаточно показать, что

$$\sup_{\delta \leq s \leq \lambda - \tau_n} \left| \sqrt{nM'(s)} \int_{|t| < T} \widehat{e}_{\pm}(t) q^n(t) dt - \frac{\widehat{e}_{\pm}(0)}{\sqrt{2\pi}} \right| = o(1). \quad (43)$$

Обозначим оцениваемый интеграл в (43) через J . Представим его в виде суммы интегралов

$$J = \int_{|t| < \Delta\tau} + \int_{\Delta\tau \leq |t| \leq \eta} + \int_{\eta < |t| < T} = J_1 + J_2 + J_3. \quad (44)$$

Здесь величина η та же, что и в лемме 6.

Положим

$$\beta(s) = \frac{\mathbf{E}|\xi_1(s) - M(s)|^3}{M'(s)^{3/2}}.$$

Напомним, что

$$M'(s) = h''(\lambda - s) = \mathbf{D} \xi(s).$$

Известно, что (см., например, (5.6) в гл. XVI монографии [16])

$$n \ln q \left(\frac{t}{\sqrt{nM'(s)}} \right) = -\frac{t^2}{2} + \theta n^{-1/2} |t|^3, \quad (45)$$

по крайней мере, для $|t| < \sqrt{n}/\beta(s)$.

Из лемм 1, 2 и (41) следует, что $\beta(s) \sim \rho(\tau)$ при $\tau = \lambda - s \rightarrow 0$. Таким образом, согласно (42) можно выбрать $\Delta > 0$ так, чтобы

$$\tau \Delta \sqrt{M'(s)} \leq \frac{1}{\beta(s)}.$$

Из леммы 7 и соотношения (39) следует, что

$$\inf_{\tau_n \leq \tau \leq \delta} n\tau^2 M'(\lambda - \tau) \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Объединение (44), (45) и (46) дает

$$\sqrt{nM'(s)} J_1 = \frac{\widehat{e}_{\pm}(0)}{\sqrt{2\pi}} + o(1). \quad (47)$$

С помощью леммы 6 получаем, что

$$|J_2| \leq \sup_{|t| \leq \eta} |e_{\pm}(t)| \int_{\Delta \tau \leq |t| \leq \eta} |q(t)|^n dt \leq c \int_{\Delta \tau}^{\eta} \exp(-nct^{\alpha} l_1(t^{-1})) dt,$$

где, как и прежде,

$$l_1(x) = \begin{cases} l(x), & \text{если } 0 < \alpha < 2, \\ \hat{m}(x), & \text{если } \alpha = 2. \end{cases}$$

Без потери общности можно предположить, что $1/\eta \geq X$, а n достаточно велико. Тогда из (10) и (18) следует, что $nt^{\alpha} l(t^{-1}) \geq c(tb_n)^{\alpha-\delta}$. Принимая во внимание (40), получаем, что

$$\sqrt{nM'(s)} |J_2| \leq cb_n^{-1} \sqrt{nM'(s)} \int_{\Delta \tau b_n}^{\infty} \exp(-ct^{\alpha-\delta}) dt = o(1). \quad (48)$$

Очевидно, что

$$\sup_{0 \leq s \leq \lambda} \sup_{\eta \leq |t| \leq T} |q(t)| = q < 1.$$

Следовательно, в соответствии с (40)

$$\sqrt{nM'(s)} |J_3| \leq cb_n q^n = o(1). \quad (49)$$

Теперь оценка (43) следует из (44) и (48)–(49). Далее

$$P\{\zeta_n > x\} = \frac{f^n(s) e^{-sx}}{\sqrt{2\pi nM'(s)}} \int_{(0, \infty)} e^{-su} Q_{ns}(du).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы, поскольку функции e^{-su} , $0 \leq s \leq \lambda$, равномерно непрерывны и равномерно интегрируемы на $(0, \infty)$.

Пусть теперь $x - a_n \asymp b_n$. Положим

$$Q_{n\lambda}^{(x)}(A) = P\{\zeta_n(\lambda) - x \in A\}.$$

Очевидно, что

$$P\{\zeta_n > x\} = f^n(\lambda) e^{-\lambda x} \int_{(0, \infty)} e^{-\lambda u} Q_{n\lambda}^{(x)}(du).$$

Из интервальной локальной предельной теоремы (см., например, [18]) получаем, что

$$b_n \int_{(0, \infty)} e^{-\lambda u} Q_{n\lambda}^{(x)}(du) = g_{\alpha}(b_n^{-1}(x - a_n)) \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} du + o(1)$$

равномерно по x , $-\infty < x < \infty$, откуда следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nagaev S. V.* Large deviations of sums of independent variables. — *Ann. Probab.*, 1979, № 7, p. 745–789.
2. *Розовский Л. В.* Вероятности больших уклонений. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1993, т. 38, в. 1, с. 79–109.
3. *Боровков А. А., Мозульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. — *Труды ин-та матем. СО РАН*, 1992, № 2, с. 3–220.
4. *Dembo A., Zeitouni O.* Large deviations techniques and applications. Boston, MA: Jones and Bartlett, 1993.
5. *Deuschel J. D., Strook D. W.* Large Deviations. Duluth, London: Academic Press, 1989.
6. *Ellis R. S.* Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1985.
7. *Крамер Г.* Об одной новой предельной теореме теории вероятностей. — *Успехи матем. наук*, 1944, в. X, с. 166–178.
8. *Нагаев А. В.* Новые теоремы о больших уклонениях в условиях Крамера. — В сб.: 4-я Международная конференция по теории вероятн. и матем. статист. Тезисы докладов, 1985, № 1, с. 32–33.
9. *Петров В. В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1965, т. X, в. 2, с. 310–322.
10. *Золотарев В. М.* Об одной новой точке зрения на предельные теоремы, учитывающие большие уклонения. — В сб.: Труды 6-го Всесоюзного совещания по теории вероятн. и матем. статист. Вильнюс: Госиздат, 1962, с. 43–47.
11. *Ким Л. В., Нагаев А. В.* О несимметричной проблеме больших уклонений. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1975, т. XX, в. 1, с. 58–68.
12. *Нагаев А. В.* Большие уклонения для одного класса распределений. — В сб.: Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Изд. АН УзССР, 1963, с. 55–68.
13. *Нагаев А. В.* Локальные предельные теоремы с учетом больших уклонений. — В сб.: Предельные теоремы и вероятностные процессы. Ташкент: ФАН, 1967, с. 71–88.
14. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
15. *Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D.* Théorèmes limites à distance finie pour les marches aléatoires. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1968, № 4, p. 25–73.
16. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее применения. Том II. М.: Мир, 1984, 752 с.
17. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
18. *Нагаев А. В.* Некоторые замечания по поводу многомерных локальных предельных теорем. — *Матем. заметки*, 1973, № 14, с. 559–563.
19. *Höglund T.* A unified formulation of the central limit theorem for small and large deviation from the mean. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1979, B. 49, S. 105–117.

Поступила в редакцию

5.XI.1996