Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Белкина, В. И. Ротарь, Об оптимальности по вероятности и почти наверное для процессов со свойством связности. I. Случай дискретного времени, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 1, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp156>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 06:51:59

© 2005 г.

БЕЛКИНА Т. А.*, РОТАРЬ В. И.**

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ
И ПОЧТИ НАВЕРНОЕ
ДЛЯ ПРОЦЕССОВ СО СВОЙСТВОМ СВЯЗНОСТИ.
I. СЛУЧАЙ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ¹⁾

Получены условия, при которых стратегии, минимизирующие математическое ожидание целевого функционала (оптимальные в среднем), обладают более сильным свойством, а именно, минимизируют значение самого функционала для всех реализаций управляемого случайного процесса из множества, вероятность которого близка к единице при больших горизонтах планирования. Главное отличие указанных условий от полученных ранее состоит в том, что они связаны не со свойствами функции Беллмана, а с возможностью перевода управляемого процесса из одного состояния в другое за время с конечным математическим ожиданием. Это делает проще проверку условий в целом ряде ситуаций общего характера. Первая часть статьи касается процессов с дискретным временем, вторая — с непрерывным временем.

Ключевые слова и фразы: управляемые процессы, управляемые марковские цепи, асимптотическая оптимальность, оптимальность почти наверное, оптимальность по вероятности.

§ 1. Введение и результаты для некоторых простых моделей

1.1. Введение. В задачах стохастического динамического управления с конечным горизонтом планирования оптимальность традиционно понимается в смысле минимизации по всем допустимым управлениям математического ожидания целевого функционала. В случае, когда на каждом конечном интервале времени задан аддитивный целевой функционал, а поведение системы необходимо исследовать на бесконечном интервале, используется нормировка функционала делением

* Центральный экономико-математический институт РАН, Нахимовский пр-т, 47, 117418 Москва, Россия; e-mail: tbel@cemi.rssi.ru

** Department of Mathematics and Statistics of San Diego State University, San Diego, CA 92182-7720, USA; e-mail: rotar@sciences.sdsu.edu

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00479) и РАН по итогам 6-го конкурса-экспертизы проектов молодых ученых (грант № 105).

на длину интервала планирования, не меняющая задачи оптимизации. Тогда соответствующий традиционный подход связан с исследованием асимптотического поведения математического ожидания среднего (в единицу времени) значения функционала. В дальнейшем экстремальные управления в задачах при подобных постановках будем называть управлениями, оптимальными в среднем (*average optimal*).

В последние годы повысился интерес к сравнительно новому направлению в стохастической оптимизации, связанному с более сильным понятием оптимальности. В контексте этого направления исследуются управления, минимизирующие не только математическое ожидание целевого функционала, но и значение самого функционала с вероятностью, асимптотически близкой к единице при больших горизонтах планирования. Как правило, если такие управления существуют, среди них имеются также оптимальные в среднем.

Насколько нам известно, первые результаты в этом направлении были получены в [22] и [30], где рассматривались рекуррентные полумарковские процессы. Существенное продвижение было достигнуто в [32]–[37]; см. там же ссылки на другие статьи тех же авторов. В этих работах рассматривались управляемые марковские цепи и впервые сделана попытка применения мартингального подхода для решения указанной проблемы. Позже в [44] изучалась задача на бесконечном интервале времени для марковских управляемых процессов в более общей постановке. В [28], [9]–[13] исследовались с этих позиций однородные диффузионные процессы. В частности, для этого случая в [9] было введено в рассмотрение понятие устойчивого стационарного управления.

Общая схема динамической оптимизации с дискретным временем с соответствующими определениями *оптимальности почти наверное* и *по вероятности* была рассмотрена в [41], [2]. Общая постановка для диффузионных процессов была предложена в [38].

В то время как исследование данной проблемы в рамках общих постановок, описанных в упомянутых работах, оказывается достаточно сложным, некоторые частные схемы изучены более детально. В основном это касается линейной модели с квадратичным функционалом (линейного регулятора); см., например, [14] для ARMAX-модели, [33], [20, гл. 7], [27], [5], [25] для линейного регулятора с дискретным временем, и [38], [7] для линейного регулятора с непрерывным временем. Дальнейшие ссылки и более подробные комментарии см. также в разделе 1.3.

Следует заметить, что определения асимптотической оптимальности иногда различны (и не эквивалентны) в различных работах; подробнее см. раздел 1.2. Мы будем следовать определениям оптимальности по вероятности и почти наверное, введенным в [41] и [2].

Общие условия, приводимые в упомянутых выше статьях, касаются свойств функции Беллмана для задачи минимизации ожидаемого зна-

чения целевого функционала. Эти условия заключаются в требовании того, чтобы функция Беллмана не слишком сильно зависела от начального состояния процесса, так же как и от решений, принимаемых на начальных шагах управления. Точнее, влияние указанных факторов должно выражаться только членами второго порядка в асимптотическом представлении функции Беллмана при больших горизонтах планирования. Это означает, в частности, что для того, чтобы проверить эти условия, нужно сначала найти оптимальное управление и — более или менее точно — саму функцию Беллмана. Но это далеко не всегда возможно.

В данной работе мы рассматриваем предположения другого типа, связанные со *свойством связности* процесса. Простейшие предположения такого типа могут быть качественно описаны следующим образом.

Рассмотрим траекторию, начинающуюся из фиксированного начального состояния и порожденную оптимальной в среднем стратегией. Выберем другое начальное состояние и рассмотрим такие стратегии, что порожденные ими траектории, начинающиеся из этого состояния, пересекают первую траекторию за некоторое (случайное) время. Тогда условие состоит в том, что среди этих стратегий существует такая, для которой ожидаемое значение указанного времени слияния траекторий ограничено равномерно по всем начальным состояниям.

Главная идея здесь состоит в том, что для того, чтобы проверить эти условия, не нужно знать ни точное представление стратегии, оптимальной в среднем, ни функцию Беллмана. Например, достаточно проверить возможность перехода из одного состояния в другое за «не слишком большое время». Простейшим примером здесь может служить конечная управляемая марковская цепь. В этом случае обсуждаемое свойство связности выполнено, если существует допустимая стратегия (возможно, очень «плохая»), при которой процесс переводится из одного состояния в другое, скажем, с равными вероятностями. Еще одним простым примером может служить линейная система с *произвольной* ограниченной ценой управления на одном шаге: в этом случае проверка упомянутых условий также проста. Ниже будут приведены примеры, показывающие, что то же верно в значительно более общих нелинейных моделях.

Таким образом, когда обсуждаемые условия проверены, но не представляется возможности найти точное представление оптимальной в среднем стратегии, можно проделать это численно и при этом быть уверенными в том, что эта стратегия оптимальна не только в среднем, но и асимптотически почти наверное.

Для случая дискретного времени в менее общей ситуации (по сравнению с рассматриваемой в данной работе) результаты в этом направлении были получены в [42].

В части I этой статьи мы изучаем случай дискретного времени; процессы с непрерывным временем рассматриваются в части II, которая будет опубликована позднее.

Общая ситуация, в рамках которой формулируется основная теорема, будет исследоваться в § 2. В заключение этого параграфа рассмотрим некоторые более простые условия и следствия из основной теоремы. Все доказательства приводятся в § 3.

1.2. Марковская цепь с дискретным временем: оптимальность почти наверное.

1.2.1. Определение оптимальности. Определим управляемую однородную марковскую цепь x_t , $t = 0, 1, 2, \dots$, со значениями в $\mathbf{R}^l$ следующим рекуррентным соотношением:

$$x_t = h(\xi_t, x_{t-1}, a_t), \quad (1.1)$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (с.в.), a_t — элемент пространства $\mathbf{R}^m$ и $h: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^l$ — некоторая измеримая функция. Будем интерпретировать a_t как решение, принимаемое в момент t .

Ограничимся евклидовым пространством только в целях упрощения некоторых определений и доказательств. В § 2 будут рассматриваться пространства общей природы.

Заметим также, что при другом подходе управляемая марковская цепь определяется с помощью переходной меры $Q(\cdot|x, a)$ — условного распределения x_t при заданных $x_{t-1} = x$, $a_t = a$. С другой стороны, хорошо известно, что эти подходы эквивалентны, в частности, для каждой Q существует функция h такая, что распределение с.в. $h(\xi_t, x, a)$ совпадает с $Q(\cdot|x, a)$. Более того, с.в. ξ можно считать равномерно распределенными на интервале $[0, 1]$; см., например, [19]. Однако представление (1.1) более удобно для наших целей, так как существование единого вероятностного пространства позволяет сравнивать процессы, порожденные различными стратегиями.

Ниже для любой последовательности элементов $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ положим $\alpha^t = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$.

Пусть $x_0 = x$. Для любого целого $n \geq 1$ рассмотрим функционал

$$J_{xn}(a^n) = \sum_{t=1}^n q(x_t, a_t), \quad (1.2)$$

где x_t удовлетворяет (1.1) при $x_0 = x$, а измеримая функция q определяет цену управления в единицу времени.

Чтобы определить управление, положим $a_t = u_t$, где u_t — случайная величина, измеримая относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_{t-1}\}$. С.в. u_t представляет собой управление в момент t .

Символом u будем обозначать бесконечную последовательность $\{u_1, u_2, \dots\}$, символом u^n — ее сужение $\{u_1, \dots, u_n\}$. К последовательности u также будем применять термин «управление». Запись $J_{xn}(u)$ будет означать $J_{xn}(u^n)$.

Заметим, что формально данное выше определение фильтрации $\{\mathcal{F}_t\}$ предполагает более богатую структуру информации, чем в некоторых стандартных моделях: так как u_t измерима относительно $\mathcal{F}_{t-1}$, мы наблюдаем случайные величины ξ , а не состояния x . Но так как функционал (1.2) определяется значениями x_t и a_t , в конечном счете мы можем ограничиться достаточными управлениями, измеримыми относительно фильтрации, порожденной последовательностью x_t , т.е. управлениями, порожденными стратегиями (см. п. 1.2.2; о достаточных управлениях см., например, [40]). Тем не менее, чтобы избежать некоторых громоздких конструкций, мы будем использовать приведенное выше определение управления.

В множестве всевозможных управлений выделим некоторый, вообще говоря, произвольный класс $\mathcal{U}$; управления из этого класса будем называть *допустимыми*. В качестве класса допустимых управлений в некоторых случаях может рассматриваться наиболее широкий класс всевозможных управлений, т.е. бесконечных последовательностей u с описанными выше свойствами. В другом случае класс $\mathcal{U}$ может быть более узким, например, он может состоять только из управлений, порожденных стратегиями (строгое определение см. ниже).

Для $n \geq 1$ интервал времени $\{t; t = 0, 1, \dots, n\}$ будем обозначать $\{0, n\}$. Управление $\hat{u}^n$ называется *оптимальным в среднем* (*average optimal*) на интервале $\{0, n\}$ при начальном состоянии x , если

$$\mathbf{E} J_{xn}(\hat{u}^n) = \inf_{u^n} \mathbf{E} J_{xn}(u^n),$$

где инфимум берется по всем сужениям u^n управлений из $\mathcal{U}$.

Ясно, что $\hat{u}^n$, если оно существует, может зависеть от x и n , так что, рассматривая последовательность $\{\hat{u}^n\}$, мы имеем дело со *схемой серий* $\{\hat{u}_{1n}, \dots, \hat{u}_{nn}\}$. Позже мы будем рассматривать общий случай, когда управление характеризуется схемой серий $\{u^n = (u_{1n}, \dots, u_{nn})\}$; в этом параграфе мы ограничимся традиционной постановкой, включающей только бесконечные последовательности управлений $\{u_1, u_2, \dots\}$.

О п р е д е л е н и е 1. Для данного начального состояния x управление $u^* \in \mathcal{U}$ называется *асимптотически оптимальным почти наверное*, если для любого управления $u \in \mathcal{U}$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left[n^{-1} (J_{xn}(u) - J_{xn}(u^*)) \right] \geq 0 \quad \text{п.н.} \quad (1.3)$$

Данное определение не исчерпывает всех известных определений такого типа. Одна из хорошо известных схем (см., например, [32], [33], [20])

для линейного регулятора, [12] для общей стационарной модели, [21] для некоторых моделей в дискретном времени, а также ссылки в упомянутых работах) связана с определением, при котором

(а) существуют управление $\bar{u}$ и число θ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} J_{xn}(\bar{u}) = \theta \quad \text{п.н.}; \quad (1.4)$$

(б) для любого допустимого управления u

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} J_{xn}(u) \geq \theta \quad \text{п.н.} \quad (1.5)$$

По нашему мнению, свойство оптимальности в последнем смысле менее предпочтительно, чем данное в (1.3), по двум соображениям. Во-первых, (1.3) не предполагает выполнения закона больших чисел (как в (1.4)), который в общем случае — скажем, для неоднородных схем — может не иметь места: предел в левой части может не существовать даже для «хороших» управлений или может равняться не числу, а случайной величине. Заглядывая вперед, заметим, что последний аргумент будет важным, если мы рассматриваем не марковскую, а более общую схему (что будет сделано в § 2): в этом случае даже для однородных схем предел в законе больших чисел может оказаться случайным для «хороших» стратегий и достаточно естественных структур зависимости (скажем, для симметрично зависимых с.в.; см., например, [15], [43]).

Во-вторых, определение (1.3) более предпочтительно, чем (1.5), даже если условие (1.4), или аналогичное ему, выполнено. Действительно, пусть для управления u^* величина $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} J_{xn}(u^*)$, детерминированная или случайная, существует. Тогда из (1.3) следует неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} J_{xn}(u) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} J_{xn}(u^*) \quad (1.6)$$

— более строгое и более желательное, если это возможно, чем (1.5), так как мы имеем дело не с $\limsup$, а с $\liminf$.

Ниже мы будем следовать определению 1 ввиду того, что, как будет показано, управления со свойством (1.3) существуют при достаточно слабых условиях.

1.2.2. Первое утверждение. Понятие стратегии не является необходимым для дальнейшего изложения, но позволит упростить формулировки. *Стратегия* — это (конечная или бесконечная) последовательность $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots)$, где измеримая функция $\psi_t: \mathbf{R}^{l(t-1)} \rightarrow \mathbf{R}^m$ определяет управление в момент t ; точнее, полагаем $u_t = \psi_t(x^{t-1})$ для $t \geq 1$. Если $\psi_t(x^{t-1}) = \varphi_t(x_{t-1})$ для любого t , где $\varphi_t: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^m$ — некоторая измеримая функция, то стратегия является марковской.

Обозначим $U_{\psi xt}$, $X_{\psi xt}$ реализации управления и процесса соответственно в момент t , порожденные стратегией ψ при начальном состоянии x . Точнее,

$$\begin{aligned} X_{\psi x0} &= x, & X_{\psi xt} &= h(\xi_t, X_{\psi x(t-1)}, U_{\psi xt}) && \text{при } t = 1, 2, \dots, \\ U_{\psi x1} &= \psi_1(x), & U_{\psi xt} &= \psi_t(X_{\psi x}^{t-1}) && \text{при } t = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Положим $X_{\psi x}^t = (X_{\psi x0}, \dots, X_{\psi xt})$ и $U_{\psi x}^n = (U_{\psi x1}, \dots, U_{\psi xn})$. Стратегия ψ называется *допустимой*, если $(U_{\psi x1}, U_{\psi x2}, \dots) \in \mathcal{U}$ для всех x . Процесс, порожденный стратегией, называется *траекторией*. В обозначениях траекторий мы будем иногда опускать индекс ψ и писать при этом U_{xt} , X_{xt} .

Если стратегия определена только до момента n и элементы этой стратегии, возможно, зависят от n , то, чтобы это подчеркнуть, мы иногда будем писать ψ_{tn} , ${}_n X_{xt}$, ${}_n U_{xt}$. Такая стратегия называется *допустимой*, если $U_{\psi x}^n$ удовлетворяет ограничениям на последовательности из множества $\mathcal{U}$.

Для фиксированного n стратегия $\hat{\varphi}^n$ называется *оптимальной в среднем* (average optimal), если для каждого начального состояния x управление ${}_n U_{\hat{\varphi}^n xt}$, порожденное этой стратегией, оптимально в среднем на интервале $\{0, n\}$. Для краткости будем обозначать такое управление ${}_n \hat{U}_x = ({}_n \hat{U}_{x1}, \dots, {}_n \hat{U}_{xn})$, а соответствующую траекторию ${}_n \hat{X}_x = ({}_n \hat{X}_{x1}, \dots, {}_n \hat{X}_{xn})$.

В дальнейшем на протяжении всей статьи мы предполагаем, что *оптимальная в среднем стратегия существует для любого n* .

Утверждение 1. Пусть $q(\cdot, \cdot)$ ограничена и существует константа C со следующим свойством: для любого n и произвольной пары (начальных) состояний s и s' существуют допустимое управление $z = z^n$ и с.в. N (возможно, зависящая от n, s и s') такие, что

$$\mathbf{E}N \leq C, \quad (1.7)$$

$$N < t \leq n \implies q(x_{st}, z_t) = q({}_n \hat{X}_{s't}, {}_n \hat{U}_{s't}), \quad (1.8)$$

где x_{st} — процесс, порожденный управлением z .

Пусть также для некоторого начального состояния x существует управление $\tilde{U}_x = \{\tilde{U}_{xt}\}_{t=1}^\infty \in \mathcal{U}$ такое, что

$$\frac{1}{n} (J_{xn}(\tilde{U}_x) - J_{xn}({}_n \hat{U}_x)) \longrightarrow 0 \quad \text{п.н.}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Тогда управление $\tilde{U}_x$ асимптотически оптимально почти наверное для данного x .

Доказательство будет приведено в разделе 3.1.

Перейдем к обсуждению. Первые три замечания ниже касаются применений утверждения 1 и условий технического характера.

З а м е ч а н и я. 1. Прежде всего следует подчеркнуть, что условие допустимости (т.е. принадлежности классу $\mathcal{U}$) управления z чисто формально. Покажем, как при применении утверждения 1 к конкретным задачам это условие можно обойти. В дальнейшем это будет проиллюстрировано примерами 1, 2 и 4, где в качестве $\mathcal{U}$ рассматривается класс управлений, порожденных стратегиями, а построенные там z не принадлежат этому классу. Действительно, пусть $\mathcal{U}_1$ — некоторый класс управлений, включающий в себя $\mathcal{U}$ и такой, что управления, оптимальные в среднем в классах сужений управлений из $\mathcal{U}_1$ на всех конечных интервалах, принадлежат соответствующим классам сужений управлений из $\mathcal{U}$. Предположим также, что управление $\tilde{U}_x$ со свойством (1.9) принадлежит $\mathcal{U}$. Это верно, в частности, если $\mathcal{U}_1$ — наиболее широкий класс всевозможных управлений, а $\mathcal{U}$ — класс управлений, порожденных стратегиями. Тогда если в классе $\mathcal{U}_1$ существует управление z со свойствами, указанными в утверждении 1, применим это утверждение, рассматривая в качестве класса допустимых управлений $\mathcal{U}_1$. В результате получим, что в этом классе управление $\tilde{U}_x$ является асимптотически оптимальным почти наверное, а следовательно, оно является таковым и в более узком классе $\mathcal{U}$.

2. Условие ограниченности q не является необходимым: в § 2 оно будет заменено условием на моменты.

3. Как легко видеть, условие (1.9) мы накладываем только потому, что $\{n\hat{U}_x\}$ представляет собой схему серий, т.е. не принадлежит $\mathcal{U}$: в противном случае (1.9) было бы излишним и мы говорили бы об оптимальности п.н. самого $n\hat{U}_x$. Хотя в наиболее общем случае, вероятно, достаточно сложно установить условия, при которых управление $\tilde{U}_x$ со свойством (1.9) существует, результаты для некоторых моделей показывают, что эти условия не обременительны. В [27], [12], [38] и многих других статьях управление с упомянутым свойством — это управление, минимизирующее верхний предел среднего по времени значения математического ожидания целевого функционала (*the expected value of the long run average cost*).

Вернемся теперь к основным условиям (1.7) и (1.8). Формально для выполнения (1.8) можно положить, скажем, $N = n + 1$, так как в этом случае множество значений t в левой части (1.8) пусто и, следовательно, (1.8) выполнено автоматически. Но такое N не будет удовлетворять (1.7), так что N не должно зависеть от n «слишком сильно». Можно рассматривать N как время слияния траекторий — время, за которое процесс, стартуя из фиксированного начального состояния s , может — при правильно выбранном управлении — достичь траекто-

рии, начинающейся из другого начального состояния s' и соответствующей оптимальной в среднем стратегии. Условие состоит в том, чтобы математическое ожидание времени слияния было ограниченным *равномерно по s, s' и n* .

Существенным моментом в условии является равномерность по s и s' , в то время как n здесь включено только в силу того, что траектория ${}_n\hat{X}_{s't}$ может зависеть от n . С другой стороны, если существует управление $\tilde{U}_x$, удовлетворяющее (1.9), то, грубо говоря, достаточно думать только о времени возможного перехода на траекторию $\tilde{X}_{xt}$.

Для иллюстрации напомним кратко очень простой пример из [2]; более подробно см. указанную статью. Пусть x_t принимает значения $-1, 0, 1$. Пусть также состояния ± 1 являются *поглощающими для любой стратегии*, и предположим, что если процесс находится в состоянии 0, то допустимы два управления: при первом процесс остается в 0 с вероятностью 1, в то время как при втором управлении процесс переходит в -1 или в 1 с вероятностями $\frac{1}{2}$. Пусть начальное состояние $x = 0$ и $q(x_t, a_t) = x_t$. Как легко видеть, в этом случае любое управление оптимально в среднем, но не существует управления, оптимального почти наверное.

То же верно и в общем случае: чтобы оптимальное п.н. управление существовало, состояния должны быть в известном смысле сообщающимися. Конечно, в общем случае мы можем потребовать не обязательно точного слияния двух указанных выше траекторий, а только их сближения (см. § 2), но некоторое свойство связности должно иметь место. Ввиду этого условия оптимальности п.н., предложенные в данной работе, близки, в определенном смысле, к минимальным.

Перейдем к конкретным примерам. Первый касается классической простой задачи и служит скорее иллюстрацией того, как приведенные выше условия могут быть проверены и почему проверка может оказаться простой и не требовать поиска конкретных управлений, скажем, управлений, оптимальных в среднем.

Пример 1. Обозначим $p_m(\psi; n; s, s')$ вероятность того, что не более чем за m шагов следующие две траектории пересекутся: траектория, исходящая из состояния s и порожденная оптимальной в среднем стратегией на интервале $\{0, n\}$, и траектория, исходящая из s' и порожденная стратегией ψ . Ясно, что p_m может обращаться в нуль, при этом являясь неубывающей функцией m для каждой фиксированной ψ . Предположим, что для некоторого целого m существует марковская стратегия $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ такая, что для некоторого $q \in (0, 1)$

$$p_m(\nu; n; s, s') \geq q \quad \text{равномерно по } s, s' \text{ и } n. \quad (1.10)$$

По крайней мере для *конечной цепи* условие (1.10) является достаточно слабым. Предположим, например, что класс допустимых страте-

гий содержит марковскую стратегию $\tilde{\varphi}$, при которой процесс переходит из любого состояния в другое с вероятностью, большей фиксированного положительного числа. Скажем, при этой стратегии система переходит из одного произвольного состояния в другое с равными вероятностями. Тогда (1.10) выполнено для $\nu = \tilde{\varphi}$ и $m = 1$.

Ясно, что условие утверждения 1 выполнено в случае (1.10).

Действительно, определим управление z из (1.8) следующим образом. Для $t \leq m$ положим $z_t = U_{\nu st}$ до момента слияния траекторий, а после этого момента будем управлять процессом в соответствии с оптимальной в среднем стратегией. Если слияние не произошло на интервале до момента m , снова начинаем применять стратегию ν (другими словами, возобновляем управление в соответствии с ν), т.е. в этом случае $z_{m+t} = U_{\nu x_{mt}}$, $t \leq m$, и т.д. Заметим, что таким образом мы определили управление, но не стратегию, т.е. управление z может быть таким, что не существует порождающей его стратегии. Пусть N — время слияния траекторий. Для k таких, что $m \leq k < 2m$, имеем $P\{N > k\} \leq P\{N > m\} \leq 1 - q$. Для k таких, что $lm \leq k < (l+1)m$, имеем

$$P\{N > k\} \leq P\{N > lm\} = P\{N > lm \mid N > (l-1)m\} P\{N > (l-1)m\} \\ \leq (1-q) P\{N > (l-1)m\}.$$

По индукции $P\{N > k\} \leq (1-q)^{\lfloor k/m \rfloor}$, откуда следует неравенство $EN \leq m/q$.

Следующий пример относится к случаю несчетного множества состояний.

Пример 2. Для простоты рассмотрим сначала управляемую систему вида

$$x_t = h(x_{t-1} + u_t, \xi_t), \quad (1.11)$$

где x и u теперь имеют одинаковую размерность ($l = m$), а область значений h — несчетное множество, например, вся числовая прямая. Функция h может быть при этом нелинейной — в случае $l = 1$ можно рассмотреть, скажем, $x_t = (x_{t-1} + u_t)^3 + \xi_t$, или $x_t = (x_{t-1} + u_t)^3 \xi_t$, или $x_t = \text{sign}(x_{t-1} + u_t)|x_{t-1} + u_t|^{\xi_t}$ и т.д.

В этом случае переход на оптимальную траекторию может быть осуществлен за один шаг: $N = 1$. Действительно, чтобы получить

$$h(s + u_1, \xi_1) = h(s' + \hat{u}_1, \xi_1),$$

где $\hat{u}_1 = \hat{u}^1(s')$ соответствует стратегии, оптимальной в среднем, достаточно положить

$$u_1 = -s + s' + \hat{u}_1.$$

Хотя для нас это неважно, в этом случае управление u порождается стратегией (зависящей от s').

Конечно, (1.11) может быть существенно обобщено. Например, если

$$x_t = h(Ax_{t-1} + Bu_t, \xi_t),$$

где A и B — невырожденные неслучайные матрицы, или (в одномерном случае) $x_t = h(q_1(x_{t-1}) + q_2(u_t), \xi_t)$, где q_1 и q_2 — взаимно однозначные функции (например, $x_t = h(x_{t-1}^3 + u_t^3, \xi_t)$), вновь очевидным образом существует «переходная» стратегия, для которой $N = 1$.

Аддитивность относительно x_{t-1} и u_t также не является необходимой. Например, в одномерном случае, чтобы получить то же свойство, достаточно рассмотреть любую систему $x_t = h(x_{t-1}, u_t, \xi_t)$, где для функции h существует функция $u(s, s', \hat{u})$ (где $\hat{u}$ — число) такая, что для любого ξ

$$h(s, u(s, s', \hat{u}), \xi) = h(s', \hat{u}, \xi).$$

В качестве «существенно нелинейного» примера можно рассмотреть

$$h(s, u, \xi) = \xi(1 + |s|)^{|u|}.$$

(Мультипликативность по ξ не является необходимой; мы это предполагали для красоты примера: если с.в. ξ симметричны, процесс также будет симметричным.) В этом случае $u(s, s', \hat{u}) = \hat{u} \ln(1 + |s'|) / \ln(1 + |s|)$.

Теперь рассмотрим примеры, в которых слияние траекторий возможно, но не за один шаг. Сначала рассмотрим случай линейной системы.

Пример 3. Рассмотрим управляемую линейную систему

$$x_t = Ax_{t-1} + Bu_t + \xi_t,$$

где ξ_t , $t = 1, 2, \dots$, суть l -мерные случайные векторы, случайный вектор u_t , $t = 1, 2, \dots$, представляет собой управление в момент t , а A и B — матрицы соответствующих размеров.

Следует заметить, что, хотя система линейна, пример не связан с линейно-квадратическим регулятором, так как *функция цены* q — произвольная ограниченная функция. Условие ограниченности будет ослаблено в § 2.

Если A и B — невырожденные квадратные матрицы, слияние возможно за один шаг, как показано выше. Рассмотрим здесь общий случай. Зафиксируем n и положим

$$y_t = {}_n\hat{X}_{s't} - X_{\varphi st}, \quad V_t = {}_n\hat{U}_{s't} - U_{\varphi st}, \quad t = 1, \dots, n, \quad (1.12)$$

где φ обозначает стратегию. Ясно, что

$$y_t = Ay_{t-1} + BV_t \quad (1.13)$$

при $y_0 = s' - s$.

Известно, что если пара (A, B) является так называемой управляемой парой, то для любого начального состояния существует (неслучайное) управление V , которое переводит систему (1.13) из этого состояния в нулевое за l шагов (см., например, [26]). Таким образом, существует V , переводящее y_t из состояния $y_0 = s' - s$ в нулевое состояние.

Точнее, нужно положить $V_j = -B'(A')^{l-j-1}W_l^{-1}A'(s' - s)$ для $0 \leq j \leq l-1$ и $V_j = 0$ для $l \leq j \leq n$, где $W_l = PP'$, а $P = (B, AB, A^2B, \dots, A^{l-1}B)$ — так называемая матрица управляемости; см., например, [26].

При выбранном таким образом V мы выбираем φ в соответствии с (1.12), и в этом случае (1.8) выполнено при $N = l$.

Следует заметить, что управление, построенное в последнем примере, порождается стратегией. В общем — нелинейном — случае в ситуации, когда слияние возможно, но не за один шаг, нужное управление может быть построено, но оно не обязательно будет порождаться стратегией.

Пример 4. Рассмотрим процесс вида

$$x_t = U_t x_{t-1} + \xi_t, \quad (1.14)$$

где ξ_t , $t = 1, 2, \dots$, — независимые l -мерные случайные векторы, но управлением в момент t является случайная квадратная матрица U_t , $t = 1, 2, \dots$. Пусть $P\{\xi_t = 0\} = p$ для некоторого p , $0 \leq p < 1$, и для всех t . Если начальное состояние s — некоторый ненулевой вектор, то легко видеть, что требуемое слияние траекторий может быть осуществлено за один шаг. Пусть теперь s — нулевой вектор. Тогда очевидно, что за один шаг обеспечить слияние траекторий невозможно, поэтому построим управление $z = (Z_1, Z_2, \dots)$ следующим образом. Положим Z_1 нулевой (или любой постоянной) матрицей. В качестве Z_2 возьмем любую из матриц, удовлетворяющих условию $Z_2 \xi_1 = n \hat{X}_{s'2} - \xi_2 = n \hat{U}_{s'2} \cdot n \hat{X}_{s'1}$ (а в дальнейшем управляем в соответствии с оптимальной стратегией) в том случае, если ξ_1 не является нулевым вектором. В противном случае полагаем Z_2 нулевой матрицей, а Z_3 определяем из условия $Z_3 \xi_2 = n \hat{X}_{s'3} - \xi_3 = n \hat{U}_{s'3} \cdot n \hat{X}_{s'2}$ (и вновь в дальнейшем управляем в соответствии с оптимальной стратегией), если только ξ_2 не является нулевым вектором, — в противном случае полагаем Z_3 нулевой матрицей и т.д. Таким образом, слияние траекторий осуществится за два шага для случая, когда $\xi_1 \neq 0$, т.е. с вероятностью $1 - p$, за три шага в случае $\xi_1 = 0$, $\xi_2 \neq 0$, т.е. с вероятностью $p(1 - p)$ и т.д., — за k шагов с вероятностью $p^{k-2}(1 - p)$, $k \leq n$. Тогда $EN \leq \sum_{k=2}^{\infty} kp^{k-2}(1 - p) = 1 + (1 - p)^{-1}$.

Имеет смысл подчеркнуть, что приведенные примеры служат только иллюстрациями того, как можно применять указанные условия к конкретным задачам. Ясно, что примеры могут быть значительно сложнее. Заметим также, что на самом деле полное совпадение значе-

ний функций на траекториях не нужно — достаточно сближения этих значений, что в дальнейшем отражено в общей теореме.

1.3. Оптимальность по вероятности. Обратимся к более слабому определению оптимальности, которое требует и более слабых условий, чем (1.7).

О п р е д е л е н и е 2. Для данного начального состояния x управление $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ называется *асимптотически оптимальным* по вероятности, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого управления $u \in \mathcal{U}$

$$\mathbf{P}\left\{n^{-1}[J_{xn}(\tilde{u})] - J_{xn}(u) > \varepsilon\right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.15)$$

Утверждение 2. Пусть условия на стратегию φ^n и с.в. N из утверждения 1 выполнены с заменой (1.7) на

$$\mathbf{P}\{N \geq k\} = o(k^{-1/2}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad \text{равномерно по } s, s' \text{ и } n. \quad (1.16)$$

Пусть также для данного x существует стратегия $\tilde{U}_x \in \mathcal{U}$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}[J_{xn}(\tilde{U}_x) - J_{xn}(\hat{U}_x)] > \varepsilon\right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

Тогда $\tilde{U}_x$ асимптотически оптимально по вероятности для данного x .

Таким образом, для оптимальности по вероятности не требуется, чтобы математическое ожидание времени перехода было конечным: это время может быть «дольше», и из (1.16) следует, что условие $\mathbf{E}\sqrt{N} \leq a$, где a — константа, будет достаточным.

Следует заметить также, что при рассмотрении оптимальности по вероятности мы имеем дело не столько с асимптотическим поведением процесса на бесконечности, сколько с вероятностями определенных множеств для фиксированных (больших) горизонтов планирования. Таким образом, в этом случае, вероятно, будет естественным рассматривать не только бесконечные последовательности $u = (u_1, u_2, \dots)$, но и семейства управлений $\{u^n\} = \{u_{1n}, \dots, u_{nn}\}$, т.е. работать со схемой серий. Это будет сделано в следующем параграфе.

В заключение заметим, что при анализе доказательств в §3, так же как и во многих упомянутых работах, можно увидеть, что для того, чтобы получить аналогичные результаты, достаточно делить выражение $J_{xn}(u) - J_{xn}(u^*)$ не на n , а на некоторую функцию $r(n) = o(n)$. В частности, это связано с тем фактом, что мы исходим из закона больших чисел для мартингалов с конечными дисперсиями. Задача в указанной постановке исследовалась в [16].

До сих пор в общем случае не ясен наилучший порядок функции r . Понятно, что можно использовать $r(n)$ такую, что $r(n)/\sqrt{n} \rightarrow \infty$ (см.,

например, [29], где исследовались марковские цепи), но было показано, что, по крайней мере в некоторых частных случаях, этот результат может быть улучшен. Это касается, например, линейной модели с квадратичным функционалом, исследованной с этой точки зрения (для случая непрерывного времени) в [27] (где рассматривалась так называемая «overtaking optimality») и в [39], [7]. В [39] было показано, что для данной модели достаточно делить на любую $r(n) \rightarrow \infty$ для оптимальности по вероятности, а в [7] — что для оптимальности п.н. нужно делить на $r(n)$ такую, что $r(n)/\ln n \rightarrow \infty$, причем этот порядок является наилучшим; подробнее см. упомянутые работы. Конкретная форма целевого функционала и линейность управления в указанной модели являются существенными. При этом остается неясным, как этот результат может быть распространен на общий случай.

§ 2. Общая постановка

Сформулируем обобщение приведенной выше схемы следующим образом.

1. Будем рассматривать более общие, в частности, неоднородные процессы.
2. Условие (1.8) требует полного слияния двух определенных траекторий. Ниже будем предполагать, что эти траектории лишь приближаются друг к другу.
3. Вместо ограниченности функции q будем требовать ниже в теореме 1 ограниченность моментов некоторых характеристик.
4. Класс допустимых управлений ниже может включать не только бесконечные последовательности управлений, но и схемы серий управлений.

Общая схема стохастической динамической оптимизации в дискретном времени может быть представлена следующим образом.

Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}^t, \mathbf{P}\}$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\{\mathcal{F}^t \subset \mathcal{F}\}_{t=0}^{\infty}$ и $\{(A_t, \mathcal{A}_t)\}_{t=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых пространств произвольной природы.

Фильтрация $\{\mathcal{F}^t\}$ соответствует рассматриваемому процессу: нет необходимости вводить этот процесс в явном виде. Сигма-алгебра $\mathcal{F}^0$ «соответствует возможным начальным состояниям» процесса. Если $\mathcal{F}^0$ тривиальна, мы интерпретируем это как то, что начальное состояние фиксировано.

Пространство $(A_t, \mathcal{A}_t)$ интерпретируется как пространство решений, принимаемых в момент t .

Положим $A^t = A_1 \times \dots \times A_t$, $\mathcal{A}^t = \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_t$ (прямое произведение), $a^t = (a_1, \dots, a_t)$ при $a_j \in A_j$.

Для $n \geq 1$ определим теперь последовательность аддитивных целевых функционалов

$$J_n(\omega, a^n) = \sum_{t=1}^n g_t(\omega, a^t), \quad (2.1)$$

где функция $g_t(\omega, a^t)$ является $(\mathcal{F}^t \times \mathcal{A}^t)$ -измеримой. Представление (2.1), конечно, позволяет включать в рассмотрение управляемые процессы. Пусть, например, верно (1.1), тогда для некоторой измеримой функции $h': \mathbf{R}^t \times \mathbf{R}^{mt} \rightarrow \mathbf{R}^l$ можно записать $x_t = h'(\xi^t, a^t)$, следовательно, $g_t(\omega, a^t) = q(h'(\xi^t, a^t), a_t)$, где q — функция из представления функционала (1.2). При этом ясно, что представление (2.1) включает возможность рассмотрения и неоднородных процессов, когда функция h явно зависит от времени.

Заметим, что в общем случае можно наделить g_t вторым индексом n , допуская, что g_t может зависеть от горизонта планирования. Мы опускаем его здесь, чтобы избежать громоздкости формул, хотя в определенном смысле запись g_{tn} будет более уместна, чем g_t . В этом случае можно считать, что нормирование суммы (скажем, делением на n) уже проделано. Например, вместо $n^{-1} \sum_{t=1}^n g_t(\omega, a^t)$ можно писать $\sum_{t=1}^n g_{tn}(\omega, a^t)$, полагая $g_{tn}(\omega, a^t) = g_t(\omega, a^t)/n$. Тем не менее в данной работе мы будем иметь дело с традиционным видом записи, чтобы сделать порядок некоторых асимптотических соотношений более явным.

Будем писать иногда $g_t(\omega, a^n)$ вместо $g_t(\omega, a^t)$, имея при этом в виду, что g_t зависит только от первых t координат вектора a^n .

Для фиксированного n допустимое управление представляет собой вектор $u^n = (u_{1n}, \dots, u_{nn})$, где $u_{tn}: \Omega \rightarrow \mathcal{A}_t$ является $\mathcal{F}^{t-1}$ -измеримым, так что управление может зависеть от горизонта планирования. Иногда, если это не приводит к неправильному пониманию, мы будем опускать индекс n . То же касается стратегий, используемых ниже.

Пусть $\mathcal{U}_n$ — класс допустимых управлений для фиксированного n , $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_n\}$ и $u = \{u^n\}$, где $u^n \in \mathcal{U}_n$. В общем случае u представляет собой схему серий. Чтобы свести эту схему к традиционной постановке, мы должны предположить, что для каждого $u = \{u^n\} \in \mathcal{U}$ верно равенство $u_{tn} = u_{tt}$ при $n > t$. Как и в предыдущем параграфе, читатель при желании может иметь в виду традиционную схему, игнорируя второй индекс n .

Используя, как и выше, греческие буквы для стратегий, определим для фиксированного n стратегию как вектор $\varphi^n = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, где $\varphi_1: \Omega \rightarrow \mathcal{A}_1$ есть $\mathcal{F}^0$ -измеримое отображение и $\varphi_t: \Omega \times A^{t-1} \rightarrow A_t$ является $(\mathcal{F}^{t-1} \times \mathcal{A}^{t-1})$ -измеримым для $t = 2, 3, \dots$

Проиллюстрируем приведенную схему на примере марковской цепи, рассмотренной в разделе 1.2. Пусть с.в. ξ_t из (1.1) определены на пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, $\mathcal{F}^0$ тривиальна и $\mathcal{F}^t = \sigma(\xi^t)$. В силу (1.1) суще-

ствуется $(\mathcal{F}^t \times \mathcal{A}^t)$ -измеримая функция $g_t(\omega, a^t) = q(x_t, a_t)$. Для любой стратегии $\psi_t(x^{t-1})$ из раздела 1.2 существует $(\mathcal{F}^{t-1} \times \mathcal{A}^{t-1})$ -измеримая функция $\varphi(\omega, a^{t-1}) = \psi_t(x^{t-1})$. (Обе функции g и h могут зависеть от фиксированного начального состояния x .) Таким образом, мы оказываемся в рамках описанной выше схемы.

Описанная схема позволяет избежать некоторых излишних рассуждений и делает более простыми доказательства. Конечно, это не означает, что знание конкретной структуры процесса (скажем, представления (1.1) и (1.2)) не может быть полезно для других целей. Заметим также, что дополнительная информация о процессе и о целевом функционале может быть описана в терминах σ -алгебр, относительно которых функции g_t измеримы. В частных моделях эти σ -алгебры, как правило, проще, чем $\mathcal{F}^t \times \mathcal{A}^t$ (см., например, [40]).

Кроме того, для каждой стратегии φ^n определим набор операторов ${}_t\Phi^n$, $t = 1, \dots, n$, переводящих пространство управлений в себя, таких, что управление ${}_t\Phi^n u^n$ совпадает с u^n до момента t , а начиная с этого момента ${}_t\Phi^n u^n$ управляет процессом в соответствии со стратегией φ^n . Точнее, для $\tilde{u}^n = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n) = {}_t\Phi^n u^n$

$$\tilde{u}_j = \begin{cases} u_j, & \text{если } j < t; \\ \varphi_j(\omega, \tilde{u}_1(\omega), \dots, \tilde{u}_{j-1}(\omega)), & \text{если } j \geq t. \end{cases}$$

Управление ${}_1\Phi^n u^n$ — это управление, порожденное стратегией φ^n с начального момента, так что оно не зависит от u^n . Будем считать, что ${}_t\Phi^n u^n = u^n$ при $t > n$.

Положим $\mathbf{E}_t(\cdot) = \mathbf{E}(\cdot | \mathcal{F}^{t-1})$, $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}$.

В неоднородном случае нам понадобится немного более строгое понятие, чем оптимальность в среднем. А именно, предположим, что существует постоянно оптимальная стратегия $\hat{\varphi}^n$, т.е. стратегия такая, что для всех $u^n \in \mathcal{U}_n$ и $t = 0, 1, \dots, n$

$$\mathbf{E}_t J_n(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n u^n) \geq \mathbf{E}_t J_n(\omega, {}_t\hat{\Phi}^n u^n) \quad \text{п.н.}, \quad (2.2)$$

где операторы ${}_t\hat{\Phi}^n$ соответствуют $\hat{\varphi}^n$. (О постоянной оптимальности см., например, [25].) Положим $\hat{u}^n = {}_1\hat{\Phi}^n u^n$ и $\hat{u} = \{\hat{u}^n\}$.

Далее введем некоторые условия, которые не обязаны будут выполняться одновременно.

У с л о в и е А. Существуют $p > 2$ и константа A_p со следующим свойством: для любого n , любой пары управлений $u^n, \bar{u}^n \in \mathcal{U}_n$ и всех $t \leq n - 1$ найдется управление $z^n \in \mathcal{U}_n$ такое, что

$$z^n = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_t, z_{t+1}, \dots, z_n) \quad (2.3)$$

и

$$\mathbf{E} \left| \sum_{j=t+1}^n \{g_j(\omega, z^n) - g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n u^n)\} \right|^p \leq A_p. \quad (2.4)$$

Так как в общем случае левая часть (2.4) имеет порядок $n - t$, неравенство (2.4) может быть выполнено, если значения цены $g_j(\cdot, \cdot)$ для двух управлений, z^n и ${}_{t+1}\hat{\Phi}^n u^n$, близки друг к другу для больших j . При этом условие А означает существование управления z^n , для которого это верно.

Как альтернативу условию А можно рассмотреть следующее условие.

У с л о в и е В. Существует константа B такая, что для любого n , любой пары управлений $u^n, \bar{u}^n \in \mathcal{U}_n$ и всех $t \leq n - 1$ найдется управление (2.3) такое, что

$$\mathbf{E}_{t+1} \left| \sum_{j=t+1}^n \{g_j(\omega, z^n) - g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n u^n)\} \right| \leq B \quad \text{п.н.} \quad (2.5)$$

Таким образом, если мы накладываем условие равномерной ограниченности условного математического ожидания, то используем только первый момент, в то время как в случае ограничения на безусловное математическое ожидание используем моменты более высоких порядков.

Для оптимальности по вероятности достаточно накладывать более слабые условия.

У с л о в и е А'. Существует функция $\gamma(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, со следующим свойством: для всех n , всех пар $u^n, \bar{u}^n \in \mathcal{U}_n$ и всех $t \leq n - 1$ найдется управление $z^n \in \mathcal{U}_n$ такое, что выполнено (2.3) и

$$\mathbf{E} \left[\sum_{j=t+1}^n \{g_j(\omega, z^n) - g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n u^n)\} \right]^2 \leq \gamma(n) n. \quad (2.6)$$

У с л о в и е В'. Условие А' верно с заменой (2.6) на

$$\mathbf{E}_{t+1} \left| \sum_{j=t+1}^n \{g_j(\omega, z^n) - g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n u^n)\} \right| \leq \gamma(n) \sqrt{n}. \quad (2.7)$$

Теорема 1. (1) Пусть выполнено одно из условий А или В и для всех $u = \{u^n\} \in \mathcal{U}$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \{g_t(\omega, u^n) - \mathbf{E}_t g_t(\omega, u^n)\} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

почти наверное. Тогда последовательность управлений $\hat{u}$ асимптотически оптимальна почти наверное.

(2) Если выполнено одно из условий А' или В' и для всех $u = \{u^n\} \in \mathcal{U}$ (2.8) выполнено по вероятности, то последовательность $\hat{u}$ асимптотически оптимальна по вероятности.

Следующие замечания касаются достаточных условий справедливости (2.8).

1. Так как слагаемые в (2.8) являются мартингал-разностями относительно $\{\mathcal{F}^t\}$, ясно, что (2.8) выполнено по вероятности, если, скажем, для всех u

$$\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n \mathbf{E}[g_t(\omega, u^n) - \mathbf{E}_t g_t(\omega, u^n)]^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Это уже вполне слабое условие.

2. Очевидно, (2.9) выполнено, если функции равномерно ограничены, т.е.

$$\sup_{t, \omega, a^t} |g_t(\omega, a^t)| < \infty. \quad (2.10)$$

3. Используя лемму Бореля–Кантелли, нетрудно получить (см. также аргументы в (3.9) ниже), что (2.8) выполнено почти наверное, если для некоторого $p \geq 2$ и всех $u \in \mathcal{U}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left[\sum_{t=1}^n \|g_t(\omega, u^n) - \mathbf{E}_t g_t(\omega, u^n)\|_p^2 \right]^{p/2} < \infty, \quad (2.11)$$

где $\|\cdot\|_p$ обозначает норму в L_p .

4. Ясно, что (2.11) выполнено, если, например, существуют константы $C > 0$ и $p > 2$ такие, что для всех управлений $u^n \in \mathcal{U}_n$

$$\|g_t(\omega, u^t) - \mathbf{E}_t g_t(\omega, u^t)\|_p \leq C. \quad (2.12)$$

Очевидно, (2.10) влечет (2.12).

§ 3. Доказательства

3.1. Доказательства утверждений 1 и 2. Покажем, что эти утверждения следуют из теоремы 1. Мы предположили существование стратегий $\hat{\varphi}^n$, оптимальных в среднем на $\{0, n\}$, т.е. стратегий, порождающих оптимальные в среднем управления для всех начальных состояний. Так как схема однородна, это означает, что $\hat{\varphi}^n$ постоянно оптимальны. Так что мы можем зафиксировать начальное состояние x и рассмотреть проблему в рамках приведенной выше общей схемы, предполагая, что $\mathcal{F}^0$ тривиальна.

В нашем случае $g_t(\omega, u^n) = q(x_t, u_t)$, где x_t — процесс, порожденный u . Так как q ограничена, (2.8) в этом случае выполнено автоматически по вероятности и почти наверное (см. также замечания после теоремы 1).

Покажем теперь, что из условия утверждения 1 следует условие В, т.е. (2.5). Так как схема однородна и σ -алгебра $\mathcal{F}^0$ тривиальна, достаточно проверить (2.5) для $t = 0$ и заменить условное математическое

ожидание на безусловное. Пусть N и φ — с.в. и стратегия соответственно, определенные в утверждении 1. Тогда в силу (1.8)

$$\left| \sum_{j=1}^n \{g_j(\omega, z^n) - g_j(\omega, {}_1\hat{\Phi}^n u^n)\} \right| \leq 2NG, \quad (3.1)$$

где $G = \sup_{x,a} |q(x, a)|$. Таким образом, если $\mathbf{E}N \leq C$, то (2.5) выполнено при $B = 2GC$.

Рассмотрим теперь оптимальность по вероятности, т.е. утверждение 2. В этом случае достаточно проверить (2.7) для $t = 0$ и заменить условное математическое ожидание безусловным. Тогда (2.7) следует из (1.16).

Заметим, что если $N \geq n$, то левая часть (1.8) является пустым множеством и, значит, (1.8) выполнено автоматически. Следовательно, (1.8) останется верным, если мы заменим с.в. N ее усечением $N^{(n)} = N$, при $N < n$ и $N^{(n)} < n$ при $N \geq n$. Это означает, что в правой части (3.1) можно заменить N на $N^{(n)}$.

В силу (1.16) существует функция $\delta_0(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, одна и та же для всех s, s' и n и такая, что $\mathbf{P}\{N > k\} \leq \delta_0(k)/\sqrt{k}$. Следовательно,

$$\mathbf{E}N^{(n)} = \mathbf{E}\{N; N \leq n\} + n\mathbf{P}\{N > n\} \leq \mathbf{E}\{N; N \leq n\} + \delta_0(n)\sqrt{n}.$$

Ясно, что из (1.16) следует, что $\mathbf{E}\{N; N \leq n\} \leq \delta_1(n)\sqrt{n}$, где функция $\delta_1(n) \rightarrow 0$ и определяется только функцией $\delta_0(n)$.

Следовательно, в рассматриваемом случае из (1.8) следует (2.7) при $\gamma(n) = 2G(\delta_1(n) + \delta_0(n))$.

3.2. Доказательство теоремы 1. Будем использовать некоторые факты из [2] и [42]. Рассмотрим сначала стратегию $\hat{\varphi}^n$, управление $\hat{u}^n$ и отображение ${}_t\hat{\Phi}^n$, определенные в § 2. Положим $\hat{u} = \{\hat{u}^n\} \in \mathcal{U}$ и зафиксируем другую последовательность управлений $u = \{u^n\}$.

Ниже будем опускать индекс n в u_{tn} , $\hat{u}_{tn}$, $\hat{\varphi}_{tn}$ и ${}_t\hat{\Phi}^n$.

Пусть с.в.

$$Y_t = Y_{tn} = \mathbf{E}_t J_n(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n u^n) - \mathbf{E}_t J_n(\omega, {}_t\hat{\Phi}^n u^n).$$

Нетрудно увидеть, что

$$J_n(\omega, u^n) = \sum_{t=0}^n (\mathbf{E}_{t+1} - \mathbf{E}_t) J_n(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n u^n) + \sum_{t=1}^n Y_t + \mathbf{E} J_n(\omega, \hat{u}^n). \quad (3.2)$$

В частности, если $u = \hat{u}$, то $Y_t = 0$ п.н. и

$$J_n(\omega, \hat{u}^n) = \sum_{t=0}^n (\mathbf{E}_{t+1} - \mathbf{E}_t) J_n(\omega, \hat{u}^n) + \mathbf{E} J_n(\omega, \hat{u}^n). \quad (3.3)$$

Вычитая равенство (3.3) из (3.2), получим (см. также [2])

$$J_n(\omega, u^n) - J_n(\omega, \hat{u}^n) = \sum_{t=1}^n Y_t + \sum_{t=1}^n W_t, \quad (3.4)$$

где

$$W_t = W_{tn} = \sum_{j=t}^n [Z_{tj} - \mathbf{E}_t Z_{tj}], \quad Z_{tt} = Z_{tt}(n) = g_t(\omega, u^n) - g_t(\omega, \hat{u}^n),$$

$$Z_{tj} = Z_{tj}(n) = \mathbf{E}_{t+1} \{g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}u^n) - g_j(\omega, \hat{u}^n)\} \quad \text{при } j > t.$$

(Следует напомнить здесь, что $g_j(\omega, u^n)$ зависит только от первых j координат вектора $u^n = (u_1, \dots, u_n)$ и $\mathbf{E}_t Z_{tj} = \mathbf{E}_{t+1} Z_{tj}$ при $t \geq j$.)

Заметим, что, взяв математическое ожидание в (3.4), мы придем к соотношению

$$\mathbf{E} J_n(\omega, u^n) - \mathbf{E} J_n(\omega, \hat{u}^n) = \sum_{t=1}^n \mathbf{E} Y_t,$$

которое аналогично формуле для «дефекта стратегии», определенного в [45]. Представление (3.4) включает в рассмотрение также «случайную часть дефекта».

Так как стратегия $\hat{\varphi}^n$ постоянно оптимальна, то $Y_t \geq 0$ п.н. для всех $t \leq n$ (см. (2.2)). Следовательно, осталось доказать, что

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n W_t \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

почти наверное или по вероятности, в зависимости от рассматриваемого типа оптимальности.

Пусть

$$V_t = V_{tn} = \sum_{j=t+1}^n \mathbf{E}_{t+1} g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}u^n),$$

$$\hat{V}_t = \hat{V}_{tn} = \sum_{j=t+1}^n \mathbf{E}_{t+1} g_j(\omega, \hat{u}^n), \quad R_t = R_{tn} = V_{tn} - \hat{V}_{tn}.$$

Тогда

$$W_t = Z_{tt} - \mathbf{E}_t Z_{tt} + R_t - \mathbf{E}_t R_t. \quad (3.6)$$

В силу условия (2.8)

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [Z_{tt} - \mathbf{E}_t Z_{tt}] \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

по вероятности или п.н. (см. формулировку теоремы 1). Таким образом, достаточно показать, что

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} \{R_t - \mathbf{E}_t R_t\} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

по вероятности или п.н.

Зафиксируем некоторое $p > 2$ и положим $U_t = R_t - \mathbf{E}_t R_t$. Слагаемые в (3.8) суть мартингал-разности относительно $\{\mathcal{F}^t\}$, и в силу неравенства Буркгольдера существует константа C_p , зависящая только от p , такая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \sum_{t=1}^{n-1} U_t \right|^p &\leq C_p \mathbf{E} \left| \sum_{t=1}^{n-1} U_t^2 \right|^{p/2} = C_p \left\| \sum_{t=1}^{n-1} U_t^2 \right\|^{p/2} \leq C_p \left[\sum_{t=1}^{n-1} \|U_t^2\|_{p/2} \right]^{p/2} \\ &= C_p \left[\sum_{t=1}^{n-1} \|U_t\|_p^2 \right]^{p/2} \leq 2^p C_p \left[\sum_{t=1}^{n-1} \|R_t\|_p^2 \right]^{p/2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Используя (3.9), неравенство Маркова и лемму Бореля–Кантелли, легко показать, что сходимость почти наверное в (3.8) имеет место, если для некоторого $p > 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left[\sum_{t=1}^{n-1} \|R_t\|_p^2 \right]^{p/2} < \infty. \quad (3.10)$$

Зафиксируем n и $t \leq n$ и вернемся к условию А или В, где рассматривается пара произвольных управлений $(u^n, \bar{u}^n)$. Положим сначала $\bar{u} = \hat{u}$. Тогда управление (2.3) имеет вид

$$z^n = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_t, z_{t+1}, \dots, z_n). \quad (3.11)$$

Так как стратегия $\hat{\varphi}^n$ постоянно оптимальна, то

$$\hat{V}_t \leq \mathbf{E}_{t+1} \sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, z^n) = V_t + \mathbf{E}_{t+1} \left(\sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, z^n) - \sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n u^n) \right)$$

и

$$\hat{V}_t - V_t \leq \left| \mathbf{E}_{t+1} \left(\sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, z^n) - \sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n u^n) \right) \right|. \quad (3.12)$$

Рассмотрим теперь в качестве пары $(u^n, \bar{u}^n)$ пару $(\hat{u}, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n u^n)$. Обозначим управление (2.3) в этом случае k^n . Ясно, что оно отличается от управления (3.11). По определению оператора ${}_{t+1}\hat{\Phi}^n$ имеем $\bar{u}_j = u_j$ для $j \leq t$, и управление (2.3) может быть представлено в этом случае в виде

$$k^n = \{u_1, \dots, u_t, k_{t+1}, \dots, k_n\}.$$

Заметим также, что ${}_{t+1}\hat{\Phi}^n \hat{u}^n = \hat{u}^n$ для всех t . Поэтому в силу постоянной оптимальности стратегии $\hat{\varphi}^n$ имеем

$$\begin{aligned} V_t &\leq \mathbf{E}_{t+1} \sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, k^n) = \mathbf{E}_{t+1} \sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n \hat{u}^n) \\ &\quad + \mathbf{E}_{t+1} \left(\sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, k^n) - \sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n \hat{u}^n) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}_{t+1} \sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, \hat{u}^n) + \mathbf{E}_{t+1} \left(\sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, k^n) - \sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n \hat{u}^n) \right) \\
&= \hat{V}_t + \mathbf{E}_{t+1} \left(\sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, k^n) - \sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n \hat{u}^n) \right),
\end{aligned}$$

и

$$V_t - \hat{V}_t \leq \left| \mathbf{E}_{t+1} \left(\sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, k^n) - \sum_{j=t+1}^n g_j(\omega, {}_{t+1}\hat{\Phi}^n \hat{u}^n) \right) \right|. \quad (3.13)$$

Таким образом, если условие А выполнено, то в силу (3.12) и (3.13)

$$\|R_t\|_p = \|\hat{V}_t - V_t\|_p \leq 2A_p^{1/p}, \quad (3.14)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left[\sum_{t=1}^{n-1} \|R_t\|_p^2 \right]^{p/2} \leq 2^p A_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p/2}} < \infty \quad (3.15)$$

для $p > 2$.

Пусть теперь выполнено условие В. В этом случае из (3.12), (3.13) и (2.5) следует, что $|R_t| = |V_t - \hat{V}_t| \leq 2B$ п.н., и левая часть (3.15) снова конечна для $p > 2$. Таким образом, первое утверждение теоремы 1 доказано.

Рассмотрим теперь сходимость в (3.8) по вероятности. Аналогично доказательству неравенства (3.14) можно получить, что при условии А'

$$\mathbf{E}|R_t|^2 \leq 2\gamma(n)n.$$

Тогда дисперсия левой части (3.8) не превосходит

$$\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n 2\mathbf{E}|R_t|^2 \leq 4\gamma(n) \rightarrow 0. \quad (3.16)$$

В случае выполнения условия В' имеем

$$|R_t| \leq 2\gamma(n)\sqrt{n} \quad \text{п.н.,}$$

и (3.16) снова верно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аркин В. И., Евстигнеев И. В. Вероятностные модели управления и экономической динамики. М.: Наука, 1979.
2. Asriev A. V., Rotar V. I. On asymptotic optimality in probability and almost surely in dynamic control. — Stochastics Stochastics Rep., 1990, v. 33, № 1-2, p. 1-16.
3. Конюхова (Белкина) Т. А. Асимптотически оптимальные по вероятности управления в задаче о линейном регуляторе с переменными параметрами. — Автоматика и телемеханика, 1994, т. 55, № 2, с. 110-120.

4. Белкина Т. А., Пресман Э. Л. Асимптотически оптимальные по распределению управления для линейной стохастической системы с квадратичным функционалом. — Автоматика и телемеханика, 1997, т. 58, № 3, с. 106–115.
5. Конюхова (Белкина) Т. А., Ротарь В. И. Управления, асимптотически оптимальные по вероятности и почти наверное, в задаче о линейном регуляторе. — Автоматика и телемеханика, 1992, т. 53, № 6, с. 65–78.
6. Белкина Т. А., Ротарь В. И. Об условиях асимптотической оптимальности по вероятности и почти наверное в модели управляемого диффузионного процесса. — Автоматика и телемеханика, 1999, т. 60, № 2, с. 45–56.
7. Белкина Т. А., Кабанов Ю. М., Пресман Э. Л. О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 661–675.
8. Bhattacharia R. N. Asymptotic behavior of several-dimensional diffusions. — Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry, and Biology. Ed. by L. Arnold and R. Lefever. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1981, p. 86–99.
9. Borkar V. S. Optimal Control of Diffusion Processes. New York: Longman, 1989, 196 p.
10. Borkar V. S. A convex analytic approach to Markov decision processes. — Probab. Theory Related Fields, 1988, v. 78, № 4, p. 583–602.
11. Borkar V. S. Control of Markov chains with long-run average cost criterion. — Stochastic Differential Systems, Stochastic Control Theory and Applications (Minneapolis, 1986). New York: Springer-Verlag, 1988, p. 57–77.
12. Borkar V. S. Control of Markov chains with long-run average cost criterion: The dynamic programming equations. — SIAM J. Control Optim., 1989, v. 27, № 3, p. 642–657.
13. Carlson D. A., Haurie A. B., Leizarowitz A. Infinite Horizon Optimal Control: Deterministic and Stochastic Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1991, 332 p.
14. Chen H. F., Guo L. Optimal adaptive control and consistent parameter estimates for ARMAX-model with quadratic cost. — SIAM J. Control Optim., 1987, v. 25, № 4, p. 845–867.
15. Chow Y. S., Teicher H. Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales. New York: Springer-Verlag, 1997, 488 p.
16. Di Masi G. B., Kabanov Yu. M. On sensitive probabilistic criteria in the linear regulator problem with the infinite horizon. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1998, т. 5, в. 2, с. 410–422.
17. Евстигнеев И. В. Регулярные условные математические ожидания случайных величин, зависящих от параметров. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. 31, в. 3, с. 586–589.
18. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978, 316 с.
19. Гузман И. И., Скороход А. В. Управляемые случайные процессы. Киев: Наукова думка, 1977, 251 с.
20. Hall P., Heyde C. C. Martingale Limit Theory and its Application. New York–London: Academic Press, 1980, 308 p.
21. Hernández-Lerma O., Lasserre J. B. Further Topics on Discrete-time Markov Control Processes. New York: Springer-Verlag, 1999, 276 p.
22. Hinderer K. Foundations of non-stationary dynamic programming with discrete time parameter. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1970, 160 p.
23. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 445 с.
24. Karatzas I., Shreve S. I. Brownian Motion and Stochastic Calculus. New York: Springer-Verlag, 1991, 470 p.
25. Kertz R. P. Renewal plans and persistent optimality in countably additive gambling. — Math. Oper. Res., 1982, v. 7, № 3, p. 361–382.
26. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977, 625 с.
27. Leizarowitz A. Infinite horizon stochastic regulation and tracking with the overtaking criterion. — Stochastics, 1987, v. 22, № 2, p. 85–110.

28. *Leizarowitz A.* On almost sure optimization for stochastic control systems. — *Stochastics*, 1988, v. 23, № 2, p. 85–107.
29. *Leizarowitz A.* Overtaking and almost sure optimality for infinite horizon Markov decision processes. — *Math. Oper. Res.*, 1996, v. 21, № 1, p. 158–181.
30. *Lippman S.* Maximal average-reward controls for semi-Markov decision processes with arbitrary space and action space. — *Ann. Math. Statist.*, 1971, v. 42, p. 1717–1726.
31. *Лунцер П. Ш., Шуряев А. Н.* Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
32. *Mandl P.* Estimation and control in Markov chains. — *Adv. Appl. Probab.*, 1974, v. 6, № 1, p. 40–60.
33. *Mandl P.* The use of optimal stationary policies in the adaptive control linear systems. — *Proceedings of the Symposium to honour J. Neymann (Warsaw, 1974)*. Warsaw: PWN, 1977, p. 223–242.
34. *Mandl P.* Some results in the adaptive control of linear systems. — *Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes and of the Eight European Meeting of Statisticians (Prague, 1974)*. Vol. A. Ed. by J. Kozesnic. Dordrecht: Reidel, 1977, p. 399–410.
35. *Mandl P.* On the adaptive control of countable Markov chains. — *Probability Theory (Warsaw, 1976)* Warsaw: PWN, 1979, p. 159–173.
36. *Mandl P.* Asymptotic ordering of probability distributions for linear controlled systems with quadratic cost. — *Lecture Notes Control Inform. Sci.*, 1986, v. 78, p. 277–283.
37. *Mandl P., Ayllón M. R. R.* On controlled Markov processes with an average cost criterion. — *Kybernetika (Prague)*, 1987, v. 23, № 6, p. 433–442.
38. *Presman E., Rotar' V., Taksar M.* Optimality in probability and almost surely. The general scheme and a linear regulator problem. — *Stochastics Stochastics Rep.*, 1993, v. 43, № 3–4, p. 127–137.
39. *Пресман Э. Л.* Оптимальность почти наверное и по вероятности для стохастического линейно-квадратического регулятора. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, т. 42, в. 3, с. 627–632.
40. *Ротарь В. И.* О достаточных управлениях в динамической схеме стохастической оптимизации. — *Матем. заметки*, 1986, т. 40, № 4, с. 542–551.
41. *Ротарь В. И.* Некоторые замечания об асимптотической оптимальности. — *Исследования по вероятностным проблемам управления экономическими процессами*. М.: ЦЭМИ РАН, 1986, с. 93–116.
42. *Rotar' V. I.* Connectivity property and optimality almost surely and in probability. — *New Trends in Probability and Statistics (Bakuriani, 1980)*. Vol. 1. Ed. by V. Sazonov and T. Shervashidze. Utrecht/Vilnius: VSP/Mokslas, 1991, p. 528–539.
43. *Rotar' V. I.* *Probability Theory*. River Edge, NJ: World Scientific, 1997, 414 с.
44. *Shwartz A., Makowski A. M.* Comparing policies in Markov decision processes: Mandl's lemma revisited. — *Math. Oper. Res.*, 1990, v. 15, № 1, p. 155–174.
45. *Юшкевич А. А., Читашвили Р. Я.* Управляемые случайные последовательности и марковские цепи. — *Успехи матем. наук*, 1982, т. 37, № 6, с. 213–242.

Поступила в редакцию
8.IV.2003