Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Фельдман, К характеристике гауссовских распределений на абелевых группах постоянством регрессии, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 3, 606–610

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:26:20

6. Копытцев В. А. О распределении числа решений случайных заведомо совместных систем уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 430–437.
7. Мизайлов В. Г. Предельные теоремы для случайного покрытия конечного множества и для числа решений системы случайных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 2, с. 272–283.
8. Копытцев В. А. О некоторых случайных заведомо совместных системах уравнений. — Обзорение прикл. промышл. матем., сер. дискретн. матем., 1994, т. 1, в. 1, с. 56–84.
9. Полин С. В. О случайных блужданиях на графе с отмеченным ребром. — Обзорение прикл. промышл. матем., сер. дискретн. матем., 1994, т. 1, в. 1, с. 85–92.
10. Мизайлов В. Г. Асимптотическая нормальность логарифма числа прообразов выходной последовательности конечного автомата. — Обзорение прикл. промышл. матем., сер. дискретн. матем., 1994, т. 1, в. 1, с. 126–135.
11. Зубков А. М. Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями. — Матем. сб., 1979, т. 109 (151), № 4 (11), с. 491–532.
12. Мизайлов В. Г. Явные оценки в предельных теоремах для сумм случайных индикаторов. — Обзорение прикл. промышл. матем., сер. вероятн. и статист., 1994, т. 1, в. 4, с. 580–617.

Поступила в редакцию
3.XII.1997

© 1998 г.

ФЕЛЬДМАН Г. М.*

К ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ГАУССОВСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ ПОСТОЯНСТВОМ РЕГРЕССИИ¹⁾

В заметке полностью описаны локально компактные абелевы группы X , на которых возможна характеристика гауссовского распределения постоянством регрессии.

Ключевые слова и фразы: локально компактная абелева группа, гауссовское распределение, регрессия.

В одной из первых работ, посвященных характеристическим задачам математической статистики на группах, А. Л. Рухин, изучая групповой аналог известной теоремы С. Н. Бернштейна о характеристике гауссовского распределения независимостью суммы и разности независимых случайных величин, установил, что для некоторого класса групп возможна характеристика гауссовского распределения в терминах постоянства регрессии (см. [1]).

В настоящей заметке мы дадим полное описание класса локально компактных абелевых групп, для которых эта характеристика имеет место.

Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, $Y = X^*$ — ее группа характеров, (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$, $M^1(X)$ — множество вероятностных распределений на группе X , $\hat{\mu}(y)$ — характеристическая функция распределения $\mu \in M^1(X)$.

*Физико-технический институт низких температур АН Украины, просп. Ленина, 47, 310164 Харьков, Украина.

¹⁾Работа выполнена при поддержке INTAS-96-0858.

Если H — замкнутая подгруппа группы Y , то обозначим через $A(X, H) = \{x \in X: (x, y) = 1 \text{ для любых } y \in H\}$ ее аннулятор. Для каждого натурального n обозначим через $f_n: X \rightarrow X$ гомоморфизм, определяемый формулой $f_n(x) = nx$. Положим $X^{(n)} = \text{Im } f_n$.

Обозначим через T группу вращений окружности, а через Z — группу целых чисел.

Распределение $\mu \in M^1(X)$ называется гауссовским, если его характеристическая функция представима в виде

$$\hat{\mu}(y) = (x, y) \exp\{-\varphi(y)\},$$

где $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y , удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(y_1 + y_2) + \varphi(y_1 - y_2) = 2[\varphi(y_1) + \varphi(y_2)], \quad y_1, y_2 \in Y. \quad (1)$$

Обозначим через $\Gamma(X)$ множество гауссовских распределений на группе X .

Распределение $\mu \in M^1(X)$ называется гауссовским в смысле Бернштейна, если из того, что ξ и η — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ , следует, что случайные величины $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$ независимы.

Обозначим через $\Gamma_B(X)$ множество гауссовских распределений в смысле Бернштейна на группе X .

Распределение $\mu \in \Gamma_B(X)$ тогда и только тогда, когда его характеристическая функция $\hat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\mu}(y_1 + y_2)\hat{\mu}(y_1 - y_2) = \hat{\mu}(y_1)^2 |\hat{\mu}(y_2)|^2, \quad y_1, y_2 \in Y.$$

Обозначим через m_K распределение Хаара компактной подгруппы K группы X . Тогда

$$\hat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, & y \in A(Y, K), \\ 0, & y \notin A(Y, K). \end{cases}$$

Целью настоящей заметки является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$, $n \geq 2$, — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ . Для того, чтобы из условия постоянства регрессии

$$E \left[\prod_{j=1}^n (\xi_j, y_j) \mid \sum_{j=1}^n \xi_j \right] = \text{const}, \quad (2)$$

выполненного при всех $y_1, \dots, y_n$ таких, что $\sum_{j=1}^n y_j = 0$, $y_j \in Y$, следовало, что $\mu = \gamma * m_K$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, а K — некоторая компактная подгруппа в X , удовлетворяющая условию $K^{(n)} = K$, необходимо и достаточно, чтобы группа X удовлетворяла условию:

(α) для любой компактной подгруппы K в X такой, что $K^{(n)} = K$, фактор-группа X/K не содержит подгруппы, топологически изоморфной T^2 .

Заметим, что если $\mu = \gamma * m_K$, то распределение μ инвариантно относительно некоторой компактной подгруппы $K \subset X$ и μ при естественном гомоморфизме $X \rightarrow X/K$ индуцирует на фактор-группе X/K гауссовское распределение.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, заметим, что так же, как и в классической ситуации (см. [2, §1.13]), условие постоянства регрессии (2) эквивалентно условию

$$E \left[\prod_{j=1}^n (\xi_j, y_j) \left(\sum_{j=1}^n \xi_j, y \right) \right] = E \left[\left(\sum_{j=1}^n \xi_j, y \right) \right] E \left[\prod_{j=1}^n (\xi_j, y_j) \right],$$

которое можно переписать в виде

$$\prod_{j=1}^n f(y + y_j) = f^n(y) \prod_{j=1}^n f(y_j), \quad y_1, \dots, y_n, y \in Y, \sum_{j=1}^n y_j = 0, \quad (3)$$

где $f(y) = \tilde{\mu}(y) = E[(\xi_j, y)]$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Решения этого функционального уравнения мы и будем изучать.

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Рассмотрим множество $N = \{y \in Y: f(y) \neq 0\}$. Полагая в (3) $y_2 = -y_1, y_3 = \dots = y_n = 0$, получаем

$$f(y + y_1) f(y - y_1) f^{n-2}(y) = f^n(y) |f(y_1)|^2. \quad (4)$$

Отсюда следует, что N — открытая подгруппа в Y , поэтому $K = A(X, N)$ — компактная подгруппа в X . Полагая затем в (3) $y_1 = \dots = y_{n-1} = -y$, $y_n = (n-1)y$, получаем

$$f(ny) = f^n(y) f^{n-1}(-y) f((n-1)y),$$

откуда следует, что если $ny \in N$, то $y \in N$. Поэтому $K^{(n)} = K$ (см. [3, § 9.3]).

Рассмотрим сужение уравнения (4) на N . Имеем тогда

$$f(y + y_1) f(y - y_1) = f^2(y) |f(y_1)|^2, \quad y_1, y_2 \in N.$$

Это означает, что сужение характеристической функции $f(y)$ на N является не обращающейся в нуль характеристической функцией гауссовского распределения в смысле Бернштейна на фактор-группе X/K , и из (а), как доказано в [3, § 9.8], следует, что это сужение является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения γ_0 . Имеем, таким образом,

$$\hat{\gamma}_0(y) = ([x_0], y) \exp\{-\varphi_0(y)\}, \quad y \in N,$$

где $[x_0] \in X/K$, а функция $\varphi_0(y)$ такая же, как в (1). Как известно (см., например, [4, § 5.2]), функцию $\varphi_0(y)$ можно продолжить с сохранением ее свойств до функции $\varphi(y)$ на Y . Рассмотрим распределение $\gamma \in \Gamma(X)$ с характеристической функцией $\hat{\gamma}(y) = (x_0, y) \exp\{-\varphi(y)\}$. Тогда, очевидно, $f(y) = \hat{\gamma}(y) \hat{m}_K(y)$, а значит, $\mu = \gamma * m_K$. Достаточность доказана.

Для доказательства необходимости нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. Пусть K — компактная подгруппа группы X . Тогда характеристическая функция $\hat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (3) в том и только том случае, когда $K^{(n)} = K$.

Доказательство. Заметим, что $N = \{y \in Y: \hat{m}_K(y) \neq 0\} = A(Y, K)$. Поэтому, если характеристическая функция $\hat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (3), то, как отмечено при доказательстве достаточности, из $ny \in N$ следует, что $y \in N$, и поэтому $K^{(n)} = K$.

Обратно. Пусть $K^{(n)} = K$, тогда если $ny \in N$, то $y \in N$. Подставим $\hat{m}_K(y)$ в (3). Проверим, что характеристическая функция $\hat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (3). Очевидно, что если правая часть уравнения (3) равна 1, то и левая часть также равна 1. Если же левая часть в (3) равна 1, то это значит, что $y + y_1, \dots, y + y_n \in N$. Тогда $\sum_{j=1}^n (y + y_j) = ny \in N$, а поэтому $y \in N$, следовательно, и $y_1, \dots, y_n \in N$, т.е. правая часть в (3) также равна 1. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. На группе $X = T^2$ существует негауссовское распределение μ_0 с не обращающейся в нуль характеристической функцией, удовлетворяющей уравнению (3).

Доказательство. Элементы группы $Y = (T^2)^* \approx Z^2$ будем обозначать через (p, q) . Легко видеть, что функция

$$l_0(p, q) = \exp\{i\pi pq\}$$

на группе Z^2 удовлетворяет уравнению (3). Выберем a так, чтобы

$$\sum_{(p, q) \in Z^2} \exp\{-a(p^2 + q^2)\} < 2,$$

и рассмотрим на группе T^2 функцию

$$\rho(t, s) = \sum_{(p, q) \in Z^2} l_0(p, q) \exp\{-a(p^2 + q^2) - i(pt + qs)\}.$$

По построению $\rho(t, s) > 0$. Пусть μ_0 — распределение на T^2 с плотностью ρ относительно m_{T^2} . Тогда

$$\hat{\mu}_0(p, q) = l_0(p, q) \exp\{-a(p^2 + q^2)\}.$$

Так как функция $l_0(p, q)$ не является характером группы Z^2 , то $\mu_0 \notin \Gamma(T^2)$. Поскольку характеристическая функция любого гауссовского распределения, как легко видеть, удовлетворяет уравнению (3), то уравнению (3) удовлетворяет и характеристическая функция $\hat{\mu}_0(p, q)$. Лемма 2 доказана.

Докажем теперь необходимость в теореме 1. Пусть K — компактная подгруппа в группе X такая, что $K^{(n)} = K$, и фактор-группа X/K содержит подгруппу, топологически изоморфную T^2 . Построенное в лемме 2 распределение μ_0 можно рассматривать как распределение на фактор-группе X/K . Рассмотрим на группе Y функцию

$$f(y) = \begin{cases} \hat{\mu}_0(y), & y \in A(Y, K), \\ 0, & y \notin A(Y, K). \end{cases}$$

Так как группа K компактна, то ее аннулятор $A(Y, K)$ — открытая подгруппа в Y , и, следовательно, функция $f(y)$ непрерывна. Легко проверить также, что из положительной определенности функции $\hat{\mu}_0(y)$ следует, что функция $f(y)$ также положительно определена. Поэтому по теореме Бохнера $f(y) = \hat{\nu}(y)$, где ν — некоторое распределение на X . Леммы 1 и 2 показывают, что функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению (3). С другой стороны, поскольку $\mu_0 \notin \Gamma(T^2)$, то распределение ν нельзя представить в виде свертки $\gamma * m_G$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, а G — некоторая компактная подгруппа в X . Теорема 1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из известной теоремы Крамера о разложении гауссовского распределения на вещественной прямой легко следует, что гауссовское распределение в R^n однозначно с точностью до сдвига и центральной симметрии определяется модулем своей характеристической функции. Построенное в лемме 2 распределение μ_0 показывает, что на группе T^2 аналогичное утверждение не верно.

Пусть γ_0 — гауссовское распределение на группе T^2 с характеристической функцией

$$\hat{\gamma}_0(p, q) = \exp\{-a(p^2 + q^2)\}.$$

Распределение μ_0 дает пример гауссовского в смысле Бернштейна, но не гауссовского распределения, имеющего тот же, что и γ_0 , модуль характеристической функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рухин А. Л. Некоторые статистические и вероятностные задачи на группах. — Труды Матем. ин-та АН СССР, 1970, т. 11, с. 52–109.
2. Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972, 656 с.
3. Фельдман Г. М. Арифметика вероятностных распределений и характеризационные задачи на абелевых группах. Киев: Наукова думка, 1990, 168 с.
4. Хейер Х. Вероятностные меры на локально компактных группах. М.: Мир, 1981, 702 с.

Поступила в редакцию
29.IX.1997

© 1998 г.

QUAS A. N.*

AN ENTROPY ESTIMATOR FOR A CLASS OF INFINITE ALPHABET PROCESSES

Отправляясь от тематики работ Контоянниса и Сухова, а также Шилдса (P. Shields), мы предлагаем оценку энтропии, которая работает для класса эргодических символьных процессов с конечной энтропией и счетным числом состояний, для которых энтропия разбиения в начальный момент времени конечна и которые удовлетворяют «условию Дёблина». Результаты затем распространяются на случайные поля, индексированные элементами из $\mathbb{Z}^d$.

Ключевые слова и фразы: оценка энтропии, префиксы.

Introduction. In this paper, we consider the problem of estimation of the entropy of a sequence of data, by only looking at a finite portion (the reader is referred to [12] for definitions etc.). Since the entropy is a measure of the information content of a sequence of data, there are practical reasons for wanting to measure entropy. There are a number of techniques available for estimation of entropy, but the drawbacks in general are that it is hard to prove that the estimators converge to the true value of the entropy, or that one requires an extremely large amount of data to compute an estimate. In general, if we consider the sequence of data to be random variables indexed by $\mathbb{Z}$ taking values in a finite or countable set S , the entropy is much harder to compute if the random variables have long-range dependence. The method presented below is proven to work, is able to deal with systems having long-range dependence (although for any estimator, the longer the range, the more terms will be needed to get a reliable estimate) and can work with a relatively small amount of data.

Let $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ be a stationary ergodic stochastic process taking values in a countable set S . Let μ be the induced probability measure on $S^{\mathbb{Z}}$. Throughout this paper, we will need to make the assumption that the time-zero partition $\mathcal{P}$ into sets of the form $[s] = \{x: x_0 = s\}$ has finite entropy (i.e., $H(\mathcal{P}) \equiv \sum_{s \in S} -\mu([s]) \log \mu([s]) < \infty$). Under this condition, it follows that the entropy of the process is finite (see [12]). Write h for the entropy of the process.

*Department of pure mathematics and mathematical statistics, University of Cambridge, 16 Mill Lane, Cambridge, CB2 1SB, England; e-mail: A. Quas@statslab.cam.ac.uk.