Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Богачев, А. В. Колесников, Нелинейные преобразования выпуклых мер, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 1, 27–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 11:28:38

© 2005 г.

БОГАЧЕВ В. И.*, КОЛЕСНИКОВ А. В.*

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫПУКЛЫХ МЕР¹⁾

Показано, что для заданных равномерно выпуклой меры μ на $\mathbf{R}^\infty$, эквивалентной своему сдвигу на вектор $(1, 0, 0, \dots)$, и вероятностной меры ν , абсолютно непрерывной относительно μ , найдется борелевское отображение $T = (T_k)_{k=1}^\infty$ пространства $\mathbf{R}^\infty$, переводящее меру μ в ν и имеющее вид $T(x) = x + F(x)$, где F принимает значения в l^2 . Более того, если мера μ есть произведение мер, то T может быть выбрано треугольным в том смысле, что каждая компонента T_k является функцией от $x_1, \dots, x_k$. Кроме того, для всякой равномерно выпуклой меры μ на $\mathbf{R}^\infty$ и всякой вероятностной меры ν с конечной энтропией $\text{Ent}_\mu(\nu)$ относительно μ каноническое треугольное отображение $T = I + F$, переводящее μ в ν , удовлетворяет неравенству $\|F\|_{L^2(\mu, l^2)}^2 \leq C(\mu) \text{Ent}_\mu(\nu)$. Доказано несколько обратных утверждений. Полученные результаты применимы, в частности, к стандартной гауссовской произведению мер. В качестве применения дано новое достаточное условие абсолютной непрерывности нелинейного образа выпуклой меры и принадлежности соответствующей производной Радона–Никодима к классу $L \ln L$.

Ключевые слова и фразы: выпуклая мера, гауссовская мера, произведение мер, пространство Камерона–Мартина, абсолютная непрерывность, треугольное отображение.

При изучении нелинейных преобразований мер на бесконечномерных пространствах (обзор современных исследований имеется в [1]–[4]) важную роль играет исследование отображений, представляющих собой возмущения тождественного отображения. Фундаментальная проблема — абсолютная непрерывность индуцированных мер. Особенно важно иметь явные выражения или оценки для энтропии соответствующих плотностей Радона–Никодима. Здесь с этой точки зрения рассматриваются преобразования выпуклых мер.

Пусть $X = \mathbf{R}^\infty$ — пространство всех вещественных последовательностей $x = (x_n)$, наделенное его естественной топологией произведения и соответствующей борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(X)$, и пусть $H = l^2$ наделено обычной гильбертовой нормой $|h|_H := (\sum_{n=1}^\infty h_n^2)^{1/2}$. Для заданных

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ 04-01-00748, гранта НШ 1758.2003.1, гранта DFG 436 RUS 113/343/0(R) и проекта INTAS 03-51-5018.

борелевской меры μ на X и μ -измеримого отображения T на X обозначим через $\mu \circ T^{-1}$ образ μ относительно T , т.е. $\mu \circ T^{-1}(B) = \mu(T^{-1}(B))$ для всех $B \in \mathcal{B}(X)$. Борелевская вероятностная мера μ на X , являющаяся произведением счетного числа экземпляров вероятностной меры σ на прямой, называется продакт-мерой. Когда σ есть стандартная гауссовская мера, будем называть μ стандартной гауссовской продакт-мерой. Хорошо известно, что при широких предположениях относительно σ сдвинутая мера $\mu_h(B) = \mu(B - h)$ эквивалентна μ при $h \in l^2$ и взаимно сингулярна с μ в противном случае (см. [5]). Более того, во многих случаях μ эквивалентна своим образом при нелинейных отображениях вида

$$T(x) = x + F(x), \quad F: X \rightarrow H, \quad (1)$$

при широких предположениях относительно F . Случай, когда σ — гауссовская мера, изучен особенно хорошо. Классические результаты Камерона и Мартина, Маруямы, Прохорова, Скорохода и Гирсанова (см. ссылки в [2]) дают широкие достаточные условия, при которых преобразование винеровского пространства $C[0, 1]$ посредством нелинейного интегрального уравнения

$$Tw(t) := x(t) = w(t) + \int_0^t \sigma(x(s)) ds$$

переводит меру Винера в эквивалентную. В случае меры Винера пространство Камерона–Мартина H состоит из абсолютно непрерывных функций x с $x(0) = 0$ и $x' \in L^2[0, 1]$, поэтому такие преобразования также имеют вид (1). Хотя преобразования указанного вида — не единственные, при которых образ μ абсолютно непрерывен (например, есть много автоморфизмов μ не такого вида), естественно спросить, какие меры ν могут быть получены как $\mu \circ T^{-1}$ с отображением T вида (1). Меры $\nu \ll \mu$ с таким свойством названы представимыми в [4, определении 2.7.1] (где рассмотрен гауссовский случай). Заметим, что даже в гауссовском случае условие $F(X) \subset H$ не гарантирует, что $\mu \ll \nu$. Ниже доказано, что если μ входит в класс равномерно выпуклых мер (включающий стандартную гауссовскую продакт-меру), то всякая вероятностная мера $\nu \ll \mu$ является образом μ при отображении T вида (1) (причем треугольном для продакт-мер), т.е. представима в смысле Устюнеля и Закая. Более того, при некоторых дополнительных, не очень ограничительных предположениях отображение T может быть выбрано треугольным с тем свойством, что $|F|_H \in L^2(\mu)$ и каждая его компонента T_k возрастает по x_k . Наконец, дано достаточное условие на отображение T вида (1), гарантирующее, что мера $\nu = \mu \circ T^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно μ . Это условие также и необходимо для возрастающих треугольных отображений и мер ν с конечной энтропией $\text{Ent}_\mu(\nu)$. Напомним, что в случае, когда $\nu \ll \mu$ и $f := d\nu/d\mu$, энтропия $\text{Ent}_\mu(\nu)$

определяется равенством

$$\text{Ent}_\mu(\nu) := \text{Ent}_\mu(f) := \int f \ln f d\mu.$$

Основными результатами являются теоремы 1, 3 и 4. Отметим, что эти результаты оказываются новыми также и для гауссовских мер и обобщают известные ранее утверждения со значительно более короткими и элементарными доказательствами. В значительной мере они являются применениями к бесконечномерному случаю методов, развитых в наших работах [7]–[10]. Основные результаты этой статьи были опубликованы в [6].

Через $W_{\text{loc}}^{p,r}(\mathbf{R}^n)$, где $p \geq 1$ и $r \in \mathbf{N}$, обозначается соболевский класс функций на $\mathbf{R}^n$, которые вместе с обобщенными частными производными до порядка r входят в $L^p(U)$ для каждого шара U .

Определитель Фредгольма–Карлемана $\det_2 A$ оператора A на $\mathbf{R}^n$ задается равенством

$$\det_2 A = \exp(\text{trace}(I - A)) \det A,$$

где I — единичный оператор. Норма Гильберта–Шмидта оператора A на сепарабельном гильбертовом пространстве H обозначается через $\|A\|_{\mathcal{H}}$, а его операторная норма — через $\|A\|_{L(H)}$. Пространство всех операторов Гильберта–Шмидта на H с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ обозначается через $\mathcal{H}$. Для операторов вида $I + A$, где A — оператор Гильберта–Шмидта на H , также вводится определитель Фредгольма–Карлемана $\det_2(I + A)$. Для этого оператор A приближается по норме Гильберта–Шмидта конечномерными операторами $A_n = P_n A P_n$, где P_n — проекция на линейную оболочку первых n базисных векторов в H , а затем проверяется, что последовательность чисел $\det_2(I + A_n)$ фундаментальна.

Отображение $T = (T_k)_{k=1}^\infty: X \rightarrow X$ называется треугольным, если каждая его компонента T_k есть функция от $x_1, \dots, x_k$: $T_k(x) = T_k(x_1, \dots, x_k)$. Ниже все пространства $\mathbf{R}^k$ рассматриваются как подпространства в X . Такое отображение называется возрастающим, если функция $x_k \mapsto T_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k)$ является возрастающей для всех фиксированных $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \mathbf{R}^{k-1}$. Треугольные отображения обеспечивают простой и конструктивный способ преобразования одной заданной меры в другую. Такие отображения изучались, например, в [11]–[13]. В частности, Талагран [12] доказал, что если μ есть стандартная гауссовская мера на $\mathbf{R}^n$ и вероятностная мера $\nu \ll \mu$ такова, что величина $\text{Ent}_\mu(\nu)$ конечна, то существует такое возрастающее треугольное отображение T , что $\nu = \mu \circ T^{-1}$ и

$$\int |T(x) - x|^2 \mu(dx) \leq 2 \text{Ent}_\mu(\nu). \quad (2)$$

Неравенство Талагранна (2) обобщалось несколькими авторами, см. [14], [15]. Очень интересные связи этого неравенства с проблемой переноса масс (см., например, [16]) обсуждаются в [17]–[20]. В частности, с использованием оценки (2) в [19] показано, что если μ — стандартная гауссовская продукт-мера и вероятностная мера $\nu \ll \mu$ имеет конечную энтропию, то можно найти такое отображение T вида (1), что $\nu = \mu \circ T^{-1}$, выполняется оценка (2) и $F = \nabla_{\mu} \psi$ для некоторой функции ψ из соболевского класса $W^{2,1}(\mu)$. Ферник [17] доказал, что для всякой вероятностной меры $\nu \ll \mu$ найдутся такие автоморфизм U меры μ и отображение $F: X \rightarrow H$, что $\nu = \mu \circ (U + F)^{-1}$. Однако U может не иметь вида (1). В недавних работах [7]–[9] обобщение результата Талагранна получено в виде равенства (обобщающего тождество, установленное Талаграном в одномерном случае) для пары отображений. Напомним этот результат (в случае одного отображения), поскольку он будет использоваться в некоторых наших доказательствах. Введем необходимые обозначения. Если даны положительная функция $\psi \in C^2(\mathbf{R}^n)$ и два вектора v_1 и v_2 , то определим оператор

$$\Lambda[\psi, v_1, v_2] = \int_0^1 s D^2[-\ln \psi]((1-s)v_1 + sv_2) ds,$$

где D^2 — вторая производная. Этот оператор определен и в более общем случае, когда функция ψ имеет вид $\psi(x) = \exp[-V(x)]$, где V входит в соболевский класс $W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbf{R}^n)$. Если $\psi(x) = \exp(-|x|^2/2)$, то $\Lambda = I/2$.

Предположим, что μ — вероятностная мера на $\mathbf{R}^n$ с плотностью $\exp(-\Phi)$, где $\Phi \in C^2$ и $T = (T_1, \dots, T_n) = I + F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $F = (F_1, \dots, F_n)$, — такое локально липшицево биективное отображение, что $\det DT(x) > 0$ п.в. Тогда мера $\nu := \mu \circ T^{-1}$ имеет плотность f относительно μ . Предположим, кроме того, что

$$\partial_{x_i} T_i, \quad \ln \det DT, \quad \partial_{x_i} \Phi \cdot F_i \in L^1(\mu),$$

причем величина $\text{Ent}_{\mu}(\nu)$ конечна. Тогда, согласно [8], [9], имеем

$$\begin{aligned} \text{Ent}_{\mu}(\nu) &= \int_{\mathbf{R}^n} \left(\Lambda[\exp(-\Phi), T(x), x] F(x), F(x) \right) \mu(dx) \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}^n} \ln \det_2 DT(x) \mu(dx). \end{aligned} \quad (3)$$

Нам понадобится следующая модификация этого результата, указанная в [9]: предположение, что T локально липшицево, можно заменить включением $T \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ при условии, что выполняется равенство $f \circ T \exp(-\Phi \circ T) \det DT = \exp(-\Phi)$ п.в.

Если μ — стандартная гауссовская мера на $\mathbf{R}^n$, то (3) превращается в

$$\text{Ent}_{\mu}(\nu) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^n} |F(x)|^2 \mu(dx) - \int_{\mathbf{R}^n} \ln \det_2(I + DF(x)) \mu(dx). \quad (4)$$

Это можно усмотреть также из формулы для плотности Радона-Никодима:

$$f(x) = \frac{1}{\Lambda_F(T^{-1}(x))}, \quad \Lambda_F = \det_2(I + DF) \exp\left(\delta F - \frac{1}{2}|F|^2\right), \quad (5)$$

где δF — дивергенция F относительно μ , т.е. $\delta F(x) = \text{trace } DF(x) - (F(x), x)$. В самом деле, по формуле замены переменных

$$\text{Ent}_\mu(f) = \int \ln f(T(x)) \mu(dx) = \int \left[-\ln \det_2(I + DF) - \delta F + \frac{1}{2}|F|^2 \right] d\mu,$$

однако интеграл от δF обращается в нуль.

Пусть $P_n: \mathbf{R}^\infty \rightarrow \mathbf{R}^n$ — естественная проекция. Для борелевской меры μ на $\mathbf{R}^\infty$ положим $\mu_n := \mu \circ P_n^{-1}$. По поводу понятий, относящихся к гауссовским мерам (пространство Камерона–Мартина и т.п.), см. [2]; однако без потери общности можно считать, что мы имеем дело со стандартной гауссовской продуктной мерой, у которой пространство Камерона–Мартина есть $H = l^2$.

Вероятностная мера μ на $\mathbf{R}^n$ с плотностью $\varrho_\mu = \exp(-\Phi)$, где Φ — дважды непрерывно дифференцируемая (или класса $W_{\text{loc}}^{1,2}$) выпуклая функция, называется равномерно выпуклой с постоянной $C > 0$, если $D^2\Phi(x) \geq C \cdot I$, где I — единичный оператор.

Будем говорить, что борелевская вероятностная мера μ на X равномерно выпукла с постоянной $C > 0$, если каждая ее проекция μ_n равномерно выпукла с постоянной C , т.е. $\mu_n = \exp(-\Phi_n) dx$ и $D^2\Phi_n \geq C \cdot I$ на $\mathbf{R}^n$.

С использованием (3) в [8], [9] доказано, что для заданных вероятностной меры μ на $\mathbf{R}^n$, которая равномерно выпукла с постоянной C , и вероятностной меры $\nu \ll \mu$ с конечной энтропией $\text{Ent}_\mu(\nu)$ существует такое борелевское возрастающее треугольное отображение $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, что $\nu = \mu \circ T^{-1}$ и

$$\int |F(x)|^2 \mu(dx) \leq \frac{2}{C} \text{Ent}_\mu(\nu). \quad (6)$$

Подчеркнем, что во всех упомянутых выше результатах основным моментом было получение некоторых дополнительных свойств T таких, как оценка (2). Если допускать произвольные треугольные отображения, то легко показать, что всякая борелевская вероятностная мера ν на $\mathbf{R}^n$, не обязательно абсолютно непрерывная, является образом μ (или всякой другой вероятностной меры, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега) при возрастающем треугольном борелевском отображении. То же самое верно для пространства $\mathbf{R}^\infty$, если в качестве μ взять любое счетное произведение неатомических мер. В бесконечной размерности становится весьма ограничительным также требование $T(x) - x \in H$. Опишем простое построение такого отображения,

называемого нами каноническим треугольным преобразованием меры μ в ν . Пусть μ и ν — абсолютно непрерывные вероятностные меры на $\mathbf{R}^n$, причем плотность μ положительна (замечание о более общем случае сделано ниже). Каноническое возрастающее треугольное борелевское отображение $T_{\mu,\nu}$, преобразующее μ в ν , задается индуктивно следующим образом. Если $n = 1$, то положим $F_\mu(t) := \mu((-\infty, t))$ при $t \in \mathbf{R}^1$, $G_\mu(u) := \inf\{s: F_\mu(s) \geq u\}$ при $u \in (0, 1)$ и $T_{\mu,\nu} := G_\nu \circ F_\mu$. Функция F_μ переводит μ в меру Лебега λ на интервале $(0, 1)$, а G_ν переводит λ в ν . Это верно для всякой борелевской вероятностной меры при условии, что μ не имеет атомов. В случае $n = 2$ берем каноническое отображение T_1 прямой, переводящее μ_1 в ν_1 . Пусть f и g — борелевски измеримые плотности мер μ и ν соответственно, причем $f > 0$. Для μ_1 -п.в. x_1 имеем условную вероятностную плотность

$$f^{x_1}(x_2) := f(x_1, x_2) \left(\int_{\mathbf{R}} f(x_1, u) du \right)^{-1}.$$

Мера с этой плотностью может быть канонически преобразована в вероятностную меру с плотностью $g^{T_1(x_1)}(\cdot)$, где

$$g^{x_1}(x_2) := g(x_1, x_2) \left(\int_{\mathbf{R}} g(x_1, u) du \right)^{-1}.$$

Заметим, что $\int g(T_1(x_1), u) du > 0$ для μ_1 -п.в. x_1 ввиду равенства $\nu_1 = \mu_1 \circ T_1^{-1}$. Построенное каноническое отображение прямой обозначим через $x_2 \mapsto T_2(x_1, x_2)$. Положим $T_2(x_1, x_2) = x_2$ для всех таких x_1 , что $\int g(x_1, u) du = 0$. Легко проверить, что $T := (T_1, T_2)$ является возрастающим треугольным борелевским отображением и $\mu \circ T^{-1} = \nu$. Продолжим построение индукцией по n с использованием одномерных условных плотностей на последней координатной прямой. Единственность в классе μ -эквивалентных возрастающих треугольных отображений доказывается также по индукции. Детали обоснования даны в [9], где аналогичная конструкция рассмотрена для всякой абсолютно непрерывной меры μ (не обязательно эквивалентной мере Лебега); в таком случае каноническое треугольное отображение определено на некотором борелевском подмножестве полной μ -меры, так как в одномерном случае область определения $T_{\mu,\nu}$ оказывается промежутком, возможно ограниченным с одной или двух сторон (это видно из рассуждений выше). Оценка (6) для канонического отображения доказана в [8], [9]. Отображение $T_{\mu,\nu}$ может быть разрывно, даже если обе меры μ и ν имеют гладкие плотности. Например, если мера ν обращается в нуль на некотором интервале, то она не может быть непрерывным образом стандартной гауссовской меры. Из построения видно, что если μ эквивалентна мере Лебега и ν абсолютно непрерывна (что предполагалось выше лишь для упрощения

рассмотрений и не является необходимым для существования треугольных преобразований), то существует такая версия $T_{\mu,\nu}$, что ее k -я компонента строго возрастает по x_k для всех фиксированных $(x_1, \dots, x_{k-1})$. Поэтому эта версия инъективна. Канонические отображения для общих мер были недавно исследованы Д. Е. Александровой (см. [21]). В [8], [9] доказано, что если мера μ эквивалентна мере Лебега на $\mathbf{R}^n$ и вероятностные меры ν_j сходятся к ν по вариации, то $T_{\mu,\nu_j} \rightarrow T_{\mu,\nu}$ по мере μ .

Лемма 1. Пусть μ — борелевская вероятностная мера на X и борелевские отображения $T_j: X \rightarrow X$ сходятся μ -п.в. к отображению T , причем $\text{Ent}_\mu(\mu \circ T_j^{-1}) \leq \eta$ для всех j . Тогда $\mu \circ T^{-1} \ll \mu$ и $\text{Ent}_\mu(\mu \circ T^{-1}) \leq \eta$.

Доказательство. Положим $f_j := d(\mu \circ T_j^{-1})/d\mu$. По теореме Комлоша (см., например, [3, § 4.7]) существует такая подпоследовательность $\{f_{n_j}\}$, что функции $\varrho_k := (f_{n_1} + \dots + f_{n_k})/k$ сходятся μ -п.в. к некоторой функции $f \in L^1(\mu)$. В силу выпуклости функции $t \mapsto t \ln t$ получаем $\text{Ent}_\mu(\varrho_k) \leq \eta$. Следовательно, $\varrho_k \rightarrow f$ в $L^1(\mu)$. По теореме Фату $\text{Ent}_\mu(f) \leq \eta$. Поскольку меры $\varrho_k \cdot \mu$ сходятся к $\mu \circ T^{-1}$ слабо, получаем $\mu \circ T^{-1} = f \cdot \mu$. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим простой пример, как работает (3).

Пример 1. Пусть μ — такая борелевская вероятностная мера на X , что $\mu_n = \exp(-\Phi_n) dx$ для всех n , где Φ_n — C^2 -функция на $\mathbf{R}^n$.

(i) Предположим, что $D^2\Phi_n(x) \leq M \cdot I$ на $\mathbf{R}^n$ для всех n , где $M > 0$ — постоянная. Тогда для каждого $h \in H$ мера μ_h , являющаяся образом μ при сдвиге $T(x) = x - h$, эквивалентна μ и имеет конечную энтропию.

(ii) Если для всех n имеем $D^2\Phi_n(x) \leq M \exp q(x) \cdot I$ на $\mathbf{R}^n$, где

$$q(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^2 \right)^{1/2}, \quad \alpha_n \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \exp q \in L^1(\mu),$$

то $\mu_h \sim \mu$ для каждого $h \in H$ и μ_h имеет конечную энтропию.

(iii) Пусть при предположениях пункта (ii) даны борелевские функции

$$T_n(x) = x_n + F_n(x_1, \dots, x_{n-1})$$

и $T = (T_n)_{n=1}^{\infty}$. Допустим, что $|F|_n^2 \exp(q + q \circ F) \in L^1(\mu)$, где $F = (F_n)_{n=1}^{\infty}$. Тогда $\mu \circ T^{-1} \ll \mu$ и

$$\text{Ent}_\mu(\mu \circ T^{-1}) \leq \frac{M}{2} \int_X |F(x)|_n^2 \exp(q + q \circ F) \mu(dx).$$

Доказательство. Достаточно обосновать случай (iii), ибо случай (ii) получается из него при выборе постоянного отображения $F = h \in H$, а случай (i) соответствует $q = 0$ в (ii). Ясно, что T является возрастающим треугольным преобразованием. Положим $\nu := \mu \circ T^{-1}$.

Заметим, что $\nu_n = \mu_n \circ (P_n T)^{-1}$, $\nu_n = f_n \cdot \mu_n$, а последовательность $\{f_n\}$ является мартингалом на (X, μ) относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n\}$, порожденной проекциями P_n .

Рассмотрим преобразование $P_n T$ на $\mathbf{R}^n$ (для упрощения записи будем обозначать его также через T) и покажем, что в этом случае выполнено доказываемое неравенство. Сначала предположим, что функции F_i являются гладкими и ограниченными. Мы проверим, что в этом случае выполнено равенство (3), в котором $\ln \det_2 DT = 0$. Отображение T очевидным образом биективно. Как и в работе [9], применим следующее равенство, вытекающее из формулы Тейлора с учетом того, что $DT(x)$ является треугольной матрицей с 1 на диагонали:

$$\begin{aligned} & \ln f_n(T(x)) - (\nabla \Phi_n(x), F(x)) \\ &= \int_0^1 s \left(D^2 \Phi_n(sx + (1-s)T(x))(F(x)), F(x) \right) ds. \end{aligned}$$

Возьмем последовательность таких гладких функций φ_k с ограниченными носителями, что $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $|\nabla \varphi_k| \leq 1$ и $\varphi_k(x) = 1$ при $|x| \leq k$. Умножив обе части полученного равенства на φ_k и проинтегрировав по мере μ_n , получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^n} \ln(f_n \circ T) \varphi d\mu_n - \int_{\mathbf{R}^n} (\nabla \Phi_n, F) \varphi d\mu_n \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \left[\int_0^1 s \left(D^2 \Phi_n(x + (1-s)F(x))(F(x)), F(x) \right) ds \right] \varphi(x) \mu_n(dx). \end{aligned}$$

Правая часть не превосходит $(M/2) \int_{\mathbf{R}^n} |F|^2 \exp(q + q \circ T) d\mu_n$, ибо

$$\begin{aligned} & \left(D^2 \Phi_n(x + (1-s)F(x))(F(x)), F(x) \right) \\ & \leq M \exp q(x + (1-s)F(x)) |F(x)|^2 \\ & \leq M \exp[q(x) + q(T(x))] |F(x)|^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{div} F = 0$, то интегрирование по частям дает

$$- \int_{\mathbf{R}^n} (\nabla \Phi_n, F) \varphi_k d\mu = - \int_{\mathbf{R}^n} (\nabla \varphi_k, F) d\mu.$$

Правая часть оценивается по абсолютной величине через $\sup |F|$. В силу теоремы Фату получаем интегрируемость $\ln(f_n \circ T)$. Поскольку по теореме Лебега о мажорируемой сходимости правая часть последнего равенства стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то приходим к равенству

$$\int_{\mathbf{R}^n} \ln(f_n \circ T) d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} \left[\int_0^1 s \left(D^2 \Phi_n(x + (1-s)F(x))(F(x)), F(x) \right) ds \right] \mu_n(dx).$$

Его правая часть не превосходит $(M/2) \int_{\mathbf{R}^n} |F|^2 \exp(q + q \circ T) d\mu_n$. Теперь от гладких ограниченных функций F_i можно перейти к ограниченным

борелевским функциям, взяв для каждого i равномерно ограниченную последовательность гладких функций $F_{i,j}$, почти всюду сходящуюся к F_i . Соответствующие гладкие преобразования $I + F^j := I + (F_{1,j}, \dots, F_{n,j})$ обозначим через S^j . Ясно, что интегралы от функций $|F^j|^2 \exp(q + q \circ S^j)$ по мере μ_n сходятся к интегралу от функции $|F|^2 \exp(q + q \circ T)$. По лемме 1 доказываемая оценка остается в силе и для предельного отображения. Наконец, таким же образом получаем общий случай, поточечно приближая компоненты F ограниченными функциями.

Интеграл от функции $|P_n F|^2 \exp[q + q \circ (P_n T)]$ по мере μ_n не превосходит интеграла от функции $|F|^2 \exp(q + q \circ T)$ по мере μ . Значит, мартингал $\{f_n\}$ равномерно интегрируем и сходится к некоторой функции $f \in L^1(\mu)$, откуда получаем $\nu = f \cdot \mu$. Лемма 1 дает доказываемое утверждение.

Стоит заметить, что если в (ii) имеется также оценка снизу $C \cdot I \leq D^2 \Phi_n(x)$, где $C > 0$, причем $q(x) < \infty$ п.в., то $\exp(\kappa q) \in L^1(\mu)$ для всех $\kappa > 0$.

Теорема 1. *Предположим, что борелевская вероятностная мера μ на X равномерно выпукла с постоянной $C > 0$. Пусть $\nu \ll \mu$ — вероятностная мера.*

(i) *Если ν имеет конечную энтропию $\text{Ent}_\mu(\nu)$, то каноническое треугольное отображение $T_{\mu,\nu}$ обладает тем свойством, что*

$$\int_X |T_{\mu,\nu}(x) - x|_H^2 \mu(dx) \leq \frac{2}{C} \text{Ent}_\mu(\nu). \quad (7)$$

(ii) *Если μ имеет вид $\mu_1 \otimes \mu'$, где μ' — мера на произведении остальных прямых, то существует такое борелевское треугольное отображение T , что $T(x) - x \in H$ и $\nu = \mu \circ T^{-1}$.*

(iii) *Если μ эквивалентна μ_{e_1} , где $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, то существует такое борелевское отображение T типа (1), что $\nu = \mu \circ T^{-1}$.*

Доказательство. (i) Заметим, что $\nu_n \ll \mu_n$ и $f_n := d\nu_n/d\mu_n$ является условным математическим ожиданием $f := d\nu/d\mu$ относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_n$, порожденной P_n . По неравенству Йенсена $\text{Ent}_{\mu_n}(\nu_n) \leq \text{Ent}_\mu(\nu)$. Как объяснено выше, полагая $T^{(n)} := T_{\mu_n,\nu_n}$, имеем

$$\int_{\mathbf{R}^n} |T^{(n)}(x) - x|^2 \mu_n(dx) \leq \frac{2}{C} \text{Ent}_{\mu_n}(\nu_n) \leq \frac{2}{C} \text{Ent}_\mu(\nu).$$

Из свойства единственности для канонического треугольного отображения вытекает, что $P_n \circ T^{(n+1)} = T^{(n)}$ на $\mathbf{R}^n$. Следовательно, обозначая k -ю компоненту $T^{(n)}$ через $T_k^{(n)}$, мы видим, что $T_k^{(n)} = T_k^{(m)} = T_k^{(k)}$ при $n, m \geq k$. Таким образом, сразу получаем желаемое бесконечномерное отображение T : его k -я компонента есть $T_k^{(k)}$. Чтобы увидеть, что $\mu \circ T^{-1} = \nu$, достаточно проверить равенство $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ на всех

борелевских цилиндрических множествах вида $B = B_0 \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots$ с $B_0 \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$. Это равенство очевидно из равенства $\mu_n \circ (T^{(n)})^{-1} = \nu_n$ и нашего определения T . Наконец, (7) следует из теоремы Фату.

(ii) Рассмотрим случай, когда $\mu = \mu_1 \otimes \mu'$ с некоторой борелевской вероятностной мерой μ' на пространстве Y , соответствующем произведению по координатам x_k с $k \geq 2$, т.е. записываем $X = \mathbf{R}^1 \times Y$. Разделим $\mathbf{R}^\infty$ на дизъюнктные множества E_n положительной меры такие, что функция f ограничена на каждом E_n . Например, достаточно выбрать все множества положительной меры среди множеств $\{k \leq f < k + 1\}$. Затем разделим вещественную прямую на промежутки D_n с $\mu_1(D_n) = \nu(E_n)$. Это возможно, ибо мера μ_1 задается положительной плотностью. Мера $I_{D_n} \cdot \mu_1$ может быть преобразована в $\nu(E_n)\mu_1$ возрастающим отображением Ψ_n на внутренности D_n . Тогда отображение $x \mapsto (\Psi_n(x_1), x_2, x_3, \dots)$ переводит меру $(I_{D_n} \cdot \mu_1) \otimes \mu'$ в $\nu(E_n)\mu$. Как показано выше, существует такое треугольное отображение Λ_n с $\Lambda_n(x) - x \in H$, что $\nu(E_n)\mu \circ \Lambda_n^{-1} = I_{E_n} \cdot \nu$. Значит, получаем треугольное отображение T , переводящее меру $\mu = \sum_{n=1}^\infty (I_{D_n} \cdot \mu_1) \otimes \mu'$ в меру $\sum_{n=1}^\infty I_{E_n} \cdot \nu = \nu$. На $D_n \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \times \dots$ отображение T является композицией Ψ_n и Λ_n . Поскольку Ψ_n имеет указанный вид, получаем $x - T(x) \in H$.

(iii) В общем случае, когда μ не обязана представляться как произведение мер, достаточно найти такую вспомогательную меру μ_0 вида $\mu_0 = \mu_1 \otimes \mu'$, где μ' — мера на Y , что μ может быть преобразована в μ_0 отображением T_0 и μ_0 может быть преобразована в ν отображением T' , где T_0 и T' — борелевские отображения типа (1). Пусть μ' — проекция μ на Y . Тогда легко проверить, что μ' равномерно выпукла с постоянной C . В самом деле, достаточно показать, что если мера $\mu = \exp(-\Phi) dx$ равномерно выпукла на $\mathbf{R}^n$ с постоянной C , то ее проекция μ_{n-1} на $\mathbf{R}^{n-1}$ имеет тот же тип. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\Phi_\varepsilon(y, x_n) = \Phi(y, x_n) - C(1 - \varepsilon)|y|^2/2$, $y \in \mathbf{R}^{n-1}$. Заметим, что функция Φ_ε выпукла и интегрируема. Тогда

$$\int \Phi(y, x_n) dx_n = \exp\left(-\frac{1}{2} C(1 - \varepsilon)|y|^2\right) \int \Phi_\varepsilon(y, x_n) dx_n.$$

По теореме Прекопы (см., например, [2, следствие 1.8.3]) интеграл в правой части имеет вид $\exp[-W(y)]$ с некоторой выпуклой функцией W . Значит, $\mu_{n-1} = \exp(-\Phi_{n-1})$, где $D^2\Phi_{n-1} \geq (C - \varepsilon) \cdot I$. Полагая $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем наше утверждение. Если мы покажем, что условные меры μ^y на прямых $L_y := y + \mathbf{R}^1 e_1$, где $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $y \in Y$, имеют плотности ϱ_y относительно естественных мер Лебега на L_y , то мы сможем преобразовать μ в μ_0 таким борелевским отображением $T_0 = (T_{0,k})$, что $T_{0,k}(x) = x_k$ для всех $k \geq 2$. Для этого достаточно преобразовать меру с плотностью ϱ_y в меру μ_1 возрастающей функцией θ_y и положить $T_{0,1}(x) = \theta_y(x_1)$, где $x = (x_1, y)$. Ясно, что T_0 не является треугольным,

но имеет вид (1). Наконец, плотности ϱ_y в самом деле существуют, так как, согласно [22], условные меры μ^y на L_y выпуклы, значит, мера μ^y либо абсолютно непрерывна, либо является дираковской мерой в некоторой точке a_y . Из нашего предположения вытекает, что μ^y не может быть дираковской мерой для всех y из множества положительной μ' -меры. Теорема 1 доказана.

Заметим, что, согласно примеру 1, имеем $\mu_{e_1} \sim \mu$ при дополнительном предположении, что $D^2\Phi_n(x) \leq M \cdot I$ на $\mathbf{R}^n$ для некоторой общей постоянной M .

Часть (ii) применима к случаю, рассмотренному в [8], где μ — произведение счетного числа копий вероятностной меры σ на вещественной прямой, причем σ равномерно выпукла с постоянной $C > 0$. В этом случае для всякой борелевской вероятностной меры ν , абсолютно непрерывной относительно μ , существует такое борелевское треугольное отображение T , что $\nu = \mu \circ T^{-1}$. Например, μ может быть стандартной гауссовской произвед-мерой.

Отображение, возрастающее в указанном выше смысле, может не быть монотонным в смысле [23] и [19]. Кроме того, треугольное отображение в типичных случаях не является отображением градиентного типа. Поэтому рассматриваемые здесь отображения заметно отличаются от используемых в [24], [25], [15], [19] и многих других работах по оптимальной транспортировке. Заметим, что в гауссовском случае заключительная часть данного нами доказательства может быть повторена для отображений градиентного типа, построенных в [19], что даст в результате отображение типа (1), хотя и не обязательно градиентного типа. Однако остается невыясненным, можно ли найти монотонное преобразование без дополнительных предположений о ν . Мы также не знаем, всегда ли можно T в утверждении (iii) выбрать возрастающим треугольным или по крайней мере треугольным, если настаивать на (1). В (ii) также неясно, можно ли найти возрастающее отображение (опять с (1)). Как отмечено выше, никаких проблем нет, если опустить (1). Однако сейчас мы увидим, что (1) необходимо, если T является возрастающим треугольным и мера $\mu \circ T^{-1}$ обладает конечной энтропией. Наконец, будет показано, что если в бесконечномерном случае аналог правой части (3) конечен, то мера $\mu \circ T^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно μ и обладает конечной энтропией, причем выполнено (3). Следующее утверждение усматривается непосредственно из доказательства теоремы 1.

Теорема 2. Пусть борелевская вероятностная мера μ на X равномерно выпукла с постоянной $C > 0$, и пусть T — такое μ -измеримое возрастающее треугольное отображение, что мера $\nu := \mu \circ T^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно μ и имеет конечную энтропию. Тогда $T(x) - x \in H$ для μ -п.в. x и выполнено неравенство (2).

Если T — такое возрастающее треугольное отображение на X , что его компоненты T_n абсолютно непрерывны по x_n (т.е. функции $x_n \mapsto T_n(x_1, \dots, x_n)$ абсолютно непрерывны на каждом отрезке при фиксированных $(x_1, \dots, x_{n-1})$), то величина $\det_2 DT(x)$ определяется равенством

$$\det_2 DT(x) := \prod_{n=1}^{\infty} \partial_{x_n} T_n(x) \exp(1 - \partial_{x_n} T_n(x)).$$

Заметим, что здесь не предполагается, что DT имеет смысл отдельно. В частности, при таком определении имеем $\det_2 DT(x) = 1$, если

$$T_n(x) = x_n + F_n(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

какова бы ни была функция F_n .

Теорема 3. Пусть борелевская вероятностная мера μ на X равномерно выпукла с постоянной $C > 0$, и пусть T — такое μ -измеримое возрастающее треугольное отображение, что каждая функция T_n абсолютно непрерывна по x_n , а величины в правой части (3) для μ_n и $P_n \circ T$ равномерно ограничены по n . Тогда мера $\nu := \mu \circ T^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно μ и имеет конечную энтропию, причем $\text{Ent}_{\mu}(\nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ent}_{\mu_n}(\nu_n)$.

Доказательство. Будем придерживаться обозначений доказательства теоремы 1. Если мы покажем, что $\sup_n \text{Ent}_{\mu_n}(\nu_n) < \infty$, то последовательность $f_n = d\nu_n/d\mu_n$, являющаяся мартингалом, будет равномерно интегрируемой. Значит, $\nu \ll \mu$. Равенство $\text{Ent}_{\mu}(\nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ent}_{\mu_n}(\nu_n)$ вытекает из того факта, что, с одной стороны,

$$\text{Ent}_{\mu}(\nu) \leq \liminf \text{Ent}_{\mu_n}(\nu_n)$$

ввиду теоремы Фату и ограниченности $f_n \ln f_n$ снизу, а с другой стороны,

$$\text{Ent}_{\mu_n}(\nu_n) = \text{Ent}_{\mu}(f_n) \leq \text{Ent}_{\mu}(f)$$

по свойствам условных математических ожиданий. Теперь достаточно рассмотреть случай $\mathbf{R}^n$ и показать, что если правая часть (3) конечна, то величина $\text{Ent}_{\mu}(\nu)$ также конечна (тогда выполняется (3)). Это не вполне очевидно. Таким образом, будем иметь дело с $T = (T_1, \dots, T_n)$ и опустим индексы при μ и ν . Найдется последовательность гладких возрастающих треугольных отображений $S_j = (S_{j,1}, \dots, S_{j,n})$ на $\mathbf{R}^n$ со следующими свойствами: функции $S_{j,k} - x_k$ имеют компактные носители на $\mathbf{R}^k$, $S_j(x) \rightarrow T(x)$ п.в. и

$$\sup_j \int \left[(\Lambda(e^{-\Phi}, S_j(x), x) F_j(x), F_j(x)) - \ln \det_2 DS_j(x) \right] \mu(dx) < \infty,$$

где $F_j := S_j - I$. Заметим, что нельзя ожидать найти такие S_j , что $S_j - I$ имели бы компактные носители на $\mathbf{R}^n$, так как k -я компонента зависит только от $x_1, \dots, x_k$, значит, она может иметь компактный носитель, только если тождественно равна нулю. Следовательно, мера $\mu \circ S_j^{-1}$ обладает положительной плотностью f_j относительно μ такой, что $f_j = 1$ вне некоторого куба K_j . Ясно, что мера $\mu \circ S_j^{-1}$ имеет конечную энтропию η_j относительно μ , удовлетворяющую равенству (3). Следовательно, $\eta := \sup_j \eta_j < \infty$. По лемме 1 получаем, что $\mu \circ T^{-1} \ll \mu$ и $\text{Ent}_\mu(\nu) \leq \eta$. Теорема 3 доказана.

Пример 2. Пусть борелевская вероятностная мера μ на X равномерно выпукла с постоянной C , и пусть T — такое μ -измеримое возрастающее треугольное отображение, что каждая функция T_n абсолютно непрерывна по x_n . Предположим дополнительно, что для плотностей $\exp(-\Phi_n)$ проекций μ_n меры μ имеем $D^2\Phi_n(x) \leq M \cdot I$ на $\mathbf{R}^n$. Тогда из интегрируемости функций $|T(x) - x|_n^2$ и $\ln \det D T(x)$ относительно μ следует, что $\mu \circ T^{-1} \ll \mu$ и $\text{Ent}_\mu(\mu \circ T^{-1}) < \infty$. В частности, это применимо к стандартной гауссовской произвольной мере.

Дадим одно интересное применение к задаче об абсолютной непрерывности индуцированных мер в случае не обязательно треугольных отображений. Пусть γ — центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве E , и пусть $H := H(\gamma)$ — ее пространство Камерона–Мартинна. Предположим, что $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H , $\widehat{e}_n$ — измеримый линейный функционал, ассоциированный с e_n , и пусть $\mathbf{E}^{\mathcal{F}_n}$ обозначает условное математическое ожидание относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_n$, порожденной $\widehat{e}_i$, $i \leq n$. Без потери общности можно считать, что мы имеем дело со стандартной гауссовской произвольной мерой и стандартным базисом в l^2 (тогда $\widehat{e}_n$ — это n -я координатная функция). Будем использовать стандартные обозначения для соболевских классов $W^{2,1}(\gamma, H)$ отображений $F: E \rightarrow H$, входящих в $L^2(\gamma, H)$, таких, что производная $D_H F$ отображения F вдоль H входит в $L^2(\gamma, \mathcal{H})$.

Теорема 4. Пусть отображение $T = I + F$ с $F \in W^{2,1}(\gamma, H)$ таково, что

$$((I + D_H F(x))h, h)_H \geq \eta(x) |h|_H^2 \quad \text{для всех } h \in H,$$

где η — п.в. положительная ограниченная измеримая функция. Предположим, что существует такая измеримая функция θ , что $(\mathbf{E}^{\mathcal{F}_n} \eta)^{-1} \leq \theta$ п.в. для всех n и $\theta^4 \|D_H F\|_{\mathcal{H}}^2 \in L^1(\gamma)$. Тогда $\nu := \gamma \circ T^{-1} \ll \gamma$, $\text{Ent}_\gamma(\nu) < \infty$ и

$$\text{Ent}_\gamma(\nu) \leq \frac{1}{2} \int \left[|F|_H^2 + 2 \|D_H F\|_{\mathcal{H}}^2 + \theta^4 \|D_H F\|_{\mathcal{H}}^2 \right] d\gamma. \quad (8)$$

Если $\eta(x) = \alpha > 0$ постоянна и $\|D_H F\|_{L(H)} \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\gamma)$, например, если $\|D_H F\|_{L(H)} \leq q < 1$, где q — постоянная, то существуют такие борелевское отображение S на X и множество Ω полной ν -меры, что $S(T(x)) = x$ для γ -п.в. x , $T(S(y)) = y$ для ν -п.в. y и на множестве Ω имеем

$$\frac{d\nu}{d\gamma} = \frac{1}{\Lambda_F \circ S}, \quad \Lambda_F := \det_2(I + D_H F) \exp\left(\delta F - \frac{1}{2} |F|_H^2\right), \quad (9)$$

причем $d\nu/d\gamma = 0$ на дополнении Ω . Кроме того, выполняется равенство

$$\text{Ent}_\gamma(\nu) = \frac{1}{2} \int |F|_H^2 d\gamma - \int \ln \det_2(I + D_H F) d\gamma. \quad (10)$$

Доказательство. Для всяких операторов A и B на $\mathbf{R}^n$ имеем (см., например, [2] или [4])

$$\det_2(I + A) \det_2(I + B) = \det_2((I + A)(I + B)) \exp \text{trace}(AB).$$

Если оператор $I + A$ обратим, то, полагая $B = -A(I + A)^{-1}$, имеем $I + B = (I + A)^{-1}$. В силу неравенства Карлемана $\det_2(I + B) \leq \exp(\|B\|_{\mathcal{H}}^2/2)$ получаем

$$|\det_2(I + A)|^{-1} \leq \exp\left(\frac{1}{2} \|A(I + A)^{-1}\|_{\mathcal{H}}^2 + \text{trace}(A^2(I + A)^{-1})\right).$$

Поскольку $\|AC\|_{\mathcal{H}} \leq \|C\|_{L(H)} \|A\|_{\mathcal{H}}$ и $\text{trace}(A^2 C) \leq \|C\|_{L(H)} \|A\|_{\mathcal{H}}$, справедлива оценка

$$-\ln |\det_2(I + A)| \leq \left(\|(I + A)^{-1}\|_{L(H)}^2 + \frac{1}{2} \right) \|A\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Эта оценка остается в силе для всяких операторов Гильберта–Шмидта A и B , если оператор $I + A$ обратим. Если T — обратимое C^1 -отображение на $\mathbf{R}^n$ такое, что

$$\|(I + DF(x))^{-1}\|_{L(H)} \leq \theta(x),$$

то получаем (8). Чтобы обосновать (8) в конечномерном случае при наших более общих предположениях, рассмотрим отображения $T_\varepsilon = I + (1 - \varepsilon)F$, $\varepsilon > 0$. Заметим что $(DT_\varepsilon(x)h, h)_H \geq (\varepsilon + \eta(x))|h|_H^2$, значит, $\|DT_\varepsilon(x)^{-1}\|_{L(H)} \leq (\varepsilon + \eta(x))^{-1}$. Достаточно доказать (8) для T_ε (с объектами, соответствующими T_ε , разумеется), так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы приходим к (8) для T . Рассмотрим гладкие отображения $T_{\varepsilon,k} := P_{1/k}T_\varepsilon$, где $\{P_t\}$ — полугруппа Орнштейна–Уленбека. Имеет место оценка $(DT_{\varepsilon,k}(x)h, h)_H \geq \varepsilon|h|_H^2$. Значит, отображение $T_{\varepsilon,k}$ обратимо и $\|DT_{\varepsilon,k}(x)^{-1}\|_{L(H)} \leq (\varepsilon + P_{1/k}\eta(x))^{-1}$. Следовательно, получаем (8) в случае $T_{\varepsilon,k}$. Полагая $k \rightarrow \infty$, приходим к (8) для T_ε . Общий случай сводится к случаю стандартной гауссовской произвольной меры, поскольку

если $H(\gamma)$ бесконечномерно, то существует такой сохраняющий меру линейный изоморфизм J между (E, γ) и (X, μ) , где μ — стандартная гауссовская произведение-мера, что J является изометрией между $H(\gamma)$ и H (см. [2, гл. 6]). Пусть $F_n := \mathbf{E}^{\mathcal{F}_n} P_n F$. Тогда

$$D_H F_n = \mathbf{E}^{\mathcal{F}_n} P_n D_H F.$$

Для всякого $h \in P_n(H)$ с $|h|_H = 1$ имеем

$$\begin{aligned} ((I + D_H F_n) h, h)_H &= \mathbf{E}^{\mathcal{F}_n} ((I + P_n D_H F) h, h)_H \\ &= \mathbf{E}^{\mathcal{F}_n} ((I + D_H F) h, h)_H \geq \mathbf{E}^{\mathcal{F}_n} \eta. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|(I + D_H F_n)^{-1}\|_{L(H)} \leq (\mathbf{E}^{\mathcal{F}_n} \eta)^{-1} \leq \theta \quad \text{п.в.}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Ent}_{\gamma_n}(\nu_n) &\leq \frac{1}{2} \int |F_n|_H^2 d\gamma_n + \int \|D_H F_n\|_{\mathcal{H}}^2 \left[\frac{1}{2} + (\mathbf{E}^{\mathcal{F}_n} \eta)^{-2} \right] d\gamma_n \\ &= \frac{1}{2} \int |F_n|_H^2 d\gamma + \frac{1}{2} \int \|D_H F_n\|_{\mathcal{H}}^2 d\gamma \\ &\quad + \int (D_H F, D_H F_n)_{\mathcal{H}} (\mathbf{E}^{\mathcal{F}_n} \eta)^{-2} d\gamma_n \\ &\leq \frac{1}{2} \int |F|_H^2 d\gamma + \frac{1}{2} \int \|D_H F\|_{\mathcal{H}}^2 d\gamma \\ &\quad + \left(\int \|D_H F\|_{\mathcal{H}}^2 \theta^4 d\gamma \right)^{1/2} \left(\int \|D_H F\|_{\mathcal{H}}^2 d\gamma \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \int |F|_H^2 d\gamma + \int \|D_H F\|_{\mathcal{H}}^2 d\gamma + \frac{1}{2} \int \|D_H F\|_{\mathcal{H}}^2 \theta^4 d\gamma. \end{aligned}$$

Это показывает, что $\nu \ll \gamma$ и выполняется (8).

Проверим (9) в случае, когда $\eta(x) = \alpha > 0$ и $\|D_H F\|_{L(H)}$ входит во все $L^p(\gamma)$. Предположим сначала, что F принимает значения в $\mathbf{R}^n$ и что

$$((I + D_H F) h, h)_H \geq \alpha |h|_H^2 \quad \text{для всех } h \in \mathbf{R}^n. \quad (11)$$

Утверждение сводится к отображениям $T_y := z + F_y(z)$, $F_y(z) := F(z, y)$, на $\mathbf{R}^n$, если записать $x = (z, y)$, $z \in \mathbf{R}^n$. Известно (см., например, [2, гл. 5]), что F_y входит в класс $W^{2,1}(\gamma_n, \mathbf{R}^n)$ для γ_0 -п.в. y , где мы записываем γ как произведение стандартной гауссовской меры γ_n на $\mathbf{R}^n$ и стандартной гауссовской произведение-меры γ_0 на произведении остальных прямых. Кроме того, имеем (11) и $\|D_H F_y\|_{L(H)} \in \bigcap_{p>1} L^p(\gamma_n)$ для γ_0 -п.в. y . Мы можем иметь дело с версией F , для которой F_y обладает этими свойствами при всех y . Теперь достаточно рассмотреть

случай одного отображения $F \in W^{2,1}(\gamma_n, \mathbf{R}^n)$, для которого операторная норма DF входит во все $L^p(\gamma_n)$ и выполнено (11), а затем применить это к отображениям F_y . По теореме вложения Соболева F имеет непрерывную модификацию, обозначаемую также через F . Поскольку $(T(x+h) - T(x), h) \geq \alpha|h|^2$, по теореме Минти заключаем, что T — гомеоморфизм $\mathbf{R}^n$. Более того, отображение $S := T^{-1}$ липшицево с постоянной α^{-1} . Это обеспечивает формулу (5) для плотности Радона-Никодима. Итак, получаем такое отображение G со значениями в $\mathbf{R}^n$, что для всякого y отображение $S_y: z \mapsto z + G(z, y)$ липшицево с постоянной α^{-1} и $S_y(T_y(z)) = T_y(S_y(z)) = z$ на $\mathbf{R}^n$. Заметим, что в этом случае $\gamma \circ T^{-1} \sim \gamma$, поскольку $\gamma_n \circ T_y^{-1} \sim \gamma_n$.

Следующий шаг состоит в том, чтобы взять конечномерные приближения $F_n := P_n F$. Отображение F_n принимает значения в $\mathbf{R}^n$ и входит в $W^{2,1}(\gamma, \mathbf{R}^n)$. Кроме того, выполнено (11). Значит, получаем (9) для каждого F_n . Положим $T_n := I + F_n$, $S_n := I + G_n := (I + F_n)^{-1}$. Получаем

$$\nu = f \cdot \gamma, \quad \nu_n := \gamma \circ T_n^{-1} = f_n \cdot \gamma.$$

Последовательность $\{f_n\}$ — равномерно интегрируемый мартингал относительно γ . Значит, она сходится к f в $L^1(\gamma)$. Заметим, что

$$|G_k \circ T_k - G_k \circ T_n|_H \leq (1 + \alpha^{-1})|F_k - F_n|_H,$$

поскольку отображение $I + G_k$ липшицево вдоль $\mathbf{R}^k$ с постоянной α^{-1} . Покажем, что $\int \min(1, |G_n - G_k|_H) d\nu \rightarrow 0$ при $n, k \rightarrow \infty$. Достаточно показать, что $\int \min(1, |G_n - G_k|_H) d\nu_n \rightarrow 0$ при $n, k \rightarrow \infty$, ибо $\|\nu - \nu_n\| \rightarrow 0$. Пусть $k > n$. Тогда

$$\int \min(1, |G_n - G_k|_H) d\nu_n = \int \min(1, |G_n \circ T_n - G_k \circ T_n|_H) d\gamma.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} |G_n \circ T_n - G_k \circ T_n|_H &\leq |G_n \circ T_n - G_k \circ T_k|_H + |G_k \circ T_k - G_k \circ T_n|_H \\ &\leq |F_n - F_k|_H + (1 + \alpha^{-1})|F_n - F_k|_H, \end{aligned}$$

то наше утверждение вытекает из поточечной сходимости $|F_n - F_k|_H \rightarrow 0$. Значит, существует такое H -значное отображение G , что $|G_n - G|_H \rightarrow 0$ по мере ν . Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $|G_n - G|_H \rightarrow 0$ ν -п.в. Ясно, что можно взять борелевскую версию G . Положим $S := I + G$. Получаем $S_n \rightarrow S$ ν -п.в. и $F_n(S_n(y)) = -G_n(y)$. Это дает $F(S(y)) = -G(y)$ ν -п.в. Действительно, поскольку $F_n \rightarrow F$ поточно, достаточно показать, что последовательность мер $\nu \circ S_n^{-1}$ равномерно счетно-аддитивна. Если это сделано, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдутся такие компактное множество K и число N_ε , что отображение $F|_K$ непрерывно, $\nu \circ S^{-1}(K) > 1 - \varepsilon$, $\sup_{x \in K} |F_n(x) - F(x)|_H \leq \varepsilon$

и $\nu \circ S_n^{-1}(K) > 1 - \varepsilon$ для всех $n \geq N_\varepsilon$, что возможно в силу равномерной счетной аддитивности. Напомним, что взяв любую меру ν' , относительно которой абсолютно непрерывны все меры $\nu \circ S_n^{-1}$, можно найти такое $\delta > 0$, что $\nu \circ S_n^{-1}(B) < \varepsilon$ при $\nu'(B) < \delta$. На самом деле можно взять $\nu' = \gamma$, так как $\nu \ll \gamma$ и $\gamma \circ S_n^{-1} \ll \gamma$. Можно продолжить $F|_K$ до непрерывного H -значного отображения F_ε на всем X . Тогда в силу сходимости $F_\varepsilon(S_n) \rightarrow F_\varepsilon(S)$ ν -п.в. получаем такое $N > N_\varepsilon$, что $\nu(|F_\varepsilon(S) - F_\varepsilon(S_n)|_H > \varepsilon) < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Это дает $\nu(|F(S) - F(S_n)|_H > \varepsilon) < 3\varepsilon$ для всех $n \geq N$. Сочетая эту оценку с оценкой $\nu(|F(S_n) - F_n(S_n)| > \varepsilon) \leq \nu \circ S_n^{-1}(X \setminus K) \leq \varepsilon$, получаем сходимость по мере. Установим равномерную счетную аддитивность мер $\nu \circ S_n^{-1}$. Достаточно показать, что для заданной последовательности борелевских множеств $B_k \downarrow \emptyset$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое k_1 , что $\nu(S_n^{-1}(B_{k_1})) \leq \varepsilon$ для всех n . Выберем N так, что $\|\nu_n - \nu\| < \varepsilon/2$ при всех $n \geq N$. Затем выберем k_1 так, что $\gamma(B_{k_1}) < \varepsilon/2$ и $\nu(S_n^{-1}(B_{k_1})) \leq \varepsilon$ для каждого $n \leq N$. Если $n \geq N$, то получим

$$\nu(S_n^{-1}(B_{k_1})) \leq \nu_n(S_n^{-1}(B_{k_1})) + \|\nu - \nu_n\| = \gamma(B_{k_1}) + \|\nu - \nu_n\| \leq \varepsilon.$$

Итак, имеем $T(S(y)) = y$ для ν -п.в. y . Похожим образом проверяется, что $S(T(x)) = x$ для γ -п.в. x . А именно, $|G_n \circ T - G \circ T|_H \rightarrow 0$ γ -п.в. по описанному выше построению. Поскольку $\|\gamma \circ T_n^{-1} - \gamma \circ T^{-1}\| \rightarrow 0$, это дает $|G_n \circ T_n - G \circ T_n|_H \rightarrow 0$ по мере относительно γ . Как и выше, имеем также $|G \circ T_n - G \circ T|_H \rightarrow 0$ по мере относительно γ . Значит, $|G_n \circ T_n - G \circ T|_H \rightarrow 0$ по мере γ , откуда в силу тождества $G_n \circ T_n = -F_n$ получаем $-F = G \circ T$ γ -п.в. В силу сходимости F_n к F по норме $W^{2,1}(\gamma, H)$ имеем сходимость по мере функций $\det_2(I + D_H F_n)$, δF_n и $|F_n|_H$ к соответствующим выражениям для F , т.е. $\Lambda_{F_n} \rightarrow \Lambda_F$ по мере относительно γ . Переходя к подпоследовательности, можно считать, что все эти последовательности сходятся γ -п.в. Поскольку $f_n = 1/\Lambda_{F_n} \circ S_n \rightarrow f$ п.в. и функции $\Lambda_{F_n} \circ S_n$ сходятся к $\Lambda_F \circ S$ по мере ν в силу рассуждений выше, приходим к желаемому выражению для плотности Радона–Никодима меры ν , справедливому на некотором множестве полной ν -меры (неясно, эквивалентны ли меры ν и γ). Наконец, (10) вытекает из (9), как объяснено выше при выводе (4), хотя это может быть выведено также из конечномерного случая такими же рассуждениями. Теорема 4 доказана.

Заметим, что условие $\|D_H F\|_{L(H)} \leq q$ равносильно существованию такой версии F , что $|F(x+h) - F(x)|_H \leq q|h|_H$ для всех $x \in E$ и $h \in H$ (см. [2, § 5.8]). Достаточно также иметь оценку $\|D_H F(x)\|_{L(H)} \leq q(x) < 1$ при условии, что функция $\|D_H F\|_{\mathcal{H}}^2(1-q)^{-4}$ интегрируема.

Теорема 4 обобщает результаты [26], [4] о принадлежности плотностей Радона–Никодима индуцированных мер классу $L \ln L$, доказанные при дополнительном предположении, что $\exp(c|D_H F|_{\mathcal{H}}^2) \in L^1(\gamma)$ для некоторого $c > (2 + \alpha)/(2\alpha)$. Стоит заметить, что наши оценки позволяют

дать более короткое обоснование эквивалентности ν и γ (т.е. показать, что Ω является множеством полной γ -меры), которая при этом дополнительном предположении была установлена в [26] (см. также [4]).

Более внимательное рассмотрение доказательства предыдущей теоремы показывает, что оно применимо также к некоторым другим мерам. Например, справедлив следующий результат, в котором соболевский класс $W^{2,1}(\mu, H)$ определяется точно так же, как и в гауссовском случае (см. [1]).

Теорема 5. Пусть μ — произведение счетного числа копий вероятностной меры σ на прямой с такой плотностью $\exp(-\Phi)$, что $0 < C \leq \Phi''(t) \leq M$. Пусть $F \in W^{2,1}(\mu, H)$ удовлетворяет тем же самым условиям, что и в предыдущей теореме. Тогда $\mu \circ T^{-1} \ll \mu$ и величина $\text{Ent}_\mu(\mu \circ T^{-1})$ конечна.

Наконец, заметим, что большинство результатов выше может быть сформулировано и доказано такими же рассуждениями в более абстрактной постановке, когда X — общее локально выпуклое пространство с мерой μ , $H \subset X$ — непрерывно вложенное сепарабельное гильбертово пространство (аналог пространства Камерона–Мартина для гауссовских мер), а координатные функции заменяются подходящими μ -измеримыми линейными функционалами. Например, естественное понятие равномерно выпуклой меры в этой постановке было изучено в [27] и [28]. Более конкретно, предположим, что H плотно в X . Тогда имеется вложение $j_H: X^* \rightarrow H$, $(j_H(l), h)_H = l(h)$, $l \in X^*$, $h \in H$. Пусть последовательность $\{l_n\} \subset X^*$ такова, что $\{e_n := j_H(l_n)\}$ является ортонормированным базисом в H . Предположим, что μ — такая радоновская вероятностная мера на X , что функционалы l_n разделяют точки линейного подпространства E полной μ -меры. Тогда, взяв E , $\{l_n\}$ и H вместо $\mathbf{R}^\infty$ с координатными функциями и l^2 , получаем аналоги изложенных выше результатов в этой более общей постановке.

В этом направлении мы приведем один результат о нелинейных преобразованиях несколько более широкого класса мер, усиливающий теорему 2 работы [29]. Пусть μ — радоновская вероятностная мера на локально выпуклом пространстве X , и пусть H — непрерывно вложенное в X сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через $\mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty$ класс всех функций f на X вида $f(x) = f_0(l_1(x), \dots, l_n(x))$, где $f_0 \in C_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $l_i \in X^*$. Предположим, что для каждого $h \in H$ мера μ дифференцируема по направлению h в смысле Фомина, т.е. существует такая функция $\beta_h \in L^1(\mu)$, называемая логарифмической производной μ по направлению h , что

$$\int_X \partial_h f(x) \mu(dx) = - \int_X f(x) \beta_h(x) \mu(dx)$$

для всякой функции $f \in \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty$. Предположим еще, что для каждой пары

векторов $h, k \in H$ функция β_h обладает такой модификацией, что функции $t \mapsto \beta_h(x + tk)$ локально абсолютно непрерывны при μ -п.в. x , причем $\partial_k \beta_h(x) = -(\mathcal{R}(x)h, k)_H$, где $x \mapsto \mathcal{R}(x)$ — μ -измеримое отображение на X со значениями в пространстве $L(H)$ ограниченных операторов на H , причем функция $x \mapsto (\mathcal{R}(x)u, v)_H$ μ -измерима для всяких $u, v \in H$.

Напомним (см. [1]), что аналогично гауссовскому случаю определяется соболевский класс $W^{2,1}(\mu, H)$ отображений $F: X \rightarrow H$, которые имеют обобщенную производную $D_H F$ вдоль H , принимающую значения в пространстве операторов Гильберта–Шмидта $\mathcal{H}$, и конечную соболевскую норму $\|F\|_{W^{2,1}(\mu, H)}$, задаваемую равенством

$$\|F\|_{W^{2,1}(\mu, H)}^2 = \int_X |F|_H^2 d\mu + \int_X \|D_H F\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu.$$

При этом всякое отображение $F \in W^{2,1}(\mu, H)$ имеет дивергенцию $\delta F \in L^2(\mu)$, характеризующую тождеством

$$\int_X \psi(x) \delta F(x) \mu(dx) = - \int_X (D_H \psi(x), F(x))_H \mu(dx)$$

для всех функций $\psi \in \mathcal{FC}_b^\infty$. Если $\{e_i\}$ — ортонормированный базис в H и $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, то $\delta v = \sum_{i=1}^n [\partial_{e_i} v_i + v_i \beta_{e_i}]$.

Теорема 6. Пусть $T = I + F$, где $F \in W^{2,1}(\mu, H)$, причем при μ -п.в. x для каждого $h \in H$ выполнено неравенство $|F(x+h) - F(x)|_H \leq q|h|_H$ с некоторым $q < 1$. Предположим также, что $\|\mathcal{R}\|_{L(H)} \leq M$ для некоторой постоянной M . Тогда существует такое μ -измеримое отображение $G: X \rightarrow H$, что для отображения $S := I + G$ имеем $T(S(x)) = S(T(x))$ для μ -п.в. x , мера $\mu \circ T^{-1}$ эквивалентна мере μ , причем

$$\frac{d\mu \circ T^{-1}}{d\mu}(x) = \frac{1}{J_T(S(x))},$$

где

$$J_T(x) = \det_2(I + D_H F(x)) \times \exp \left[\delta F(x) - \int_0^1 s \left(\mathcal{R}(x + (1-s)F(x)) F(x), F(x) \right)_H ds \right]. \quad (12)$$

Доказательство. Утверждение легко проверяется в конечномерном случае (см. [29], где были наложены несколько более ограничительные условия, а также доказательство теоремы 3.1 в [9], где рассмотрена более общая ситуация). Теперь легко выводится случай, когда F принимает значения в конечномерном подпространстве $H_0 \subset H$. Для этого достаточно взять условные меры на конечномерных подпространствах $x + H_0$ и заметить, что для них выполнены соответствующие условия (см. [1]). В общем случае возьмем ортонормированный базис $\{e_n\}$

в H и применим доказанное к отображениям $T_n = I + F_n$, $F_n := P_n F$, где P_n — проекция в H на линейную оболочку векторов $e_1, \dots, e_n$. Заметим, что в силу доказанного ранее

$$\begin{aligned} \text{Ent}_\mu(\mu \circ T_n^{-1}) &\leq \frac{M}{2} \int_X |F_n|_H^2 d\mu + \left((1-q)^{-2} + \frac{1}{2} \right) \int_X \|D_H F_n(x)\|_{\mathcal{H}}^2 \mu(dx) \\ &\leq K \|F\|_{W^{2,1}(\mu, H)}^2, \end{aligned}$$

где $K := M/2 + ((1-q)^{-2} + \frac{1}{2})$. Легко проверить, что отображения $I + F_n$ сходятся к T , а отображения $(I + F_n)^{-1}$ сходятся к S . Полученная выше оценка дает равномерную интегрируемость плотностей Радона–Никодима мер $\mu \circ T_n^{-1}$. Функции δF_n сходятся к δF в $L^2(\mu)$, а потому и по мере. Кроме того, функции $\det_2(I + D_H F_n)$ сходятся почти всюду к $\det_2(I + D_H F)$. Наконец, имеет место сходимост по мере функций

$$\Lambda_n: x \mapsto \int_0^1 s \left(\mathcal{R}(x + (1-s) F_n(x)) F_n(x), F_n(x) \right)_H ds$$

к аналогичной функции Λ для F . Действительно, ввиду поточечной сходимости $F_n(x)$ к $F(x)$ и равномерной ограниченности норм операторов $\mathcal{R}(x)$ достаточно проверить, что для всяких фиксированных векторов $u, v \in H$ функции

$$x \mapsto \int_0^1 s \left(\mathcal{R}(x + (1-s) F_n(x)) u, v \right)_H ds$$

сходятся по мере μ к функции

$$x \mapsto \int_0^1 s \left(\mathcal{R}(x + (1-s) F(x)) u, v \right)_H ds.$$

Поскольку подынтегральные выражения равномерно ограничены, то достаточно показать, что для каждого фиксированного $s \in [0, 1]$ функции

$$\xi_n: x \mapsto \left(\mathcal{R}(x + (1-s) F_n(x)) u, v \right)_H$$

сходятся по мере μ к функции

$$\xi: x \mapsto \left(\mathcal{R}(x + (1-s) F(x)) u, v \right)_H.$$

Отображение $(1-s) F$ удовлетворяет тем же условиям, что и F . Поэтому в силу доказанного выше образы меры μ при отображениях $I + (1-s) F_n$ имеют равномерно интегрируемые плотности относительно μ . Вместе с поточечной сходимостью $(1-s) F_n$ к $(1-s) F$ это дает сходимость функций ξ_n к ξ по мере μ (см. [3, следствие 9.9.11]). Итак, функции Λ_n сходятся по мере μ к функции Λ . Сходимость плотностей по мере вместе с равномерной интегрируемостью дает доказываемое утверждение.

Если H плотно в X и функционалы $l_n \in X^*$ таковы, что они разделяют точки в X и векторы $e_n = j_H(l_n)$ образуют ортонормированный базис в H , то для всякого n образ меры μ при линейном отображении $P_n := (l_1, \dots, l_n)$ в $\mathbf{R}^n$ обладает плотностью $\exp(-\Phi_n)$ относительно меры Лебега, причем $D^2\Phi_n \leq M \cdot I$ на $\mathbf{R}^n$.

Следствие 1. В ситуации теоремы 6 справедливо равенство

$$\begin{aligned} \text{Ent}_\mu(\mu \circ T^{-1}) &= \int_X \int_0^1 s \left(\mathcal{R}(x + (1-s)F(x)) F(x), F(x) \right)_H ds \mu(dx) \\ &\quad - \int_X \ln |\det_2(I + D_H F)| d\mu. \end{aligned}$$

Доказательство. Ввиду формулы (12) достаточно заметить, что интеграл функции δF по мере μ равен нулю.

З а м е ч а н и е 1. Стоит заметить, что в случае, когда μ является произведением счетного числа копий строго выпуклой меры σ на $\mathbf{R}^1$ (например, невырожденной гауссовской меры) и ν — вероятностная мера, абсолютно непрерывная относительно μ , существование треугольного отображения T типа (1) с $\nu = \mu \circ T^{-1}$ может быть установлено с использованием индуктивного рассуждения Талагранна [12]. Для удобства читателя приведем детали. На первом шаге получаем (2) в $\mathbf{R}^n$ индукцией по n (что сделано в [12] в гауссовском случае). Фактически, единственное нетривиальное место — обосновать случай $n = 1$. Достаточно рассмотреть меры с гладкими плотностями, что вместе с условием $n = 1$ делает доказательство довольно легким (см. [8], [9]). Далее, предположим, что (2) верно для некоторого $n \geq 1$, и рассмотрим меру μ , являющуюся произведением $n+1$ экземпляра σ . Точки $\mathbf{R}^{n+1}$ будут записываться как $x = (P_n x, x_{n+1})$. Пусть $\nu = f \cdot \mu$. Для $y \in \mathbf{R}^n$ положим

$$g(y) := \int_{\mathbf{R}^1} f(y, t) \sigma(dt), \quad f_y(t) := \frac{f(y, t)}{g(y)},$$

где $f_y(t) = 0$ для всех t при $g(y) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^{n+1}} f \ln f d\mu &= \int_{\mathbf{R}^n} g(y) \ln g(y) \mu_n(dy) \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}} f_y(t) \ln f_y(t) \sigma(dt) \right) g(y) \mu_n(dy). \end{aligned}$$

Пусть

$$T := T_{\mu, \nu} = (T_1, \dots, T_{n+1}).$$

Тогда $T_{\mu_n, \nu_n} = P_n T$ на $\mathbf{R}^n$. Для каждого $y \in \mathbf{R}^n$ функция $t \mapsto T_{n+1}(y, t)$ возрастает и переводит меру σ в меру $f_{P_n T(y)} \cdot \sigma$. Имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}} f_y(t) \ln f_y(t) \sigma(dt) \right) g(y) \mu_n(dy) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}} f_{P_n T(y)}(t) \ln f_{P_n T(y)}(t) \sigma(dt) \right) \mu_n(dy). \end{aligned}$$

Для каждого фиксированного y в силу одномерного случая имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} f_{P_n T(y)}(t) \ln f_{P_n T(y)}(t) \sigma(dt) &= \int_{\mathbf{R}} \ln f_{P_n T(y)}(t) \sigma \circ T_{n+1}(y, \cdot)^{-1}(dt) \\ &\geq \frac{C}{2} \int_{\mathbf{R}} |T_{n+1}(y, t) - t|^2 \sigma(dt). \end{aligned}$$

По предположению индукции получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^{n+1}} f \ln f d\mu &\geq \frac{C}{2} \int_{\mathbf{R}^n} |P_n T(y) - y|^2 \mu_n(dy) \\ &+ \frac{C}{2} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}} |T_{n+1}(y, t) - t|^2 \sigma(dt) \mu_n(dy) = \frac{C}{2} \int_{\mathbf{R}^{n+1}} |T(z) - z|^2 \mu(dz). \end{aligned}$$

Для стандартной гауссовской меры $C = 1$. Как и выше, это немедленно дает утверждение в случае $\mathbf{R}^\infty$ при условии, что ν имеет конечную энтропию. Последний шаг — точно такой же, как и в теореме 1(ii).

З а м е ч а н и е 2. Мы не знаем, какие меры ν на X могут быть получены как образы стандартной гауссовской произвольной меры μ при отображениях T типа (1). Легко видеть, что всякая такая мера должна обращаться в нуль на всех конечномерных подпространствах. Более того, $\nu(L) = 0$ для всякого борелевского линейного пространства L такого, что $\mu(L + H) = 0$. В частности, $\nu(H) = 0$.

Будем говорить, что борелевская вероятностная мера σ на прямой удовлетворяет неравенству Пуанкаре с постоянной C , если σ имеет плотность ϱ , причем

$$\int_{\mathbf{R}^1} \varphi(x)^2 \varrho(x) dx - \left(\int_{\mathbf{R}^1} \varphi(x) \varrho(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{C} \int_{\mathbf{R}^1} |\varphi'(x)|^2 \varrho(x) dx$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$.

Пусть μ — борелевская вероятностная мера на $\mathbf{R}^\infty$. Ее проекция μ_n на $\mathbf{R}^n$ обладает одномерными условными мерами μ_n^y , $y \in \mathbf{R}^{n-1}$, на последней координатной прямой в $\mathbf{R}^n$, т.е.

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) \mu(dx) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_{\mathbf{R}^1} f(y, t) \mu_n^y(dt) \mu_{n-1}(dy)$$

для всякой μ -интегрируемой функции f , где мы пишем $x = (y, t)$, $y \in \mathbf{R}^{n-1}$, $t \in \mathbf{R}^1$.

Теорема 7. *Предположим, что для борелевской вероятностной меры μ на $\mathbf{R}^\infty$ выполнено следующее условие: существует такое $C > 0$, что мера μ_1 и одномерные условные меры μ_n^y при всех n удовлетворяют неравенству Пуанкаре с постоянной C . Тогда для всякой вероятностной меры $\nu = g \cdot \mu$ найдется такое треугольное отображение $T: \mathbf{R}^\infty \rightarrow \mathbf{R}^\infty$, что $\nu = \mu \circ T^{-1}$ и $T(x) - x \in l^2$ при μ -почти всех x .*

Доказательство. Предположим сначала, что $g \ln g \in L^1(\mu)$. Пусть $g_n := d\mu_n/d\mu_n$. Поскольку $\{g_n\}$ является мартингалом, имеем $g_n \rightarrow g$ μ -п.в. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \text{Ent}_{\mu_n} g_n &= \int_{\mathbf{R}^n} g_n \ln g_n d\mu_n = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} g_{n-1} \ln g_{n-1} d\mu_{n-1} \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbf{R}^1} \frac{g_n(y, t)}{g_{n-1}(y)} \ln \frac{g_n(y, t)}{g_{n-1}(y)} \mu_n^y(dt) \right] g_{n-1}(y) \mu_{n-1}(dy) \\ &= \text{Ent}_{\mu_{n-1}}(g_{n-1}) + \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \text{Ent}_{\mu_n^y} \left(\frac{g_n(y, \cdot)}{g_{n-1}(y)} \right) g_{n-1}(y) \mu_{n-1}(dy). \end{aligned}$$

Согласно [30], если мера m удовлетворяет неравенству Пуанкаре с постоянной C и f является вероятностной плотностью относительно m , то выполнено неравенство стоимости

$$\text{Ent}_m(f) \geq W_L(m, f \cdot m),$$

где W_L — расстояние Канторовича с функцией стоимости

$$L_C(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4K(C)}, & \text{если } |x| \leq 2CK(C), \\ C|x| - C^2K(C), & \text{если } |x| > 2CK(C), \end{cases}$$

причем $K(C)$ зависит лишь от C . Следуя доказательству в [30], легко проверить, что в одномерном случае выполнено неравенство

$$\text{Ent}_m(f) \geq \int_{\mathbf{R}^1} L_C(T(x) - x) m(dx), \quad (13)$$

где T является возрастающей функцией, переводящей m в $f \cdot m$. Поэтому в силу этого результата и приведенной выше формулы для энтропий мы получаем

$$\begin{aligned} \text{Ent}_{\mu_1} g_1 &\geq \int_{\mathbf{R}^1} L_C(T_1(x_1) - x_1) \mu_1(dx_1) = \int_{\mathbf{R}^\infty} L_C(T_1(x_1) - x_1) \mu(dx), \\ \text{Ent}_{\mu_2} g_2 &\geq \int_{\mathbf{R}^\infty} L_C(T_1(x_1) - x_1) \mu(dx) \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^1} \text{Ent}_{\mu_2^{x_1}} \left(\frac{g_2(x_1, \cdot)}{g_1(x_1)} \right) g_1(x_1) \mu_1(x_1). \end{aligned}$$

Напомним, что по построению функция $x_2 \mapsto T_2(x_1, x_2)$ переводит условную вероятностную меру $\mu_2^{x_1}$ в меру $(g_2(T_1(x_1), \cdot)/g_1(T_1(x_1))) \cdot \mu_2^{T_1(x_1)}$. Поэтому (13) и равенство $\mu_2 = \int_{\mathbf{R}^1} \mu_2^{x_1} \mu_1(dx_1)$ дают

$$\begin{aligned} \text{Ent}_{\mu_2} g_2 &\geq \int_{\mathbf{R}^\infty} L_C(T_1(x_1) - x_1) \mu(dx) + \int_{\mathbf{R}^1} \text{Ent}_{\mu_2^{x_1}} \left(\frac{g_2(T_1(x_1), \cdot)}{g_1(T_1(x_1))} \right) \mu_1(dx_1) \\ &\geq \int_{\mathbf{R}^\infty} L_C(T_1(x_1) - x_1) \mu(dx) + \int_{\mathbf{R}^\infty} L_C(T_2(x_1, x_2) - x_2) \mu(dx). \end{aligned}$$

Продолжая по индукции, мы приходим к оценке

$$\text{Ent}_\mu g \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^\infty} L_C(T_i(x) - x_i) \mu(dx).$$

Так как $L_C(x)$ является квадратичной функцией при малых x , получаем, что $\sum_{i=1}^{\infty} (T_i(x) - x_i)^2 < \infty$ для μ -п.в. x . Общий случай сводится к рассмотренному выше точно так же, как в доказательстве теоремы 4.1 в [8]. Теорема 7 доказана.

Пример 3. Пусть $\mu = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n$ — такая вероятностная продуктная мера, что каждая мера μ_n удовлетворяет неравенству Пуанкаре с постоянной C . Тогда всякая вероятностная мера $g \cdot \mu$ является образом μ при таком треугольном отображении T , что $T(x) - x \in l^2$ для μ -п.в. x .

Работа была завершена во время посещения университета Билефельда. Мы благодарим М. Рёкнера за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogachev V. I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. — J. Math. Sci. (New York), 1997, v. 87, № 4, p. 3577–3731.
2. Богачев В. И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997, 352 с.
3. Богачев В. И. Основы теории меры. Т. 1, 2. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.
4. Üstünel A. S., Zakai M. Transformation of Measure on Wiener Space. Berlin: Springer-Verlag, 2000, 296 p.
5. Shepp L. A. Distinguishing a sequence of random variables from a translate of itself. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, p. 1107–1112.
6. Богачев В. И., Колесников А. В. Нелинейные преобразования выпуклых мер и энтропия плотностей Радона–Никодима. — Докл. РАН, 2004, т. 397, № 2, с. 155–159.
7. Колесников А. В. Неравенства выпуклости и нелинейные преобразования мер. — Докл. РАН, 2004, т. 396, № 3, с. 300–304.
8. Богачев В. И., Колесников А. В., Медведев К. В. О треугольных преобразованиях мер. — Докл. РАН, 2004, т. 396, № 6, с. 727–732.
9. Богачев В. И., Колесников А. В., Медведев К. В. Треугольные преобразования мер. — Матем. сб., 2005 (в печати).
10. Kolesnikov A. V. Convexity inequalities and optimal transport of infinite-dimensional measures. — J. Math. Pures Appl., 2004, v. 83, № 11, p. 1373–1404.
11. Knothe H. Contributions to the theory of convex bodies. — Michigan Math. J., 1957, v. 4, p. 39–52.
12. Talagrand M. Transportation cost for Gaussian and other product measures. — Geom. Funct. Anal., 1996, v. 6, № 3, p. 587–600.
13. Bobkov S. G. Large deviations via transference plans. — Adv. Math. Res., 2003, v. 2, p. 151–175.
14. Otto F., Villani C. Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality. — J. Funct. Anal., 2000, v. 173, № 2, p. 361–400.
15. Cordero-Erausquin D. Some applications of mass transport to Gaussian-type inequalities. — Arch. Rational Mech. Anal., 2002, v. 161, № 3, p. 257–269.
16. Rachev S. T., Rüschendorf L. Mass Transportation Problems. V. I. New York: Springer-Verlag, 1998, 508 p.

17. *Fernique X.* Extension du théorème de Cameron–Martin aux translations aléatoires. — *Ann. Probab.*, 2003, v. 31, № 3, p. 1296–1304.
18. *Feyel D., Üstünel A.S.* Measure transport on Wiener space and the Girsanov theorem. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2002, v. 334, № 11, p. 1025–1028.
19. *Feyel D., Üstünel A.S.* Monge–Kantorovitch measure transportation and Monge–Ampère equation on Wiener space. — *Probab. Theory Related Fields*, 2004, v. 128, № 3, p. 347–385.
20. *Ledoux M.* The Concentration of Measure Phenomenon. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001, 181 p.
21. *Александрова Д. Е.* Сходимость треугольных преобразований мер. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, т. 50, в. 1, с. 145–150.
22. *Borell C.* A note on conditional probabilities of a convex measure. — *Lecture Notes in Phys.*, 1978, v. 77, p. 68–72.
23. *Üstünel A. S., Zakai M.* Measures induced on Wiener space by monotone shifts. — *Probab. Theory Related Fields*, 1996, v. 105, № 4, p. 545–563.
24. *Brenier Y.* Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. — *Comm. Pure Appl. Math.*, 1991, v. 44, № 4, p. 375–417.
25. *McCann R. J.* Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps. — *Duke Math. J.*, 1995, v. 80, № 2, p. 309–323.
26. *Üstünel A. S., Zakai M.* On the uniform integrability of the Radon–Nikodým densities for Wiener measure. — *J. Funct. Anal.*, 1998, v. 159, № 2, p. 642–663.
27. *Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M.* Dirichlet operators via stochastic analysis. — *J. Funct. Anal.*, 1995, v. 128, № 1, p. 102–138.
28. *Kulik A. M.* Log-Sobolev inequality, exponential integrability and large deviation estimates for $C(\alpha, \beta)$ log-concave measures. — *Random Oper. Stochastic Equations*, 2002, v. 10, № 2, p. 105–122.
29. *Кулик А. М., Пилипенко А. Ю.* Нелинейные преобразования гладких мер на бесконечномерных пространствах. — *Укр. матем. журн.*, 2000, т. 52, № 9, с. 1226–1250.
30. *Bobkov S. G., Gentil I., Ledoux M.* Hypercontractivity of Hamilton–Jacobi equations. — *J. Math. Pures Appl.*, 2001, v. 80, № 7, p. 669–696.

Поступила в редакцию
1.VII.2004