Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Васильев, Г. М. Кошкин, Непараметрическая идентификация авторегрессий, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 3, 577–588

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:43:29

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 1998 г.

ВАСИЛЬЕВ В. А., КОШКИН Г. М. *

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ
АВТОРЕГРЕССИЙ¹⁾

Рассматривается задача построения вероятностных моделей процессов авторегрессионного типа, которая подразумевает оценивание неизвестных параметров процессов и построение на основе этих оценок одношаговых прогнозов наблюдений, а также восстановление предельной плотности распределения ошибок прогнозирования.

Ключевые слова и фразы: ядерные оценки плотности, зависимые наблюдения, авторегрессия, вероятностные модели, прогнозирование.

1. Введение и постановка задачи. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}, \mathbf{P})$ задан $\{\mathcal{F}_n\}$ -согласованный многомерный случайный процесс $x = (x(\lambda, n))_{n \geq 0}$, возможно зависящий от неизвестного векторного параметра $\lambda \in \mathcal{A} \subset \mathbf{R}^p$. Полная вероятностная модель процесса x может быть определена, согласно [1], [2], парой $(\hat{x}, f^e)$, где $\hat{x} = \{x(n | n-1)\}_{n \geq 1}$ — последовательность одношаговых прогнозов для x , а $f^e = \{f_n^e(t)\}_{n \geq 1}$ — последовательность условных относительно прошлого процесса x плотностей распределения (п.р.) ошибок предсказания (о.п.) $e(\lambda, n) = x(\lambda, n) - x(n | n-1)$. Так как последовательность f^e условных распределений о.п. $e(\lambda) = \{e(\lambda, n)\}_{n \geq 1}$ не всегда может быть найдена, представляют интерес способы предсказания $\hat{x}$, ошибки которых обладают свойством асимптотической стационарности. Если при этом последовательность условных п.р. f^e сходится к неслучайной п.р. $f(t)$ в каком-то вероятностном смысле, то по аналогии с [1], [2] можно дать следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1. Полной асимптотической вероятностной моделью (ПАВМ) типа T процесса x будем называть пару $(\hat{x}, \hat{f})_T$, где символ T означает тип сходимости, причем $T = ms$ соответствует сходимости в среднеквадратическом, а $T = as$ — сходимости п.н., $\hat{x}$ — последовательность одношаговых прогнозов процесса x , $\hat{f} = \{\hat{f}_N(t)\}_{N \geq 1}$ — последовательность оценок п.р. $f(t)$, сходящаяся в смысле T , где

$$f(t) \stackrel{T}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^e(t), \quad t \in \mathbf{R}^d. \quad (1)$$

Подобным образом могут быть определены частичные асимптотические вероятностные модели динамических систем, где вместо $\hat{f}$ рассматриваются оценки функционалов от предельного распределения $f(t)$ [3].

*Томский государственный ун-т, факультет прикладной математики и кибернетики, просп. Ленина, 36, 634050 Томск, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 98-01-00298 и 98-01-00296.

В данном разделе строятся оценки п.р. $f(t)$ при заданном способе прогнозирования $\hat{x}$ по наблюдениям последовательности о.п. $e(\lambda)$, представимым в виде

$$e(\lambda, n) = \varepsilon(n) + g_\lambda(n-1), \quad n \geq 1, \quad (2)$$

где $\varepsilon = \{\varepsilon(n)\}_{n \geq 1}$ и $g_\lambda = \{g_\lambda(n)\}_{n \geq 0}$ — согласованные с $\{\mathcal{F}_n\}$ последовательности ненаблюдаемых случайных векторов. Векторы $\varepsilon(n)$, $n \geq 1$, имеют смысл неустраняемых ошибок при прогнозировании $x(n)$ [1], [2].

Структура наблюдений (2) имеет место, например, в случае, когда процесс x удовлетворяет уравнению

$$x(n) = A(\lambda, n-1, x^{n-1}) + \varepsilon(n), \quad n \geq 1, \quad (3)$$

где $x^{n-1} = (x(0), \dots, x(n-1))'$, A — известная функция, λ — неизвестный векторный параметр. Пусть $\hat{\lambda} = \{\lambda(n)\}_{n \geq 0}$ — последовательность некоторых оценок λ . Для широкого класса распределений помех ε в качестве прогнозов $\hat{x}$ естественно использовать функции

$$x(n | n-1) = A(\lambda(n-1), n-1, x^{n-1}), \quad n \geq 1, \quad (4)$$

о.п. которых имеют структуру (2):

$$e(\lambda, n) = \varepsilon(n) + A(\lambda, n-1, x^{n-1}) - A(\lambda(n-1), n-1, x^{n-1}). \quad (5)$$

Различные статистические задачи для зависимых наблюдений типа (2) изучались в работах [3]–[8]. В частности, показано, что для линейных процессов регрессии и авторегрессии (3) с неизвестными параметрами и н.о.р. шумами ε можно восстановить функцию распределения шумов по наблюдениям $e(\lambda)$ (5).

Обозначим $f_n(t)$ плотность условного распределения $F_n(t) = P(\varepsilon(n+1) < t | \mathcal{F}_n)$. При этом, согласно (2), $f_n^e(t) = f_n(t - g_\lambda(n-1))$. В данной работе поставленная задача решается в таких предположениях относительно плотностей $f_n(\cdot)$ и свойств шумов g_λ , которые, как будет показано в дальнейшем, приводят к равенствам $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \stackrel{T}{=} f(t)$, $T = \text{ms, as}$.

Нетрудно видеть, что при условиях

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_\lambda(n)\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varepsilon_n\| = \sigma^2,$$

$$\|y\| = \sum_{j=1}^d y_j^2, \quad 0 < \sigma^2 < \infty,$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_\lambda(n)\| = 0 \quad \text{п.н.}, \quad (6)$$

справедливых для всех $\lambda \in \mathcal{A}$, прогнозы $\hat{x}$ (4) обладают, соответственно, свойствами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(n | n-1) - x(\lambda, n)\| = \sigma^2 \quad (7)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(n | n-1) - x(\lambda, n) - \varepsilon(n)\| = 0 \quad \text{п.н.} \quad (8)$$

В качестве оценки п.р. $f(t)$ (1) по зависимым наблюдениям $e(\lambda)$ (2) возьмем оценки ядерного типа

$$\hat{f}_N(t) = \frac{1}{Nh_N^s} \sum_{n=1}^N K\left(\frac{t - \varepsilon(n) - g_\lambda(n-1)}{h_N}\right), \quad N \geq 1, \quad (9)$$

где $K(\cdot)$ — ядерная функция, $h = \{h_N\}_{N \geq 1}$ — последовательность положительных чисел.

В следующих двух разделах изучаются свойства оценок (9) п.р. $f(t)$, которые позволяют использовать их при построении ПАВМ типа ms и as .

2. Сходимость в среднеквадратическом. Найдем точное асимптотическое выражение среднеквадратического отклонения (СКО) оценок (9) с улучшенной скоростью сходимости. Обозначим

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ h = \{h_N\}_{N \geq 1}: \lim_{N \rightarrow \infty} (h_N + (Nh_N^s)^{-1}) = 0 \right\},$$

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ h: \sum_{N \geq 1} (Nh_N^s)^{-2} < \infty \right\};$$

$f_{n,b}^{(k)}(t)$ — частные производные порядка k условной п.р. $f_n(t)$, $b = (\beta_1, \dots, \beta_s)'$, $\beta_1 + \dots + \beta_s = k$. Отсутствие нижнего индекса $b = (\beta_1, \dots, \beta_s)'$ у частных производных $f_b^{(k)}(t)$ и $f_{n,b}^{(k)}(t)$ будет означать, что набор индексов $\beta_1, \dots, \beta_s$ не фиксирован.

Обозначим $\beta(k)$ множество всевозможных векторов $b = (\beta_1, \dots, \beta_s)'$ с целочисленными неотрицательными компонентами $\beta_1, \dots, \beta_s$, для которых $\beta_1 + \dots + \beta_s = k$; $\langle f_N \rangle = N^{-1} \sum_{n=1}^N f_n$; $C, C_i, i = 1, 2, \dots$, — некоторые положительные постоянные.

О п р е д е л е н и е 2. (i) Последовательность случайных функций $\{f_n(t)\} \in \mathcal{H}_1(\nu)$, если для всех n функции $f_n(t)$ дифференцируемы ν раз на $\mathbb{R}^s$, причем существует конечный предел

$$\bar{f}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle E f_N(t) \rangle, \quad (10a)$$

для $i = 1, \dots, \nu$

$$\sup_N \left[f_N^{(i)}(t) \right]^2 \leq C, \quad (10b)$$

все частные производные порядка ν для всех $y \in \mathbb{R}^s$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной $\mathcal{L} > 0$ и показателем $0 < \gamma \leq 1$, т.е.

$$\sup_n \left| \rho_n(t, y) \right| \leq \mathcal{L} \|t - y\|^\gamma, \quad (10c)$$

$$\rho_n(t, y) = f_n^{(\nu)}(t) - f_n^{(\nu)}(y);$$

(ii) $\{f_n(t)\} \in \mathcal{H}_2(\nu)$, если $\{f_n(t)\} \in \mathcal{H}_1(\nu)$, для всех $b \in \beta(\nu)$ существуют пределы

$$\bar{f}_b^{(\nu)}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle E f_{N,b}^{(\nu)}(t) \rangle,$$

и при $N \rightarrow \infty$

$$\langle E (f_N(t) - f(t))^2 \rangle = o \left(h_N^{2\nu} + \frac{1}{Nh_N^s} \right), \quad (11a)$$

$$\max_{b \in \beta(\nu)} \langle E (f_{N,b}^{(\nu)}(t) - E f_{N,b}^{(\nu)}(t))^2 \rangle = o(1). \quad (11b)$$

Введем величины:

$$T_k = \int_{\mathbf{R}^s} u_1^{\alpha_1} \dots u_s^{\alpha_s} K(u) du, \quad \sum_{j=1}^s \alpha_j = k,$$

$$T^\nu = (T_1^\nu, \dots, T_s^\nu)', \quad T_j^\nu = \int_{\mathbf{R}^s} u_j^\nu K(u) du,$$

$$\omega_\nu(t) = \frac{1}{\nu!} \sum_{i=1}^s T_i^\nu \bar{f}_{b_i(\nu)}^{(\nu)}(t), \quad L = \int_{\mathbf{R}^s} K^2(u) du,$$

$b_i(\nu) = \nu(\delta_{i1}, \dots, \delta_{is})$, δ_{ij} — символы Кронекера.

О п р е д е л е н и е 3. Финитная функция $K(u) \in \Sigma_\nu$, $\nu \geq 2$ — четно, если она непрерывна на своем носителе, $\int_{\mathbf{R}^s} K(u) du = 1$, $T^\nu \neq 0$, $T_j = 0$ при $j = 1, \dots, \nu$, $\alpha_j < \nu$, $i = 1, \dots, s$.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть для всех $\lambda \in \mathcal{A}$ последовательности g_λ согласованы с системой $\{\mathcal{F}_n\}$. Тогда семейство последовательностей $g(\mathcal{A}) = \{g_\lambda, \lambda \in \mathcal{A}\} \in G(m, h)$, если при $N \rightarrow \infty$

$$\sup_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{E}_\lambda \|g_\lambda(N-1)\|^2 \rangle = o\left(\frac{1}{Nh_N^s}\right); \quad (12a)$$

$$\sup_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{E}_\lambda \|g_\lambda(N-1)\|^{2m} \rangle = o\left(\frac{1}{Nh_N^s}\right); \quad (12b)$$

$$\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \|g_\lambda(n)\|^m = 0. \quad (12c)$$

Здесь и далее $\sup_{\mathcal{A}} = \sup_{\lambda \in \mathcal{A}}$.

С помощью разложения Тейлора для $f_n^e(t)$ до порядка ν и условий (10b), (10c) и (12c) при $m = \nu + \gamma$ нетрудно установить, что

$$\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t).$$

Найдем точное асимптотическое выражение СКО с улучшенной скоростью сходимости для оценки (9) по наблюдениям (2).

Теорема 1. Если $\{f_n(t)\} \in \mathcal{N}_2(\nu)$ без выполнения условий (10a) и (11b), $K(u) \in \Sigma_\nu$, $\nu \geq 2$ — четно, $g(\mathcal{A}) \in G(\nu+1, h)$ без условия (12c), $h \in \mathcal{H}_1$, то при $N \rightarrow \infty$ для смещения b_N оценки $\hat{f}_N(t)$ имеем

$$\sup_{\mathcal{A}} |b_N - \omega_\nu(t) h_N^\nu| = o\left(h_N^\nu + \frac{1}{\sqrt{Nh_N^s}}\right); \quad (13)$$

при выполнении (10a) СКО $u^2(\hat{f})$ имеет порядок

$$\sup_{\mathcal{A}} u^2(\hat{f}) = O\left(h_N^{2\nu} + \frac{1}{Nh_N^s}\right); \quad (14)$$

если, кроме того, выполняется условие (11b), то справедливо точное асимптотическое равенство

$$\sup_{\mathcal{A}} \left| u^2(\hat{f}) - \frac{L\bar{f}(t)}{Nh_N^s} - \omega_\nu^2(t) h_N^{2\nu} \right| = o\left(h_N^{2\nu} + \frac{1}{Nh_N^s}\right). \quad (15)$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 работы [9].

Согласно (15) главная часть СКО оценки (9) имеет ту же структуру, что и в случае независимых наблюдений. Отсюда следует, в частности, что подобно тому, как это было сделано в работе [10], можно провести оптимизацию главной части СКО по h . Получаемая при этом оптимальная последовательность h^0 имеет порядок $N^{-(2\nu+s)^{-1}}$. Соответствующие асимптотические выражения типа (13)–(15) для смещения b_N и СКО $u^2(\hat{f}^0)$ оценки $\hat{f}^0 = \hat{f}|_{h=h^0}$ можно найти в [9].

3. Сходимость с вероятностью 1. Следующая теорема показывает, что оценки (9) п.р. $f(t)$ могут быть использованы при построении ПАВМ $(\hat{x}, \hat{f})_T$, $T = as$.

Теорема 2. Если $\{f_n(t)\} \in \mathcal{M}_1(\nu)$ и $\sup_{n,t} f_n(t) \leq C$ п.н., $K(u) \in \Sigma_\nu$, $\nu \geq 2$, $h \in \mathcal{H}_2$ и выполнено условие (6), то

$$|\hat{f}_N(t) - f(t)| = o(1) \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Заметим, что сходимость (6) и условия $\mathcal{M}_1(\nu)$ на п.р. $f_n(t)$ позволяют получить равенство $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ п.н.

Обозначим

$$\begin{aligned} r_N &= \frac{1}{Nh_N^s} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}_\lambda \left[K \left(\frac{t - \varepsilon(n) - g_\lambda(n-1)}{h_N} \right) \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{Nh_N^s} \sum_{n=1}^N \int_{\mathbf{R}^s} K \left(\frac{t - u - g_\lambda(n-1)}{h_N} \right) f_{n-1}(u) du; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\xi_n = K \left(\frac{t - \varepsilon(n) - g_\lambda(n-1)}{h_N} \right) - \int_{\mathbf{R}^s} K \left(\frac{t - u - g_\lambda(n-1)}{h_N} \right) f_{n-1}(u) du; \quad (17)$$

под $\Sigma_{\beta(k)}$ будем подразумевать суммирование по всем $b \in \beta(k)$; для вектора $t = (t_1, \dots, t_s)'$ положим $t^k = t_1^{\beta_1} \dots t_s^{\beta_s}$, $\beta_1 + \dots + \beta_s = k$ и $|k|! = \beta_1! \dots \beta_s!$; $\tilde{g}_n(z) = g_\lambda(n) + h_N z$.

Представим отклонение оценки (9) в виде $\hat{f}_N(t) - f(t) = r_N - f(t) + h_N^{-s} \langle \xi_N \rangle$. По определению r_N (16) и формуле Тейлора для f_n имеем

$$\begin{aligned} r_N - f(t) &= \left\langle \int_{\mathbf{R}^s} \left[f_{N-1}(t - \tilde{g}_{N-1}(z)) - f(t) \right] dz \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} \frac{(-1)^k}{|k|!} \sum_{\beta(k)} \int_{\mathbf{R}^s} K(z) \langle f_{N-1,b}^{(k)}(t) \tilde{g}_{N-1}^k(z) \rangle dz \\ &\quad + \frac{1}{|\nu|!} \sum_{\beta(\nu)} \int_{\mathbf{R}^s} K(z) \langle \rho_{N-1}(\zeta, t) \tilde{g}_{N-1}^\nu(z) \rangle dz + U_N, \end{aligned} \quad (18)$$

$$U_N = \langle u_{N-1} \rangle, \quad u_n = f_n(t) - f(t); \quad \zeta = t - \theta \tilde{g}_{n-1}(z), \quad 0 < \theta < 1.$$

Из условия (6) и представления (18) следует, что для всех $\lambda \in \mathcal{A}$ при $N \rightarrow \infty$

$$|r_N - f(t)| = o(1) \quad \text{п.н.}$$

Далее, ввиду ограниченности $f_n(t)$ процесс мартингал-разности $\{\xi_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ (17) ограничен и для всех $n \geq 1$, $N \geq 1$ обладает свойствами

$$\mathbb{E}_\lambda(\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0, \quad \mathbb{E}_\lambda(|\xi_n|^i | \mathcal{F}_{n-1}) \leq Ch_N^s, \quad i = 1, \dots, 4,$$

что позволяет получить оценку

$$E_{\lambda}(\hat{f}_N - r_N)^4 = h_N^{-4s} E_{\lambda}(\xi_N)^4 \leq \frac{C}{(Nh_N^s)^2}.$$

Отсюда по лемме Бореля–Кантелли и условиям $\mathcal{H}_2$ следует утверждение теоремы 2.

Следствие. При $2\nu \geq s$ имеет место сходимость для всех $\lambda \in \mathcal{A}$

$$|\hat{f}_N^0(t) - f(t)| = o(1) \quad \text{п.н.,}$$

поскольку в этом случае $h^0 \in \mathcal{H}_2$.

З а м е ч а н и е 1. Утверждения теорем 1 и 2 будут справедливы равномерно по $t \in \mathbf{R}^s$, если, например, условия для производных $f_n^{(k)}(t)$ в определении 2 выполняются равномерно по t .

З а м е ч а н и е 2. Результаты, подобные установленным в разделах 2 и 3 при $g_{\lambda} = 0$ получены в работе [11].

4. ПАВМ для процессов авторегрессии. В данном разделе построение вероятностных моделей проводится для скалярного процесса авторегрессии первого порядка и авторегрессии второго порядка специального вида, для которых могут быть найдены одноэтапные последовательные оценки параметров динамики [12], [13].

4.1. Авторегрессия первого порядка. Пусть $x = \{x_n\}_{n \geq 0}$ — устойчивый процесс авторегрессии

$$x_n = \lambda x_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \geq 1, \quad (19)$$

с неизвестным параметром λ , $|\lambda| < 1$. Предположим, что шумы $\{\varepsilon_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ образуют процесс мартингал-разность. Заметим, что уравнение (19) является частным случаем (3).

Для определения прогнозов значений x_n будем использовать оценки параметра λ , которые зададим формулами:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \text{proj}_{[-1,1]} \lambda_{k-1}^*, \quad \tau(k-1) \leq n < \tau(k), \quad n \geq 1, \quad k \geq 1, \\ \lambda_k^* &= k^{-\varphi} \sum_{n=1}^{\tau(k)} \beta_n(k) x_n x_{n-1}, \quad \lambda_0^* = 0, \\ \tau(k) &= \inf \left\{ t \geq 1: \sum_{n=1}^t x_{n-1}^2 \geq k^{\varphi} \right\}, \quad \tau(0) = 0, \quad \varphi > 0, \\ \beta_n(k) &= \begin{cases} 1, & n < \tau(k), \\ \beta_k, & n = \tau(k), \end{cases} \quad \beta_k = x_{\tau(k)-1}^{-2} \left(k^{\varphi} - \sum_{n=1}^{\tau(k)-1} x_{n-1}^2 \right). \end{aligned} \quad (20)$$

В качестве прогноза (4) значения x_n возьмем

$$x_{n|n-1} = \lambda_{n-1} x_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad (21)$$

откуда ошибки (5) прогноза (21) принимают вид

$$e(\lambda, n) = \varepsilon_n + g_{\lambda}(n-1) = \varepsilon_n + \Delta_{n-1} x_{n-1}, \quad (22)$$

$$\Delta_n = \lambda - \lambda_n.$$

Лемма 1. Пусть для шумов ε процесса (19) выполнено условие

$$\sum_{n \geq 1} P \left\{ \left| n^{-1} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 - \sigma_1^2 \right| \geq \delta \right\} < \infty, \quad 0 < \sigma_1^2 < \infty. \quad (23)$$

Тогда последовательные планы $(\tau(k), \lambda_k^*)$ оценивания параметра λ для $\theta \geq 1$ обладают при $k \rightarrow \infty$ следующими свойствами:

1. $\sup_{|\lambda| < 1} E_\lambda (\lambda_k^* - \lambda)^{2\theta} = O(k^{-\varphi\theta})$,
если $E x_0^2 < \infty$ и $E(\varepsilon_n^{2\theta} | \mathcal{F}_{n-1}) \leq C$ п.н. для всех $n \geq 1$;
2. $\sup_{|\lambda| < 1} E_\lambda \tau(k) = O(k^\varphi)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условия (23) и неравенств

$$\sum_{k=0}^n x_k^2 \geq \bar{c} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2, \quad n \geq 1, \quad (24)$$

$\bar{c} = \{3 - 2\sqrt{2}\}$, доказанных в лемме 1 работы [14], нетрудно показать расходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = \infty \quad \text{п.н.},$$

откуда следует конечность с вероятностью 1 моментов $\tau(k)$.

Из (19) и (20) находим уклонение оценок λ_k^* :

$$\lambda_k^* - \lambda = k^{-\varphi} \sum_{n=1}^{\tau(k)} \beta_n(k) x_{n-1} \varepsilon_n.$$

По c_r -неравенству, неравенствам Буркхольдера-Ганди [15] и Гёльдера, а также определению $\tau(k)$ имеем

$$\begin{aligned} E_\lambda (\lambda_k - \lambda)^{2\theta} &\leq C k^{-2\varphi\theta} \left[E_\lambda \left(\sum_{n=1}^{\tau(k)-1} x_{n-1} \varepsilon_n \right)^{2\theta} + E_\lambda \beta_k^{2\theta} x_{\tau(k)-1}^{2\theta} \varepsilon_{\tau(k)}^{2\theta} \right] \\ &\leq C k^{-2\varphi\theta} \left[E_\lambda \left(\sum_{n=1}^{\tau(k)-1} x_{n-1}^2 \varepsilon_n^2 \right)^\theta + k^{\varphi(\theta-1)} E_\lambda \sum_{n=1}^{\tau(k)} \beta_n(k) x_{n-1}^2 \varepsilon_n^{2\theta} \right] \\ &\leq C k^{-2\varphi\theta} \left[E_\lambda \sum_{n=1}^{\tau(k)-1} x_{n-1}^2 \varepsilon_n^{2\theta} \left(\sum_{n=1}^{\tau(k)-1} x_{n-1}^2 \right)^{\theta-1} \right. \\ &\quad \left. + k^{\varphi(\theta-1)} E_\lambda \sum_{n=1}^{\tau(k)} \beta_n(k) x_{n-1}^2 \varepsilon_n^{2\theta} \right] \\ &\leq C k^{-\varphi(\theta-1)} E_\lambda \sum_{n=1}^{\tau(k)} \beta_n(k) x_{n-1}^2 \varepsilon_n^{2\theta} \leq C k^{-\varphi\theta}. \end{aligned}$$

Для доказательства второго утверждения леммы заметим, что по неравенствам (24)

$$\tau(k) \leq \bar{\tau}(k), \quad k \geq 1,$$

где

$$\bar{\tau}(k) = \inf \left\{ n \geq 1: \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \geq \bar{c}^{-1} k^\varphi \right\}.$$

Согласно [16] и условиям на шумы ϵ справедлива оценка

$$E\tilde{\tau}(k) \leq Ck^\varphi, \quad k \geq 1,$$

и, следовательно, имеет место второе утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

Положим $\mathcal{A} = \{\lambda: |\lambda| \leq r\}$, $0 < r < 1$.

Лемма 2. Если выполнены все условия леммы 1 при $\theta = m+1$ и в определении $\tau(k)$ (20) величина $\varphi > m+1$, то для последовательностей g_λ , $\lambda \in \mathcal{A}$, определенных в (22), $g(\mathcal{A}) \in G(m, h)$, $m > 1$; при этом

$$1) \quad \sum_{n=1}^N E_\lambda g_\lambda^{2m}(n-1) = \begin{cases} O(\ln N) + O_\lambda(1), & m = 1, \\ O(1), & m > 1, \end{cases} \quad (25)$$

где $O_\lambda(1)$ — величина, зависящая от параметра λ процесса (19), такая, что $\sup_{\mathcal{A}} O_\lambda(1) = O(1)$;

2) выполнено условие (6).

Доказательство. Введем вспомогательные моменты

$$\sigma(N) = \inf \{k \geq 1: \tau(k) \geq N\}, \quad N \geq 1.$$

По определению (20) моментов $\tau(k)$ имеем оценку

$$\sum_{n=\tau(k-1)+1}^{\tau(k)-1} x_{n-1}^{2m} \leq \left(\sum_{n=\tau(k-1)+1}^{\tau(k)-1} x_{n-1}^2 \right)^m \leq (k^\varphi - (k-1)^\varphi)^m \leq Ck^{m(\varphi-1)},$$

откуда

$$\begin{aligned} B(m) &= \sum_{n=1}^N E_\lambda g_\lambda(n-1)^{2m} \\ &\leq CE_\lambda \left(\sum_{k=1}^{\sigma(N)} (\Delta_{k-1}^*)^{2m} \sum_{n=\tau(k-1)+1}^{\tau(k)-1} x_{n-1}^{2m} + \sum_{k=1}^{\sigma(N)} (\Delta_{k-1}^*)^{2m} x_{\tau(k)-1}^{2m} \right) \\ &\leq B_1(m) + B_2(m), \end{aligned}$$

$$B_1(m) = CE_\lambda \sum_{k=1}^{\sigma(N)} k^{m(\varphi-1)} (\Delta_{k-1}^*)^{2m}, \quad B_2(m) = E_\lambda \sum_{k=1}^{\sigma(N)} (\Delta_{k-1}^*)^{2m} x_{\tau(k)-1}^{2m}.$$

Зададим усеченные моменты останковки $\bar{\sigma}(N) = \min\{\sigma(N), T\}$, $0 < T < \infty$, и докажем вспомогательные равенства

$$\bar{B}_1(m) = E_\lambda \sum_{k=1}^{\bar{\sigma}(N)} k^{m(\varphi-1)} (\Delta_{k-1}^*)^{2m} = \begin{cases} O(\ln N) + O_\lambda(1), & m = 1, \\ O(1), & m > 1, \end{cases} \quad (26)$$

$$\bar{B}_2(m) = E_\lambda \sum_{k=1}^{\bar{\sigma}(N)} (\Delta_{k-1}^*)^{2m} x_{\tau(k)-1}^{2m} = O(1), \quad m \geq 1. \quad (27)$$

Заметим, что в условиях леммы последовательные оценки λ_k^* параметра λ обладают свойствами

$$\sup_{|\lambda| < 1} E_\lambda (\Delta_k^*)^{2(m+1)} = O(k^{-\varphi(m+1)}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Докажем (26). Согласно (28), неравенствам Коши–Буняковского и Чебышева, полагая $\chi(a \geq b) = \{1, a \geq b; 0, a < b\}$, находим

$$\begin{aligned} \bar{B}_1(1) &= \sum_{k=1}^N k^{\varphi-1} \mathbf{E}_{\lambda} (\Delta_{k-1}^*)^2 + \mathbf{E}_{\lambda} \sum_{k=N+1}^{\bar{\sigma}(N)} k^{\varphi-1} (\Delta_{k-1}^*)^2 \\ &\leq C \ln N + \sum_{k \geq N} k^{\varphi-1} \mathbf{E}_{\lambda} (\Delta_{k-1}^*)^2 \chi(\sigma(N) \geq k) \\ &\leq C \left(\ln N + \sum_{k \geq N} k^{-1} \mathbf{P}_{\lambda}^{1/2}(\sigma(N) \geq k) \right) \\ &\leq C \left(\ln N + \sum_{k \geq N} k^{-1} \mathbf{P}_{\lambda}^{1/2} \left(\sum_{n=1}^N x_{n-1}^2 > k^{\varphi} \right) \right) \\ &\leq C \left(\ln N + \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{E}_{\lambda} x_{n-1}^2 \right)^{1/2} \sum_{k \geq N} k^{-(1+\varphi/2)} \right) \\ &\leq C \left(\ln N + O_{\lambda}(1) N \sum_{k \geq N} k^{-(1+\varphi/2)} \right) \leq C \left(\ln N + O_{\lambda}(1) \sum_{k \geq N} k^{-\varphi/2} \right) \\ &= O(\ln N) + O_{\lambda}(1). \end{aligned}$$

Далее, для $m > 1$

$$\bar{B}_1(m) \leq \sum_{k \geq 1} k^{m(\varphi-1)} \mathbf{E}_{\lambda} (\Delta_{k-1}^*)^{2m} \leq C \sum_{k \geq 1} k^{-m} = O(1).$$

По неравенству Коши–Буняковского, (28) и лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} \bar{B}_2(1) &\leq C \mathbf{E}_{\lambda} \sum_{k=1}^{\sigma(N)} (\Delta_{k-1}^*)^2 \varepsilon_{\tau(k)-1}^2 \leq C \sum_{k \geq 1} k^{-\varphi} (\mathbf{E}_{\lambda} \varepsilon_{\tau(k)-1}^4)^{1/2} \\ &\leq C \sum_{k \geq 1} k^{-\varphi} \left(\mathbf{E}_{\lambda} \sum_{n=1}^{\tau(k)} \varepsilon_n^4 \right)^{1/2} \leq C \sum_{k \geq 1} k^{-\varphi} (\mathbf{E}_{\lambda} \tau(k))^{1/2} \leq C \sum_{k \geq 1} k^{-\varphi/2} = O(1). \end{aligned}$$

При оценивании $\bar{B}_2(m)$, $m \geq 1$, воспользуемся также неравенством Гёльдера и ограниченностью величин Δ_k^* :

$$\begin{aligned} \bar{B}_2(m) &\leq C \mathbf{E}_{\lambda} \sum_{k=1}^{\bar{\sigma}(N)} (\Delta_{k-1}^*)^{2m} \varepsilon_{\tau(k)-1}^{2m} \\ &\leq C \sum_{k \geq 1} \left[\mathbf{E}_{\lambda} (\Delta_{k-1}^*)^{2(m+1)} \right]^{1/(m+1)} \left[\mathbf{E}_{\lambda} \varepsilon_{\tau(k)-1}^{2(m+1)} \right]^{m/(m+1)} \\ &\leq C \sum_{k \geq 1} k^{-\varphi} \left(\mathbf{E}_{\lambda} \sum_{n=1}^{\tau(k)} \varepsilon_n^{2(m+1)} \right)^{m/(m+1)} \leq C \sum_{k \geq 1} k^{-\varphi} (\mathbf{E}_{\lambda} \tau(k))^{m/(m+1)} \\ &\leq C \sum_{k \geq 1} k^{-\varphi/(m+1)} = O(1). \end{aligned}$$

Соотношения (26) и (27) доказаны. Отсюда по теореме Фату получаем первое утверждение леммы 2 и, следовательно, свойство (6), поскольку согласно (25) при $m > 1$ по лемме Бореля–Кантелли $g_{\lambda,n} \rightarrow 0$ п.н. Лемма 2 доказана.

Из теорем 1, 2 и лемм 1, 2 непосредственно следует

Теорема 3. Пусть последовательность условных п.р. $\{f_n(t)\}$ шумов ε_n устойчивого процесса авторегрессии (19) принадлежит множеству $\mathcal{N}_2(\nu)$ и выполнены условия леммы 2 при $m = \nu + 1$. Тогда

1) пара $(\hat{x}, \hat{f})_{ms}$, определенная формулами (20)–(22), (9), задает ПАВМ процесса (19) типа ms, причем оценка (9) удовлетворяет соотношению (15), и для прогноза $\hat{x}$ имеет место равенство (7), если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varepsilon_n\| = \sigma^2$;

2) при $\{f_n(t)\} \in \mathcal{N}_1(\nu)$ и выполнении условия $\sup_{n, t} f_n(t) \leq C$ п.н. пара $(\hat{x}, \hat{f})_{as}$ задает ПАВМ процесса (19) типа as, для которой имеет место сходимость (8).

4.2. Двумерный процесс авторегрессии. Рассмотрим процесс

$$x = \{x(n)\}_{n \geq 1}, \quad x(n) = (x_1(n), x_2(n))',$$

описываемый уравнениями

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \lambda_1 x_1(n-1) + \lambda_2 x_2(n-1) + \varepsilon_1(n), \\ x_2(n) &= \lambda_2 x_1(n-1) - \lambda_1 x_2(n-1) + \varepsilon_2(n). \end{aligned} \quad (29)$$

Процесс авторегрессии предполагается устойчивым, т.е. $\|\lambda\| < 1$, шумы $\{\varepsilon(n), \mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ образуют мартингал-разность, независимую с $x(0)$ и $E x(0) = 0$, $\varepsilon(n) = (\varepsilon_1(n), \varepsilon_2(n))'$, параметр $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)'$ неизвестен.

Оценки параметра λ зададим по формулам

$$\lambda(n) = \underset{\|\lambda\| \leq 1}{\text{proj}} \lambda^*(k-1), \quad \tau(k-1) \leq n < \tau(k), \quad (30)$$

$$\lambda^*(k) = k^{-\varphi} \sum_{n=1}^{\tau(k)} \alpha(n) A'(n-1) x(n), \quad \lambda^*(0) = 0,$$

$$A(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ -x_2(n) & x_1(n) \end{bmatrix},$$

$$\tau(k) = \inf \left\{ t \geq 1: \sum_{n=1}^t \|x(n-1)\|^2 \geq k^\varphi \right\}, \quad \tau(0) = 1,$$

$$\alpha(n) = \begin{cases} 1, & n < \tau(k), \\ \alpha_k, & n = \tau(k), \end{cases} \quad \alpha_k = \left(k^\varphi - \sum_{n=1}^{\tau(k)-1} \|x(n-1)\|^2 \right) \|x(\tau(k)-1)\|^{-2}$$

и положим в качестве прогноза для $x(n)$

$$x(n | n-1) = \lambda(n-1) x(n-1), \quad n \geq 1,$$

откуда

$$e(\lambda, n) = \varepsilon(n) + \Delta(n-1) x(n-1) = \varepsilon(n) + g_\lambda(n-1),$$

$$\Delta(n) = \lambda - \lambda(n).$$

Для некоторого $0 < r < 1$ определим $\mathcal{A} = \{\lambda \in \mathbb{R}^2: \|\lambda\| \leq r\}$.

Лемма 3. Пусть

$$\sum_{n \geq 1} P \left\{ \left| n^{-1} \sum_{k=1}^n \|\varepsilon(k)\|^2 - \sigma_\varepsilon^2 \right| \geq \delta \right\} < \infty, \quad 0 < \sigma_\varepsilon^2 < \infty.$$

Тогда последовательные планы $(\tau(k), \lambda^*(k))$ оценивания параметра λ процесса (29), определенные в (30), обладают при $k \rightarrow \infty$ следующими свойствами:

1. $\sup_{\|\lambda\| < 1} E_{\lambda} \|\lambda^*(k) - \lambda\|^{2\theta} = O(k^{-\varphi\theta})$,
если $E \|x(0)\|^2 < \infty$ и $E (\|\varepsilon(n)\|^{2\theta} | \mathcal{F}_{n-1}) \leq C$ п.н. для всех $n \geq 1$;
2. $\sup_{\|\lambda\| < 1} E_{\lambda} \tau(k) = O(k^{\varphi})$.

Доказательство леммы 3 в целом повторяет доказательство леммы 1, поскольку уклонение оценок $\lambda^*(k)$, $k \geq 1$, представимо в виде

$$\lambda^*(k) - \lambda = k^{-\varphi} \sum_{n=1}^{\tau(k)} \alpha(n) A'(n-1) \varepsilon(n),$$

причем $\|A(n)\|^2 = 2\|x(n)\|^2$, а для процесса (29) при всех $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^n \|x(k)\|^2 \geq \bar{c} \sum_{k=1}^n \|\varepsilon(k)\|^2,$$

которое устанавливается аналогично лемме 1 работы [14] с использованием представления

$$\|x(n)\|^2 = \|\lambda\|^2 \|x(n-1)\|^2 + 2x'(n-1) A\varepsilon(n) + \|\varepsilon(n)\|^2, \quad n \geq 1,$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Из леммы 3 следует, что для процесса (29) справедливы утверждения леммы 2 и теоремы 3, в формулировках которых следует учесть двумерность вектора λ и процессов x и ε .

З а м е ч а н и е 3. Результаты раздела 4 могут быть перенесены на процессы авторегрессии произвольного порядка, если при прогнозировании использовать кусочно-постоянную последовательность регуляризованных оценок МНК параметров авторегрессии [3], построенных по типу [17]. Следует отметить, однако, что такой способ оценивания параметров авторегрессии приводит к существенному завышению требований на моменты распределений шумов процесса по сравнению с использованием последовательных оценок его параметров.

Авторы признательны рецензентам за полезные замечания, которые привели к улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991, 432 с.
2. Ljung L., Söderström T. Theory and Practice of Recursive Identification. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1983, 530 p.
3. Васильев В. А. Об идентификации динамических систем авторегрессионного типа. — Автоматика и телемеханика, 1997, № 12, с. 107–119.
4. Муганцева Л. А. Проверка нормальности в схемах одномерной и многомерной регрессии. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, в. 3, с. 603–614.
5. Болдин М. В. Оценка распределения возмущений в схеме авторегрессии. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 4, с. 805–810.
6. Васильев В. А. Об оценивании распределения возмущений процесса авторегрессии. — Матем. статист. и ее прил. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986, в. 10, с. 9–24.
7. Васильев В. А., Конев В. В. Об оценивании закона распределения возмущений процесса авторегрессии. — Proc. Fourth Int. Vilnius Conf. on Probability Theory

- and Mathematical Statistics, Abstracts of Communications, Vilnius, 1985, Part 1, p. 119–120.
8. Robinson P. M. Nonparametric Estimation from Time Series Residuals. — *Сак. Cent. etud. rech. oper.*, 1986, v. 28, № 1–3, p. 197–202.
 9. Васильев В. А., Кошкин Г. М. Оценивание функций от плотности распределения по зависимым наблюдениям. — *Проблемы передачи информации*, 1997, т. 33, в. 4, с. 45–60.
 10. Епанечников В. А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1969, т. XVI, в. 1, с. 156–161.
 11. Васильев В. А., Кошкин Г. М. Оценивание предельной плотности распределения и ее производных по наблюдениям с ослабевающей зависимостью. — *Проблемы передачи информации*, 1997, т. 33, в. 2, с. 66–80.
 12. Борисов В. З., Конев В. В. О последовательном оценивании параметров дискретных процессов. — *Автоматика и телемеханика*, 1977, № 10, с. 53–64.
 13. Воробейчиков С. Э., Конев В. В. О последовательной идентификации стохастических систем. — *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*, 1980, № 4, с. 176–182.
 14. Пергаменщиков С. М. Асимптотические свойства последовательного плана оценивания параметра авторегрессии первого порядка. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1991, т. 36, в. 1, с. 42–53.
 15. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
 16. Konev V. V., Lai T. L. Estimators with prescribed precision in stochastic regression models. — *Sequential Analysis*, 1995, № 14, p. 179–192.
 17. Кошкин Г. М. Моменты отклонений оценки подстановки и ее кусочно-гладких аппроксимаций. — *Сиб. матем. журн.*, 1998, т. 39, № 6.

Поступила в редакцию
9.IV.1998

© 1998 г.

ВЕЙС Ф.*, МИШУРА Ю. С.**

АТОМАРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ МАРТИНГАЛОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ¹⁾

Рассматриваются мартингалы с дискретным временем, принимающие значения в банаховой решетке X , которая имеет БМР-свойство (БМР — безусловность мартингалов разностей). Предполагается, что БМР-решетка X состоит из действительныхзначных функций. Введены два понятия максимального значения для таких мартингалов (в случае действительных мартингалов эти понятия совпадают между собой и с понятием обычного максимального значения), понятие квадратической вариации, соответствующие этим понятиям обычные и предсказуемые классы мартингалов пространств, и доказана эквивалентность этих классов. В

*Department of Numerical Analysis, Eötvös University, Muzeum krt., 6-8, H-1088 Budapest, Hungary; e-mail: weisz@ludens.elte.hu

**Киевский университет, механико-математический факультет, Владимирская 64, 252601 Киев-33, Украина; e-mail: mishura@math.carrier.kiev.ua

¹⁾Работа выполнена при поддержке Фольксваген-Штифтунг (программа совместных исследований в Обервольфахе), Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Lorenzenhof D-77709 Oberwolfach-Walke.