Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Пазизин, Б. В. Рязанов, Асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия одного типа m -зависимых случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 3, 476–489

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1555>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:18:58

© 1998 г.

ПАЗИЗИН С. В.^{*}, РЯЗАНОВ Б. В.^{**}АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ
ЛОГАРИФМА ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ
ОДНОГО ТИПА m -ЗАВИСИМЫХ
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В работе показана асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия (ЛОП) в задаче проверки двух простых гипотез о распределении последовательности m -зависимых случайных величин по «откликам» на элементы этой последовательности.

Ключевые слова и фразы: m -зависимость, отношение правдоподобия, асимптотическая нормальность.

1. Постановка задачи. Результат

Пусть 1) $\mathcal{X} = \{X, \mathfrak{B}_X\}$ и $\mathcal{Y} = \{Y, \mathfrak{B}_Y\}$ — два измеримых пространства;

2) $X = \{X_t\}_1^\infty$ — стационарная в узком смысле последовательность m -зависимых случайных величин со значениями в X , распределенная в соответствии с вероятностной мерой $Q \in \{Q_1, Q_2\}$, где Q_1 и Q_2 — две вероятностные меры на $\mathcal{X}$;

3) $Y = \{Y_t\}_1^n$ — серия случайных величин $Y_t = Y_t^n$, $t = 1, \dots, n$, со значениями в Y , связанная с X условным распределением:

$$P\{Y_t \in A_t; t = 1, \dots, n \mid X\} = \prod_{t=1}^n \int_{A_t} p^n(y \mid X_t) d\mu(y), \quad (1)$$

где $A_t \in \mathfrak{B}_Y$, $t = 1, \dots, n$, а $\mathfrak{P}^n = \{p(y \mid x) = p^n(y \mid x); x \in X\}$ — семейство плотностей (параметризованное элементами $x \in X$) относительно некоторой общей доминирующей меры $\mu(y)$ на $\mathcal{Y}$. Причем, при любом фиксированном $y \in Y$, $p(y \mid x)$ — измеримая относительно $\mathfrak{B}_X$ функция от x .

Ставится задача — по наблюдаемой серии Y различить две гипотезы H_1 ($Q = Q_1$) и H_2 ($Q = Q_2$) о распределении последовательности X .

^{*}Академия ФСБ РФ, Мичуринский пр., 62, 117602 Москва, Россия.

^{**}Финансовая компания «Интраст», ул. Вавилова, 69–75, 117846 Москва, Россия.

Меры Q_1 , Q_2 и соотношение (1) индуцируют на $\mathcal{U}_Y^n$ соответствующие меры P_1^n и P_2^n . Рассмотрим логарифм отношения правдоподобия (ЛОП)

$$L_n = \ln \frac{dP_2^n(Y)}{dP_1^n(Y)} \quad (2)$$

при $n \rightarrow \infty$ и $\delta \rightarrow 0$, где

$$\delta^2 = \delta_n^2 = \int_{Y^*} \frac{(p_2(y) - p_1(y))^2}{p_1(y)} d\mu(y) \quad (3)$$

$$(Y^* = \{y \in Y: p_1^n(y) > 0\} \cup \{y \in Y: p_2^n(y) > 0\})$$

— расстояние χ^2 между плотностями $p_1(y) = p_1^n(y)$ и $p_2(y) = p_2^n(y)$ распределений случайной величины Y_1 , отвечающими гипотезам H_1 и H_2 соответственно.

В задачах статистики m -зависимые случайные величины возникают в основном при рассмотрении последовательностей вида

$$\eta_t = f(\xi_t, \dots, \xi_{t+m}), \quad t = 1, 2, \dots,$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины, f — некоторая измеримая функция от $m+1$ переменных (см. [1]). Предельное поведение сумм m -зависимых случайных величин изучалось в работах [2]–[4] и др. Более общий случай слабо зависимых стационарно связанных случайных величин рассматривался в [1], [5]. Предельные теоремы для сумм слабо зависимых величин в схеме серий содержатся в [6]. В ряде работ изучалось поведение U -статистик от m -зависимых случайных величин (см. [7]).

Предельное поведение ЛОП m -зависимых случайных величин исследовалось в работах, связанных с изучением характеристик датчиков случайных чисел (см. [8]), а также с построением асимптотически оптимальных критериев в некоторых задачах статистической радиотехники (см. [9]). Изучению процессов отношения правдоподобия для различных моделей посвящено большое количество работ (см. монографии [10]–[12]). Возможность применения в данном случае общих результатов (см. [13]) затрудняется сложностью получения оценок условных вероятностей вида: $P\{Y_{t+1} = y \mid Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1\}$, $t \in \mathbb{N}$, и тем, что рассматривается не только континуальный случай ($\delta^2 n = \text{const}$), но и случай расходящихся гипотез ($\delta^2 n \rightarrow \infty$). По этим же причинам в работе не использовались мартингаловые методы ([14]). Доказательство асимптотической нормальности ЛОП проводится путем многошаговой редукции, основанной на последовательном применении метода С. Н. Бернштейна ([15]).

Теорема. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$,

$$\frac{p(y \mid x_1)}{p(y \mid x_2)} - 1 = O(\delta) \quad (4)$$

равномерно по $y \in Y$ и $x_1, x_2 \in X$ и выполняются соотношения:

$$m = o(n), \quad \delta m^{12} \rightarrow 0 \quad (5)$$

или

$$\delta^2 n = \text{const} (> 0), \quad \delta m^6 \rightarrow 0. \quad (6)$$

Тогда, при гипотезе H_ε ($\varepsilon = 1, 2$):

1) распределение случайной величины

$$\tilde{L}_n = \frac{L_n - E_\varepsilon L_n}{\sqrt{D_\varepsilon L_n}}$$

слабо сходится к распределению стандартного нормального закона;

2) среднее и дисперсия статистики L_n ведут себя следующим образом:

$$E_\varepsilon L_n \sim (-1)^\varepsilon \frac{\delta^2 n}{2}, \quad D_\varepsilon L_n \sim \delta^2 n. \quad (7)$$

Следствие. В условиях теоремы статистика

$$S_n = \sum_{t=1}^n \left(\frac{p_2(Y_t)}{p_1(Y_t)} - 1 \right)$$

является асимптотически достаточной в задаче проверки гипотез H_1 и H_2 по Y .

Для доказательства данного следствия достаточно заметить, что в условиях теоремы при гипотезе H_ε ($\varepsilon = 1, 2$) распределение статистики

$$\tilde{S}_n = \frac{1}{\delta \sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{p_2(Y_t)}{p_1(Y_t)} - 1 + \delta^2(1 - \varepsilon) \right)$$

слабо сходится к распределению стандартного нормального закона. Последнее является попутным результатом доказательства теоремы.

З а м е ч а н и е. Если X — не стационарная последовательность, $p_{t\varepsilon}(y) = p_{t\varepsilon}^n(y)$ — плотность распределения Y_t при гипотезе H_ε ($\varepsilon = 1, 2$) и для всех $t = 1, \dots, n$

$$\delta^2 \sim \delta_n^2(t) = \int_{Y_t^*} \frac{(p_{t2}(y) - p_{t1}(y))^2}{p_{t1}(y)} d\mu(y)$$

$$(Y_t^* = \{y \in Y: p_{t1}(y) > 0\} \cup \{y \in Y: p_{t2}(y) > 0\}),$$

т.е. расстояние χ^2 между плотностями $p_{t1}(y)$ и $p_{t2}(y)$ в асимптотике не зависит от t , то теорема сохраняет свою силу, что нетрудно увидеть из доказательства.

Заметим также, что в условиях теоремы расстояние χ^2 при $n \rightarrow \infty$ ведет себя аналогично расстоянию Хеллингера:

$$\delta^2 \sim 4 \sum_{t=1}^n \int_{\mathbb{Y}} \left(\sqrt{p_{t1}(y_t)} - \sqrt{p_{t2}(y_t)} \right)^2 d\mu(y),$$

и в независимом случае при $\delta^2 n = \text{const} (> 0)$ асимптотическая нормальность ЛОП вытекает из теоремы 2 работы [16].

2. Доказательство теоремы

Прежде всего отметим, что по условию (4) носители распределений из семейства $\mathfrak{P}$ совпадают с $\mathbb{Y}^*$ (далее будем считать, что $\mathbb{Y}^* = \mathbb{Y}$). Следовательно, меры P_1^n и P_2^n абсолютно непрерывны друг относительно друга для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$, и запись (2) является корректной в условиях теоремы.

Мы проведем доказательство только для гипотезы H_1 . Для альтернативы H_2 доказательство в общем случае проводится аналогично, а в случае $\delta^2 n = \text{const} (> 0)$ вытекает из контигуальности гипотез H_1 и H_2 . Индекс «1» (номер гипотезы H_1) при знаках математического ожидания и дисперсии далее будем опускать.

2.1. Оценим среднее и дисперсию L_n при $\delta n \rightarrow 0$. Из представления (1) имеем:

$$p_\varepsilon(y) = \frac{dP_\varepsilon^n(y)}{d\mu} = \int_{\mathbb{X}^n} \prod_{t=1}^n p(y_t | x_t) dQ_\varepsilon \quad (8)$$

($y = (y_1, \dots, y_n)$, $d\mu = d\mu(y_1) \times \dots \times d\mu(y_n)$, $\varepsilon = 1, 2$). Отсюда, согласно (4),

$$\frac{p_\varepsilon(y)}{\prod_{t=1}^n p_1(y_t)} = \int_{\mathbb{X}^n} \prod_{t=1}^n \left(1 + \frac{p(y_t | x_t)}{p_1(y_t)} - 1 \right) dQ_\varepsilon = \prod_{t=1}^n (1 + O(\delta)) \sim 1,$$

$\varepsilon = 1, 2$. Это позволяет, воспользовавшись разложением логарифма по формуле Тейлора, получить следующее:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} L_n &= \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{p_2(Y)}{p_1(Y)} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{p_2(Y)}{p_1(Y)} - 1 \right)^2 (1 + o(1)) \right\} \\ &\sim -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{Y}^n} \frac{(p_2(y) - p_1(y))^2}{p_1(y)} d\mu, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbb{E} L_n^2 = \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{p_2(Y)}{p_1(Y)} - 1 \right) (1 + o(1)) \right\}^2 \sim \int_{\mathbb{Y}^n} \frac{(p_2(y) - p_1(y))^2}{p_1(y)} d\mu. \quad (10)$$

Оценим величину

$$\begin{aligned}
 & \int_{Y^n} \frac{(p_2(y) - p_1(y))^2}{p_1(y)} d\mu \\
 & \sim \int_{Y^n} \left(\frac{p_2(y_1, \dots, y_n) - p_1(y_1, \dots, y_n)}{p_1(y_1) \times \dots \times p_1(y_n)} \right)^2 p_1(y_1) \times \dots \times p_1(y_n) d\mu \\
 & = \int_{Y^n} \left(\int_{X^n} \prod_{t=1}^n \left(1 + \frac{p(y_t | x_t)}{p_1(y_t)} - 1 \right) dQ_2 \right. \\
 & \quad \left. - \int_{X^n} \prod_{t=1}^n \left(1 + \frac{p(y_t | x_t)}{p_1(y_t)} - 1 \right) dQ_1 \right)^2 p_1(y_1) \times \dots \times p_1(y_n) d\mu \\
 & = \int_{Y^n} \left(\sum_{r=1}^n \sum_{1 \leq t_1 < \dots < t_r \leq n} \left(\int_{X^n} \prod_{j=1}^r \left(\frac{p(y_{t_j} | x_{t_j})}{p_1(y_{t_j})} - 1 \right) dQ_2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \int_{X^n} \prod_{j=1}^r \left(\frac{p(y_{t_j} | x_{t_j})}{p_1(y_{t_j})} - 1 \right) dQ_1 \right) \right)^2 p_1(y_1) \times \dots \times p_1(y_n) d\mu \\
 & = \int_{Y^n} \sum_{r=1}^n \sum_{1 \leq t_1 < \dots < t_r \leq n} \left(\int_{X^n} \prod_{j=1}^r \left(\frac{p(y_{t_j} | x_{t_j})}{p_1(y_{t_j})} - 1 \right) dQ_2 \right. \\
 & \quad \left. - \int_{X^n} \prod_{j=1}^r \left(\frac{p(y_{t_j} | x_{t_j})}{p_1(y_{t_j})} - 1 \right) dQ_1 \right)^2 p_1(y_1) \times \dots \times p_1(y_n) d\mu.
 \end{aligned}$$

Для доказательства последнего равенства достаточно поменять порядок интегрирования соответствующих слагаемых и воспользоваться тем, что для всех $t = 1, \dots, n$ и любого $x \in X$

$$E \left(\frac{p(Y_t | x)}{p_1(Y_t)} - 1 \right) = \int_Y \left(\frac{p(y | x)}{p_1(y)} - 1 \right) p_1(y) d\mu = 0.$$

Далее, согласно (4), получаем:

$$\begin{aligned}
 & \int_{Y^n} \frac{(p_2(y) - p_1(y))^2}{p_1(y)} d\mu \\
 & \sim \int_{Y^n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{p_2(y_t) - p_1(y_t)}{p_1(y_t)} \right)^2 p_1(y_t) d\mu + O \left(\delta^2 \sum_{r=2}^n n^r \delta^{2(r-1)} \right) \\
 & \sim \delta^2 n + O \left(\delta^2 (n^2 \delta^2) \left(\sum_{r=0}^{n-2} n^r \delta^{2r} \right) \right) \sim \delta^2 n.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (9) и (10) вытекает:

$$EL_n \sim -\frac{1}{2} \delta^2 n, \quad (11)$$

$$DL_n^2 = EL_n^2 - (EL_n)^2 \sim \delta^2 n. \quad (12)$$

2.2. Покажем асимптотическую нормальность $\tilde{L}_n$ при $\delta n \rightarrow 0$. Положим

$$S_n = \sum_{t=1}^n \zeta_t, \quad (13)$$

где

$$\zeta_t = \frac{p_2(Y_t)}{p_1(Y_t)} - 1, \quad t = 1, \dots, n.$$

Легко показать, что $ES_n = 0$, а

$$ES_n^2 = \sum_{t=1}^n E\zeta_t^2 + \sum_{t \neq k} E\zeta_t \zeta_k = \delta^2 n + O(\delta^4 mn) \sim \delta^2 n, \quad (14)$$

так как, согласно представлению (8) и условию (4), для любых $t \neq k$

$$\begin{aligned} E\zeta_t \zeta_k &= \int_{Y^n} \left(\frac{p_2(y_t)}{p_1(y_t)} - 1 \right) \left(\frac{p_2(y_k)}{p_1(y_k)} - 1 \right) \int_{X^n} (p(y_t | x_t) - p_1(y_t) + p_1(y_t)) \\ &\quad \times (p(y_k | x_k) - p_1(y_k) + p_1(y_k)) dQ_1 d\mu \\ &= \int_{Y^n} \left(\frac{p_2(y_t)}{p_1(y_t)} - 1 \right) \left(\frac{p_2(y_k)}{p_1(y_k)} - 1 \right) \int_{X^n} (p(y_t | x_t) - p_1(y_t)) \\ &\quad \times (p(y_k | x_k) - p_1(y_k)) dQ_1 d\mu = O(\delta^4). \end{aligned}$$

Рассмотрим, при $\delta n \rightarrow 0$, центрированную статистику

$$\bar{L}_n = L_n + \frac{\delta^2 n}{2}.$$

Из соотношений (11), (12) и (14) следует, что

$$\begin{aligned} E(L_n - S_n)^2 &= EL_n^2 - 2EL_n S_n + ES_n^2 = EL_n^2 + ES_n^2 \\ &\quad - 2E \left(\frac{p_2(Y)}{p_1(Y)} - 1 \right) \sum_{t=1}^n \left(\frac{p_2(Y_t)}{p_1(Y_t)} - 1 \right) + o(2\delta^2 n) \\ &= 2\delta^2 n + o(\delta^2 n) - 2 \sum_{t=1}^n \int_{Y^n} \left(\frac{p_2^2(y_t)}{p_1(y_t)} - p_2(y_t) \right) d\mu \\ &= 2\delta^2 n + o(\delta^2 n) - 2\delta^2 n = o(\delta^2 n). \end{aligned}$$

Отсюда и из (14) имеем: $D(\bar{L}_n - S_n) = o(DS_n)$. Следовательно, предельное распределение $\bar{L}_n$ совпадает с предельным распределением S_n , и дело, таким образом, сводится к исследованию асимптотического поведения статистики S_n .

Для доказательства асимптотической нормальности статистики $\tilde{S}_n = S_n / \delta \sqrt{n}$ воспользуемся методом С. Н. Бернштейна, разработанным для распространения центральной предельной теоремы на слабозависимые случайные величины ([12]).

Пусть $h = [\sqrt{nm}]$. Так как $m = o(n)$, то $m = o(h)$, а $h = o(n)$. Разобьем сумму S_n на участки

$$\begin{aligned}\zeta'_1 &= \zeta_1 + \dots + \zeta_h, & \zeta''_1 &= \zeta_{h+1} + \dots + \zeta_{h+m}, \\ \zeta'_2 &= \zeta_{h+m+1} + \dots + \zeta_{2h+m}, & \zeta''_2 &= \zeta_{2h+m+1} + \dots + \zeta_{2h+2m}, \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

длины h и m соответственно. Таким образом, сумма S_n распадается на две части $S' = \zeta'_1 + \dots + \zeta'_M$ и $S'' = \zeta''_1 + \dots + \zeta''_M$, каждая из которых представляет собой сумму независимых случайных величин. При этом в силу выбора h дисперсия S'' по порядку меньше дисперсии S' , и, значит, предельное распределение суммы S_n совпадает с предельным распределением суммы S' .

Для статистики S' выполняется обеспечивающее ее асимптотическую нормальность условие Ляпунова

$$ME(\zeta')^4 = o((DS')^2). \quad (15)$$

Чтобы в этом убедиться, покажем, что

$$ES_n^4 = O((\delta^2 n)^2), \quad (16)$$

для чего представим четвертый момент суммы (13) в виде

$$ES_n^4 = \Sigma_0 + 4\Sigma_1 + 3\Sigma_2 + 3\Sigma_3 + \Sigma_4,$$

где

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \Sigma E\zeta_t^4, & \Sigma_1 &= \Sigma E\zeta_{t_1}^3 \zeta_{t_2}, & \Sigma_2 &= \Sigma E\zeta_{t_1}^2 \zeta_{t_2}^2, \\ \Sigma_3 &= \Sigma E\zeta_{t_1}^2 \zeta_{t_2} \zeta_{t_3}, & \Sigma_4 &= \Sigma E\zeta_{t_1} \zeta_{t_2} \zeta_{t_3} \zeta_{t_4}\end{aligned}$$

и суммирование в Σ_i ведется по попарно неравным индексам. Согласно (4),

$$\Sigma_0 = O(\delta^4 n^2), \quad \Sigma_1 = O(\delta^4 n^2), \quad \Sigma_2 = O(\delta^4 n^2).$$

Применив прием, использованный при доказательстве (14), получаем:

$$\Sigma_3 = O(\delta^6 n^2 m), \quad \Sigma_4 = O(\delta^8 n^2 m^2).$$

Следовательно, (16) выполнено, и на основании того, что $M \sim n/h \sim \sqrt{n/m}$, $h = \sqrt{nm}$, $DS' \sim DS_n \sim \delta^2 n$, получаем соотношения

$$ME(\zeta')^4 = ME(S_h)^4 \sim M\delta^4 h^2 \sim \delta^4 nm \sqrt{\frac{n}{m}} = o(\delta^4 n^2),$$

доказывающие (15). Асимптотическую нормальность статистики $\tilde{S}_n$ не сложно показать и в более общем случае, воспользовавшись известными результатами для схем серий слабозависимых случайных величин.

В данном случае мы предпочли воспользоваться методом С. Н. Бернштейна, так как полученные при этом соотношения используются в дальнейшем, когда идея этого метода применяется для сведения случая $\delta n \geq C > 0$ к случаю $\delta n \rightarrow 0$ при исследовании ЛОП. (Здесь и далее символом C обозначаются неутраченные константы.)

2.3. Опишем процедуру «дробления» L_n в случае $\delta n \geq C > 0$ и $\delta m^{12} \rightarrow 0$.

1) **Лемма 1.** Пусть $\Delta > 0$, $\Delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Тогда существует неотрицательная целочисленная функция $r' = r'(\Delta, n)$, для которой

$$\Delta^{r'} n \rightarrow \infty, \quad \Delta^{r'+2} n \rightarrow 0. \quad (17)$$

Доказательство. Положим $a = \ln n$, $b = \ln \Delta^{-1}$. Очевидно, что соотношения (17) эквивалентны соотношениям

$$a - r'b \rightarrow \infty, \quad (r' + 2)b - a \rightarrow \infty, \quad (18)$$

и при этом $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$.

Функцию r' строим следующим образом. Для данных a и b выберем такое неотрицательное целое i , что $ib < a \leq (i + 1)b$. В случае $i = 0$ полагаем $r' = 0$. В случае $i \geq 1$ полагаем

$$r' = \begin{cases} i - 1, & \text{если } ib < a \leq \left(i + \frac{1}{2}\right)b, \\ i, & \text{если } \left(i + \frac{1}{2}\right)b < a \leq (i + 1)b. \end{cases}$$

Легко видеть, что в случае $r' = 0$

$$a - r'b = a, \quad (r' + 2)b - a = 2b - a \geq b,$$

а в случае $r' \geq 1$

$$a - r'b \geq \frac{b}{2}, \quad (r' + 2)b - a \geq \frac{b}{2}, \quad (19)$$

откуда следует (18). Лемма 1 доказана.

Положим $d = [\delta^{-1/3}]$, $\Delta = d^{-1}$ и на основе леммы 1 определим функцию

$$r = r(\Delta, n) = \begin{cases} 0, & \text{если } r' = 0, \\ r' - 1, & \text{если } r' \geq 1. \end{cases} \quad (20)$$

Далее, положим $n_0 = n$, $n_i = [\Delta n_{i-1}] - m$, $i = 1, \dots, r$.

Лемма 2. В случае $\delta n \geq C > 0$ ($n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$) параметры d , m , r , δ , Δ и n_i ($i = 0, \dots, r$) ведут себя следующим образом:

$$1) \quad \Delta \rightarrow 0, \quad \Delta \sim \delta^{1/3}, \quad r \geq 1; \quad (21)$$

$$2) \quad \Delta^{r+1}n \rightarrow \infty, \quad \Delta^{r+3}n \rightarrow 0, \quad (22)$$

$$n_i \sim \Delta^i n, \quad n_i \rightarrow \infty \text{ равномерно по } i, \quad 0 \leq i \leq r; \quad (23)$$

$$3) \quad \gamma = \delta m d \rightarrow 0, \quad m^4 = o(d), \quad m^2 = o(\Delta^{r+1}n). \quad (24)$$

Доказательство. Соотношения (21) и (22) являются прямым следствием леммы 1, определения (20) и условия $\Delta^3 n \sim \delta n \geq C > 0$. Первое и второе соотношения в (24) вытекают из условий теоремы и определения d и γ . Последняя оценка в (24) вытекает из второй и неравенства $\Delta^{r+1}n \geq \Delta^{-1/2} = \sqrt{d}$, которое является следствием неравенств (19). Для доказательства (23) применим последовательно неравенства $\Delta n_{j-1} - (m+1) \leq n_j \leq \Delta n_{j-1} - m$, $1 \leq j \leq i$, в результате чего получим соотношения

$$\Delta^i n - (m+1) \frac{1 - \Delta^i}{1 - \Delta} \leq n_i \leq \Delta^i n - m \frac{1 - \Delta^i}{1 - \Delta}, \quad 1 \leq i \leq r,$$

из которых следует, что $|n_i - \Delta^i n| \leq C m$. Но, согласно (24), $m = o(\Delta^i n)$ равномерно по i ($1 \leq i \leq r$), и, значит $n_i = \Delta^i n \{1 + o(1)\}$. Лемма 2 доказана.

2) Приступим к непосредственному исследованию исходной статистики

$$\mathfrak{M}_0 = L_n = \ln \left(\int_{\mathbb{X}^n} \exp \sum_{t=1}^n \ln \frac{p(Y_t | x_t)}{p_1(Y_t)} dQ_2 \right) - \ln \left(\int_{\mathbb{X}^n} \exp \sum_{t=1}^n \ln \frac{p(Y_t | x_t)}{p_1(Y_t)} dQ_1 \right).$$

Разобьем $\mathcal{M}_0 = \sum_{t=1}^n \ln(p(Y_t | x_t)/p_1(Y_t))$ на две части:

$$\mathcal{M}_0 = \sum_{j=0}^d \mathcal{M}_{1j} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{M}_{10},$$

объединив в основную часть $\mathcal{N}_1$ независимые слагаемые

$$\mathcal{M}_{1j} = \sum_{t=(j-1)h+1}^{(j-1)h+n_1} \xi_t, \quad j = 1, \dots, d,$$

где

$$\xi_t = \ln \frac{p(Y_t | x_t)}{p_1(Y_t)} \quad (t = 1, \dots, n), \quad h = h_1 = n_1 + m = [\Delta n].$$

В соответствии с этим разбиением представим статистику $\mathfrak{M}_0$ в виде

$$\mathfrak{M}_0 = \sum_{j=0}^d \mathfrak{M}_{1j} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{M}_{10},$$

где

$$\mathfrak{M}_1 = \ln \left(\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_1) dQ_2 \right) - \ln \left(\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_1) dQ_1 \right) = \sum_{j=0}^d \mathfrak{M}_{1j}$$

— сумма серии независимых одинаково распределенных случайных величин

$$\mathfrak{M}_{1j} = \ln \left(\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{M}_{1j}) dQ_2 \right) - \ln \left(\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{M}_{1j}) dQ_1 \right), \quad j = 1, \dots, d.$$

Продолжим такой процесс «дробления» итеративным образом, беря за основу последовательно суммы $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{i1} = \sum_{t=1}^{n_i} \xi_t$ и соответствующие этим суммам статистики

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_{i1} = \ln \left(\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{M}_i) dQ_2 \right) - \ln \left(\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{M}_i) dQ_1 \right), \quad i = 1, \dots, r. \quad (25)$$

На i -м шаге ($i = 1, \dots, r$) этого итеративного процесса полагаем $h = h_i = n_i + m$ и разбиваем $\mathcal{M}_{i-1}$ на две части:

$$\mathcal{M}_{i-1} = \sum_{j=0}^d \mathcal{M}_{ij} = \mathcal{N}_i + \mathcal{M}_{i0}, \quad (26)$$

объединяя в основную часть $\mathcal{N}_i = \sum_{j=1}^d \mathcal{M}_{ij}$ независимые слагаемые

$$\mathcal{M}_{ij} = \sum_{t=(j-1)h+1}^{(j-1)h+n_i} \xi_t, \quad j = 1, \dots, d.$$

В соответствии с этим разбиением статистика $\mathfrak{M}_{i-1}$ представляется в виде

$$\mathfrak{M}_{i-1} = \sum_{j=0}^d \mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{N}_i + \mathfrak{M}_{i0}, \quad (27)$$

где

$$\mathfrak{N}_i = \ln \left(\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_2 \right) - \ln \left(\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_1 \right) = \sum_{j=1}^d \mathfrak{M}_{ij} \quad (28)$$

сумма серии независимых одинаково распределенных случайных величин

$$\mathfrak{M}_{ij} = \ln \left(\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{M}_{ij}) dQ_2 \right) - \ln \left(\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{M}_{ij}) dQ_1 \right), \quad (29)$$

$j = 1, \dots, d$. Наряду с представлением (27) мы будем рассматривать представление

$$\overline{\mathfrak{M}}_{i-1} = \sum_{j=0}^d \overline{\mathfrak{M}}_{ij} = \overline{\mathfrak{N}}_i + \overline{\mathfrak{M}}_{i0}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (30)$$

где

$$\overline{\mathfrak{M}}_i = \mathfrak{M}_i - \mathbb{E}\mathfrak{M}_i, \quad \overline{\mathfrak{N}}_i = \mathfrak{N}_i - \mathbb{E}\mathfrak{N}_i, \quad \overline{\mathfrak{M}}_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} - \mathbb{E}\mathfrak{M}_{ij},$$

$j = 0, \dots, d, i = 0, \dots, r$.

3) В полученных представлениях (27) и (30) «остатки» $\mathfrak{M}_{i0}$ и $\overline{\mathfrak{M}}_{i0}$ достаточно малы:

$$|\mathfrak{M}_{i0}| \leq \tilde{\gamma} = C\gamma, \quad |\overline{\mathfrak{M}}_{i0}| \leq \tilde{\gamma}, \quad \gamma \rightarrow 0. \quad (31)$$

Это обстоятельство позволяет свести оценки среднего и дисперсии статистики $\mathfrak{M}_0$ и (необходимого для проверки условия Ляпунова) четвертого момента статистики $\mathfrak{M}_1$ к оценкам моментов статистики $\mathfrak{M}_r$, для которой необходимые оценки получены в пп. 2.1 и 2.2, ибо для $\mathfrak{M}_r$, согласно (22), $\delta n_r \rightarrow 0$.

Убедимся в справедливости (31). Из представлений (25)–(29) следует, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{i0} &= \ln \left(\frac{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i + \mathcal{M}_{i0}) dQ_2}{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i + \mathcal{M}_{i0}) dQ_1} \right) - \ln \left(\frac{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_2}{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_1} \right) \\ &= \ln \left(\frac{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_2 + \int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) (\exp(\mathcal{M}_{i0}) - 1) dQ_2}{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_1 + \int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) (\exp(\mathcal{M}_{i0}) - 1) dQ_1} \right) \\ &\quad - \ln \left(\frac{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_2}{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_1} \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) (\exp(\mathcal{M}_{i0}) - 1) dQ_2}{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_2} \right) \\ &\quad - \ln \left(1 + \frac{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) (\exp(\mathcal{M}_{i0}) - 1) dQ_1}{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_1} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Легко видеть, что $dh_i \leq n_{i-1} \leq dh_i + d$, откуда следует, что сумма $\mathcal{M}_{i0}$ состоит из не более чем $dm + d$ слагаемых из серии $\xi_1, \dots, \xi_{n_{i-1}}$. Поэтому

$$|\mathcal{M}_{i0}| \leq C m d \delta \quad (33)$$

и (ввиду условия $\gamma = \delta m d \rightarrow 0$) $|\exp(\mathcal{M}_{i0}) - 1| \leq C \mathcal{M}_{i0} \leq \tilde{\gamma}$, что вместе с (32) и приводит к оценкам (31).

2.4. Оценим среднее и дисперсию $\mathfrak{M}_0$ в случае $\delta n \geq C > 0$ и $\delta m^{12} \rightarrow 0$.

1) Оценим среднее $a_0 = E\mathfrak{M}_0$. Положим

$$a_i = E\mathfrak{M}_i, \quad a_{ij} = E\mathfrak{M}_{ij}, \quad j = 0, \dots, d, \quad i = 1, \dots, r.$$

Из (27) следует, что $a_{i-1} = da_i + a_{i0}$, $i = 1, \dots, r$, и потому

$$a_0 = d^r a_r + q, \quad (34)$$

где $q = a_{10} + da_{20} + \dots + d^{r-1}a_{r0}$. Поскольку $\delta n_r \rightarrow 0$, то для a_r можно применить полученную для случая $\delta n \rightarrow 0$ оценку (11), согласно которой

$$a_r \sim -\frac{\delta^2 n_r}{2} \quad \text{и} \quad d^r a_r \sim -\frac{\delta^2 n}{2}. \quad (35)$$

Остается оценить q . Так как, согласно (33), $\exp(\mathcal{M}_{i0} - 1) = \mathcal{M}_{i0} + O(\gamma^2)$, то из (32) следует, что

$$\mathfrak{M}_{i0} = W + O(\gamma^2),$$

где

$$W = \frac{\int_{\mathbb{X}^n} \mathcal{M}_{i0} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_2}{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_2} - \frac{\int_{\mathbb{X}^n} \mathcal{M}_{i0} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_1}{\int_{\mathbb{X}^n} \exp(\mathcal{N}_i) dQ_1}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} |EW| &\leq \left| E \left\{ \left(\max_x \left\{ \frac{\mathcal{M}_{i0} \exp(\mathcal{N}_i)}{\exp(\mathcal{N}_i)} \right\} - \min_x \left\{ \frac{\mathcal{M}_{i0} \exp(\mathcal{N}_i)}{\exp(\mathcal{N}_i)} \mid X = x \right\} \right) \right\} \right| \\ &= \left| E \left\{ \left(\max_x \mathcal{M}_{i0} - \min_x \mathcal{M}_{i0} \right) \mid X = x \right\} \right| \leq C m d \delta^2 \\ &\quad (x = \{x_t\}_{t=1}^n \in \mathbb{X}^n), \end{aligned}$$

так как $\mathcal{M}_{i0}$ состоит из не более чем $(m+1)d$ слагаемых

$$\xi_t = \ln \frac{p(Y_t | x_t)}{p_1(Y_t)} = \frac{p(Y_t | x_t)}{p_1(Y_t)} - 1 + O(\delta^2), \quad t = 1, \dots, n,$$

и, при фиксированном x_t ,

$$\begin{aligned} E \left(\frac{p(Y_t | x_t)}{p_1(Y_t)} - 1 \right) &= \int_Y \left(\frac{p(y_t | x_t)}{p_1(y_t)} - 1 \right) p(y_t | x_t) d\mu \\ &= \int_Y \left(\frac{p(y_t | x_t)}{p_1(y_t)} - 1 \right)^2 p_1(y_t) d\mu = O(\delta^2). \end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$|a_{i0}| \leq C \gamma^2 \quad \text{и} \quad q \leq C \gamma^2 d^{r-1}. \quad (36)$$

Собирая вместе оценки (34), (35), (36) и замечая, что, согласно (24), $q = o(\delta^2 n)$, мы приходим к оценке $a_0 \sim -\delta^2 n/2$.

2) Оценим дисперсию $b_0^2 = D\mathfrak{M}_0$, для чего положим

$$\alpha = \sqrt{d}, \quad b_i^2 = D\mathfrak{M}_i, \quad \|\xi\| = \sqrt{E\xi^2}$$

и воспользуемся неравенством треугольника $\|\overline{\mathfrak{M}}_i\| - \|\overline{\mathfrak{M}}_{i0}\| \leq \|\overline{\mathfrak{M}}_{i-1}\| \leq \|\overline{\mathfrak{M}}_i\| + \|\overline{\mathfrak{M}}_{i0}\|$, из которого следует, что

$$\alpha b_i - \tilde{\gamma} \leq b_{i-1} \leq \alpha b_i + \tilde{\gamma}, \quad i = 1, \dots, r,$$

и

$$\alpha^r b_r - \tilde{\gamma}(1 + \alpha + \dots + \alpha^{r-1}) \leq b_0 \leq \alpha^r b_r + \tilde{\gamma}(1 + \alpha + \dots + \alpha^{r-1}). \quad (37)$$

В п. 2.1 доказано, что

$$b_r^2 \sim \delta^2 n_r \sim \Delta^r \delta^2 n, \quad (38)$$

и это вместе с (37) приводит к оценке

$$|b_0 - \delta\sqrt{n}| \leq C\gamma \frac{\alpha^r - 1}{\alpha - 1} \leq C\gamma \alpha^{r-1}. \quad (39)$$

Остается заметить, что правая часть в этом неравенстве, согласно (24), по порядку меньше, чем $\delta\sqrt{n}$:

$$\frac{\gamma\alpha^{r-1}}{\delta\sqrt{n}} = \frac{\delta m d \alpha^{r-1}}{\delta\sqrt{n}} = \frac{m}{\sqrt{\Delta^{r+1}n}} = o(1).$$

2.5. Покажем асимптотическую нормальность $\tilde{L}_n = \overline{\mathfrak{M}}_0/b_0$ в случае $\delta n \geq C > 0$ и $\delta m^{12} \rightarrow 0$.

Из (38) и (39) следует, что предельное распределение статистики $\overline{\mathfrak{M}}_0$ совпадает с предельным распределением суммы d^r в независимых случайных величин, четвертые моменты которых, согласно (16), ограничены величиной $C\delta^4 n_r^2$. Таким образом, выполнение для данной суммы условия Ляпунова $d^r \delta^4 n_r^2 = o((D\overline{\mathfrak{M}}_0)^2)$ обеспечивает асимптотическую нормальность статистики $\overline{\mathfrak{M}}_0/b_0$.

2.6. Заметим, что в случае выполнения условий (6) для доказательства асимптотической нормальности $\tilde{L}_n$ достаточно в описанной (в пп. 2.3 и 2.4) процедуре дробления положить $r = 4$. При этом, так как $\delta^2 n = \text{const} (> 0)$, из асимптотической нормальности ЛОП при гипотезе H_1 с параметрами $(-\delta^2 n/2, \delta^2 n)$ вытекает континуальность гипотез H_1 и H_2 относительно распределения последовательности Y . Воспользовавшись свойствами континуальных гипотез (см. [10, с. 43]), получаем, что

при условии гипотезы H_2 статистика L_n асимптотически нормальна с параметрами $(-\delta^2 n/2, \delta^2 n)$.

В общем случае доказательство теоремы при условии гипотезы H_2 заключается в том, чтобы повторить рассуждения, проведенные для доказательства теоремы в условиях гипотезы H_1 . Структура доказательства при этом сохранится, а изменения произойдут только в некоторых численных выражениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
2. *Hoeffding W., Robbins H.* The central limit theorem for dependent random variables. — *Duke Math. J.*, 1948, v. 15, p. 773–780.
3. *Diananda P. H.* The central limit theorem for m -dependent variables. — *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1955, v. 51, p. 92–95.
4. *Berk K. N.* A central limit theorem for m -dependent random variables with unbounded m . — *Ann. Probab.*, 1973, v. 1, p. 352–354.
5. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. М.: Наука, 1990, 271 с.
6. *Гринь А. Г.* Предельные теоремы для схем серий слабо зависимых величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1995, т. 40, в. 4, с. 888–897.
7. *Малевич Т. Л., Абдалимов Б.* Уточнение центральной предельной теоремы для U -статистик от m -зависимых величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1982, т. XXVII, в. 2, с. 369–373.
8. *Проскурин Г. В.* Задача различения гипотез о параметрах процесса обобщенного скользящего суммирования. — *Дискретн. матем.*, 1993, т. 5, в. 3, с. 44–63.
9. *Arbekov I. M.* Asymptotically optimum detection of a weak signal sequence with random time delays. — *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1995, v. 41, № 4, p. 1169–1174.
10. *Русас Дж.* Континуальность вероятностных мер. М.: Мир, 1975, 254 с.
11. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 527 с.
12. *Линьков Ю. Н.* Асимптотические методы статистики случайных процессов. Киев: Наукова думка, 1993, 255 с.
13. *Тараскин А. Ф.* Асимптотическое поведение отношения правдоподобия семимартингалов. — В сб.: *Статистика и управление случайными процессами*. М.: Наука, 1989, с. 199–202.
14. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 2. М.: Физ.-мат. лит., 1994, 367 с.
15. *Bernstein S. N.* Sur l'extention du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dependantes. — *Math. Ann.*, 1926, v. 97, p. 1–59. (*Берштейн С. Н.* Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин. — *Успехи матем. наук*, 1944, т. 10, с. 65–114.)
16. *Oosterhoff J., Van Zwet W. R.* A note on contiguity and Hellinger distance. — In: *Contributions to Statistics*. Ed. by J. Jureckova. Prague: Academia, 1979, p. 157–166.

Поступила в редакцию

18.V.1995

Переработанный вариант

12.III.1997