Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Е. Александрова, Сходимость треугольных преобразований мер, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 1, 145–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:34:15

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2005 г.

АЛЕКСАНДРОВА Д. Е.*

СХОДИМОСТЬ ТРЕУГОЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МЕР¹⁾

Доказано, что если борелевская вероятностная мера μ на счетном произведении суслинских пространств удовлетворяет некоторому условию безатомичности, то для всякой борелевской вероятностной меры ν на этом произведении существует треугольное отображение $T_{\mu,\nu}$, переводящее μ в ν . Показано, что в случае метризуемых пространств имеется такой выбор треугольных отображений, что из сходимости по вариации мер μ_n к μ и мер ν_n к ν следует сходимость отображений T_{μ_n,ν_n} к $T_{\mu,\nu}$ по мере μ .

Ключевые слова и фразы: треугольное отображение, условная мера, сходимость по вариации.

В недавних работах [1]–[6] был получен ряд интересных результатов о треугольных преобразованиях мер, т.е. таких отображениях $T = (T_i)$ пространства $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^\infty$, что каждая координатная функция T_i зависит только от переменных $x_1, \dots, x_i$. С помощью треугольных преобразований в указанных работах решена известная старая проблема о существовании преобразования бесконечномерного гауссовского распределения γ в абсолютно непрерывное посредством абстрактного отображения Гирсанова, т.е. отображения вида $T(x) = x + F(x)$, где F принимает значения в пространстве Камерона–Мартина меры γ (о гауссовских мерах см. [7]). В этих же работах даны и другие интересные применения треугольных отображений. Ясно, что треугольные отображения можно естественно определить на конечных или счетных произведениях произвольных пространств. Данная работа посвящена изучению треугольных преобразований мер на произведениях суслинских пространств. Напомним, что пространство X называется суслинским, если оно является образом полного сепарабельного метрического пространства при непрерывном отображении. Пусть X_n , где $n \in \mathbf{N}$, — суслинские пространства, и пусть μ и ν — борелевские вероятностные меры на $X := \prod_{n=1}^\infty X_n$. Мы покажем, что найдется такое борелевское отображение $T: X \rightarrow X$ вида

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto (T_1(x_1), T_2(x_1, x_2), \dots, T_n(x_1, \dots, x_n), \dots),$$

что $\mu \circ T^{-1} = \nu$. В работах [1], [2] был рассмотрен случай, когда отображаемая мера μ на $\mathbf{R}^n$ абсолютно непрерывна. Однако приведенные там рассуждения нетрудно модифицировать так, чтобы охватить меры из более широкого класса, рассматриваемого ниже. Для удобства читателя мы приведем полное доказательство. Затем будет установлено существование треугольных отображений с одним полезным свойством непрерывности, что и составляет основной результат работы.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке проектом РФФИ 04-01-00748 и грантом DFG 436 RUS 113/343/0(R).

Напомним (см. [8, гл. 10]), что если на произведении двух суслинских пространств X_1 и X_2 задана борелевская вероятностная мера μ , имеющая образ μ_1 при проекции $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ на X_1 , то на X_2 существуют такие условные вероятностные меры μ^{x_1} , где $x_1 \in X_1$, что для всякого борелевского множества $B \subset X_1 \times X_2$ функции $x_1 \mapsto \mu^{x_1}(B_{x_1})$ и $x_1 \mapsto \nu^{x_1}(B_{x_1})$, где $B_{x_1} := \{x_2: (x_1, x_2) \in B\}$, измеримы по Борелю и справедливы равенства

$$\mu(B) = \int_{X_1} \mu^{x_1}(B_{x_1}) \mu_1(dx_1), \quad \nu(B) = \int_{X_1} \nu^{x_1}(B_{x_1}) \nu_1(dx_1).$$

Теорема 1. Пусть X_1 и X_2 — суслинские пространства, и пусть μ и ν — борелевские вероятностные меры на $X_1 \times X_2$. Предположим, что проекция меры μ на первый сомножитель и соответствующие условные меры μ^{x_1} на X_2 не имеют атомов. Тогда найдется такое борелевское отображение $T: X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ вида $(x_1, x_2) \mapsto (T_1(x_1), T_2(x_1, x_2))$, что $\mu \circ T^{-1} = \nu$.

Доказательство. Сначала предположим, что $X_1 = X_2 = [0, 1]$. Напомним конструкцию из работ [1], [2]. Пусть μ_1 и ν_1 — проекции μ и ν соответственно на X_1 . Как указано выше, при каждом x_1 выберем условные борелевские вероятностные меры μ^{x_1} и ν^{x_1} на $[0, 1]$. Существует такая возрастающая функция T_1 , что $\mu \circ T_1^{-1} = \nu_1$. А именно, T_1 — каноническое отображение, определяемое через функцию распределения следующим образом. Положим $F_{\mu_1}(t) := \mu_1([0, t])$ для $t \in [0, 1]$, $G_{\nu_1}(u) := \inf\{s \in [0, 1]: F_{\nu_1}(s) \geq u\}$ для $u \in [0, 1]$ и $T_1 := G_{\nu_1} \circ F_{\mu_1}$. При этом F_{μ_1} переводит меру μ_1 в меру Лебега λ на $[0, 1]$, а G_{ν_1} переводит λ в ν_1 . Это возможно, ибо μ_1 не имеет атомов. Отметим, что функции F_{μ_1} и G_{ν_1} непрерывны слева, поэтому такова и функция T_1 .

Далее, для каждого $x_1 \in [0, 1]$ возьмем каноническую возрастающую функцию $x_2 \mapsto T_2(x_1, x_2)$, переводящую условную меру μ^{x_1} в условную меру $\nu^{T_1(x_1)}$. Получаем борелевскую функцию T_2 двух переменных. Действительно, по аргументу x_2 функция T_2 возрастает и непрерывна слева. Поэтому ее борелевость следует из борелевости по x_1 при каждом фиксированном x_2 (см. [8, лемма 6.4.6]). Для проверки борелевости по x_1 напомним, что $T_2(x_1, x_2) = G^{T_1(x_1)}(F_{\mu^{x_1}}(x_2))$. Пусть

$$G^z(t) := \inf\{s \in [0, 1]: \nu^z([0, s]) \geq t\}, \quad z, t \in [0, 1].$$

Так как T_1 является борелевской функцией аргумента x_1 , то достаточно установить борелевость функции $(z, t) \mapsto G^z(t)$ двух переменных, причем в силу ее непрерывности слева по t надо убедиться лишь в измеримости по Борелю функции $g(z) := G^z(t)$ по z при фиксированном t . Положим $E := \{(z, s): \nu^z([0, s]) \geq t\}$. Множество E является борелевским в силу выбора условных мер и непрерывности слева функций распределения. Напомним, что если борелевское множество D в квадрате таково, что все его вертикальные сечения непусты и σ -компактны, то оно содержит график некоторой борелевской функции (см. [8, гл. 6]). Применим это утверждение к борелевским множествам $E_k := (E + k^{-1}e_2) \setminus E$, вертикальные сечения которых — промежутки (открытые, замкнутые или полуоткрытые) длины $1/k$, и возьмем борелевские функции h_k такие, что график h_k содержится в E_k . Ясно, что последовательность $\{h_k(z)\}$ сходится при каждом z . Ее предел $h(z)$ является борелевской функцией. Остается заметить, что $h(z) = g(z)$ (это следует из самого вида E и $g(z)$).

Проверим, что $\mu \circ T^{-1} = \nu$. Для всякой ограниченной борелевской функции φ на $[0, 1]^2$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{[0, 1]^2} \varphi \circ T d\mu &= \int_{[0, 1]} \int_{[0, 1]} \varphi(T_1(x_1), T_2(x_1, x_2)) \mu^{x_1}(dx_2) \mu_1(dx_1) \\ &= \int_{[0, 1]} \int_{[0, 1]} \varphi(T_1(x_1), y_2) \nu^{T_1(x_1)}(dy_2) \mu_1(dx_1) \\ &= \int_{[0, 1]} \int_{[0, 1]} \varphi(y_1, y_2) \nu^{y_1}(dy_2) \nu_1(dy_1) = \int_{[0, 1]^2} \varphi d\nu, \end{aligned}$$

откуда получаем равенство $\mu \circ T^{-1} = \nu$.

В общем случае существуют инъективные борелевские функции $h_i: X_i \rightarrow [0, 1]$ (см. [8, теорема 6.5.7]). Поэтому пространства X_i можно считать суслинскими подмножествами отрезка $[0, 1]$. В множестве X_1 найдем такое борелевское подмножество Y_1 полной меры относительно μ_1 , что $T_1(Y_1) \subset X_1$. Вне Y_1 переопределим T_1 каким-нибудь постоянным значением из X_1 . Это дает борелевскую функцию $\tilde{T}_1$ на X_1 со значениями в X_1 , которая μ_1 -п.в. равна T_1 . Наконец, можно найти такую борелевскую функцию $\tilde{T}_2$ на $X_1 \times X_2$ со значениями в X_2 , что $\tilde{T}_2(x_1, x_2) = T_2(x_1, x_2)$ для μ -п.в. (x_1, x_2) . Для этого заметим, что μ -мера множества $\{(x_1, x_2): T_2(x_1, x_2) \in X_2\}$ равна 1. В самом деле, это множество — суслинское. При μ_1 -почти каждом фиксированном x_1 условная мера μ^{x_1} сосредоточена на X_2 , а при ν_1 -почти каждом фиксированном y_1 условная мера ν^{y_1} сосредоточена на X_2 . Поэтому для μ_1 -п.в. x_1 условная мера $\nu^{T_1(x_1)}$ сосредоточена на X_2 , т.е. $T_2(x_1, x_2) \in X_2$ для μ -п.в. (x_1, x_2) . Теорема доказана.

Пусть X_n , где $n \in \mathbb{N}$, — суслинские пространства и $X := \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Через $\mathcal{B}$ будем обозначать борелевскую σ -алгебру пространства X . Для каждого n обозначим через π_n проекцию на $\prod_{j=1}^n X_j$.

Следствие 1. Пусть μ и ν — борелевские вероятностные меры на X . Предположим, что при каждом n проекция меры μ на $\prod_{j=1}^n X_j$ и условные меры на X_n для этой проекции не имеют атомов. Тогда найдется такое борелевское отображение $T: X \rightarrow X$ вида $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto (T_1(x_1), T_2(x_1, x_2), \dots, T_n(x_1, \dots, x_n), \dots)$, что $\mu \circ T^{-1} = \nu$.

Доказательство. Индукция по n доказывает утверждение для всякого конечного произведения пространств X_n . Возможность перехода от n сомножителей к $n + 1$ вытекает из доказанной теоремы (можно и просто повторить изложенные рассуждения для построения компоненты T_{n+1} при заданных компонентах $T_1, \dots, T_n$). Обозначая через μ_n и ν_n проекции μ и ν на $\prod_{j=1}^n X_j$ и используя случай конечного произведения, получаем такие борелевские отображения $T_n: \prod_{j=1}^n X_j \rightarrow X_n$, что $\mu_n \circ (T_1, \dots, T_n)^{-1} = \nu_n$ для всех n . Тогда $\mu \circ T^{-1} = \nu$, где $T = (T_n)_{n=1}^{\infty}$. Следствие доказано.

Доказанные утверждения справедливы для абстрактных измеримых пространств, изоморфных (в смысле измеримой структуры) суслинским пространствам. Отметим, что в случае, когда $X_n = \mathbf{R}^1$ для всех n , описанное построение позволяет получить борелевское треугольное отображение $T_{\mu, \nu} = (T_n)$, заданное на некотором борелевском множестве $\Omega \subset X$ полной μ -меры и обладающее следующим свойством: каждая функция T_n определена на борелевском множестве $\Omega_n \subset \mathbf{R}^n$ полной меры относительно проекции μ , при всех $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$ множества

$$\{x_n: (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega_n\}$$

являются промежутками (ограниченными или неограниченными), причем функции $x_n \mapsto T_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ возрастают на этих промежутках. Конечно, T_n можно продолжить до борелевской функции на всем $\mathbf{R}^n$, но не всегда можно добиться монотонности по x_n для продолжения.

Ясно, что построенные выше треугольные отображения отнюдь не единственны. В работе [2] показана существенная единственность возрастающих треугольных отображений в случае, когда перемножаются копии вещественной прямой (или интервала). В этом случае возрастающие треугольные отображения называются в [2] каноническими. Построенные выше отображения будем называть квазиканоническими: они совпадают с каноническими отображениями при изоморфном отождествлении рассматриваемых пространств с подмножествами интервала. Для таких отображений существенная единственность имеет место с точностью до автоморфизма. Теперь мы установим непрерывную зависимость канонических треугольных отображений от преобразуемых мер при наделении пространства мер сходимость по вариации.

Обозначим через $\mathcal{P}_0$ класс всех борелевских вероятностных мер μ на X , удовлетворяющих условию предыдущего следствия. Через $\mathcal{P}$ обозначим множество всех борелевских вероятностных мер на X .

Теорема 2. Каждой паре мер $\mu \in \mathcal{P}_0$ и $\nu \in \mathcal{P}$ можно сопоставить борелевское треугольное отображение $T_{\mu, \nu}$, переводящее μ в ν и обладающее следующим

свойством: если последовательность мер $\mu_j \in \mathcal{P}_0$ сходится по вариации к мере $\mu \in \mathcal{P}_0$, а последовательность мер $\nu_j \in \mathcal{P}$ сходится по вариации к мере $\nu \in \mathcal{P}$, то некоторая подпоследовательность отображений T_{μ_j, ν_j} сходится к $T_{\mu, \nu}$ μ -п.в.

В частности, если X метризуемо (т.е. все пространство X_n метризуемы), то отображения T_{μ_j, ν_j} сходятся по мере μ к отображению $T_{\mu, \nu}$.

Доказательство. Мы покажем, что нужным свойством обладает любая последовательность квазиканонических отображений, полученная с помощью инъективного отображения $h = (h_n): X \rightarrow [0, 1]^\infty$, где функции $h_n: X_n \rightarrow [0, 1]$ не зависят от рассматриваемых мер и строятся следующим образом. Известно (см., например, [8, следствие 6.1.14]), что существуют непрерывные сюръективные отображения f_n из пространства $\mathcal{R}$ иррациональных чисел интервала $(0, 1)$ на X_n . По теореме об измеримом выборе (см. [8, теорема 6.9.1]) найдутся такие инъективные функции $h_n: X_n \rightarrow [0, 1]$, что $f_n(h_n(x_n)) = x_n$ для всех $x_n \in X_n$, причем функция h_n измерима относительно σ -алгебры, порожденной суслинскими множествами в X_n (в частности, отображение h измеримо относительно всякой борелевской меры на X). Продолжим f_n постоянным значением вне $\mathcal{R}$ и получим борелевское отображение $f = (f_n): [0, 1]^\infty \rightarrow X$, ограничение которого на $\mathcal{R}^\infty$ непрерывно, причем $f(h(x)) = x$ для всех $x \in X$. Если наше утверждение доказано для мер на $[0, 1]^\infty$, то оно остается в силе и для мер на X . Действительно, положим $\mu' := \mu \circ h^{-1}$, $\nu' := \nu \circ h^{-1}$. Ясно, что μ' входит в класс $\mathcal{P}_0$ на $[0, 1]^\infty$. Поэтому можно положить $T_{\mu, \nu} := f \circ T_{\mu', \nu'} \circ h$. Тогда $\mu \circ T_{\mu, \nu}^{-1} = \nu$, ибо $\nu' \circ f^{-1} = \nu$ в силу тождества $f(h(x)) = x$. Кроме того, из сходимости подпоследовательности $T_{\mu'_{j_k}, \nu'_{j_k}}(x)$ к $T_{\mu', \nu'}(x)$ μ' -п.в. следует сходимость $T_{\mu_{j_k}, \nu_{j_k}}(x)$ к $T_{\mu, \nu}(x)$ μ -п.в., поскольку $h(x) \in \mathcal{R}^\infty$ для μ -п.в. x , а f непрерывно на $\mathcal{R}^\infty$. Наконец, отметим, что отображение $T_{\mu, \nu}$ является треугольным и μ -измеримым, но не обязательно борелевским. Переопределим n -ую компоненту $T_{\mu, \nu}$ на множестве μ -меры нуль так, чтобы получилось борелевское отображение на $\prod_{i=1}^\infty X_i$. Полученное борелевское треугольное отображение, обозначаемое прежним символом, обладает нужными свойствами. Поэтому далее считаем, что речь идет о мерах на произведениях отрезка $[0, 1]$. Из предыдущих построений явствует, что достаточно рассмотреть конечные произведения. Проверим, что некоторая подпоследовательность в $\{T_{\mu_j, \nu_j}\}$ сходится почти всюду. Поскольку это утверждение применимо ко всякой подпоследовательности в $\{T_{\mu_j, \nu_j}\}$, то с учетом теоремы Рисса в метризуемом случае утверждение о сходимости по мере равносильно утверждению о почти всюду сходящейся подпоследовательности.

Сначала рассмотрим случай, когда все меры μ_j совпадают с мерой μ (фактически нам нужен будет случай, когда μ — мера Лебега). Пусть $n = 1$. Тогда $\lim_{j \rightarrow \infty} T_{\mu, \nu_j}(t) = T_{\mu, \nu}(t)$ для почти каждого t , поскольку F_μ строго возрастает и $\lim_{j \rightarrow \infty} G_{\nu_j}(u) = G_\nu(u)$ для всех точек $u \in [0, 1]$, в которых функция G_ν непрерывна, т.е. за исключением не более чем счетного множества. Пусть теорема доказана для некоторого $n \geq 1$, и пусть даны вероятностные меры ν_j , сходящиеся по вариации к мере ν на $I_{n+1} := [0, 1]^{n+1}$. Проверим, что $\{T_{\mu, \nu_j}\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся μ -п.в.

Напомним следующий факт, представляющий собой простую модификацию следствия 9.9.11 в [8]. Пусть борелевские вероятностные меры μ_j на пространстве X сходятся по вариации к борелевской мере μ , $T_j: X \rightarrow X$ — борелевские преобразования, сходящиеся μ -п.в. к борелевскому преобразованию T , причем меры $\nu_j := \mu \circ T_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\nu := \mu \circ T^{-1}$. Тогда для всякой последовательности $\mathcal{B}$ -измеримых функций φ_j , сходящейся по мере ν к функции φ , функции $\varphi_j \circ T_j$ сходятся по мере μ к функции $\varphi \circ T$. В [8] предполагалось, что меры $\mu \circ T_j^{-1}$ и $\mu \circ T^{-1}$ абсолютно непрерывны относительно μ , а вместо сходимости по вариации предполагалось лишь, что плотность $d(\mu \circ T_j^{-1})/d\mu$ равномерно интегрируемы. Для обоснования заметим, что общий случай очевидным образом сводится к случаю, когда функции φ_j и φ принимают значения в $[0, 1]$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi_j \circ T_j - \varphi \circ T\|_{L^1(\mu)} &\leq \|\varphi_j \circ T_j - \varphi_j \circ T\|_{L^1(\mu)} + \|\varphi_j \circ T - \varphi \circ T\|_{L^1(\mu)} \\ &\leq \|\nu_j - \nu\| + \|\varphi_j - \varphi\|_{L^1(\nu)}, \end{aligned}$$

что стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$. Ясно, что аналогичное утверждение остается в силе для отображений φ_j и φ со значениями в сепарабельном метрическом пространстве.

Обозначим через μ_0 и ν_0 проекции μ и ν на $I_n = [0, 1]^n$. В силу предположения индукции можно считать, что отображения $\pi_n \circ T_{\mu, \nu_j}$ сходятся μ_0 -п.в. к отображению $\pi_n \circ T_{\mu, \nu}$, поскольку по нашему построению они являются естественными продолжениями на I_{n+1} отображений $S_j := T_{\mu_0, \nu_j \circ \pi_n^{-1}}$ и $S := T_{\mu_0, \nu \circ \pi_n^{-1}}$ на I_n . Из описанного выше индуктивного построения компонент канонических отображений и рассмотренного одномерного случая следует, что достаточно получить слабую сходимость одномерных условных мер $\nu_j^{S_j(y)}$ к условной мере $\nu^{S(y)}$ для μ_0 -почти всех $y \in I_n$. Для этого, в свою очередь, достаточно иметь сходимость μ_0 -почти всюду интегралов

$$\psi_j(S_j(y)) := \int_0^1 t^k \nu_j^{S_j(y)}(dt)$$

к интегралу

$$\psi(S(y)) := \int_0^1 t^k \nu^{S(y)}(dt)$$

при каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$. Более того, как указано выше, достаточно иметь это для некоторой подпоследовательности индексов j . Поэтому можно считать, что меры ν_j^z сходятся по вариации к мере ν^z для ν_0 -п.в. z . В самом деле, возьмем вероятностную меру σ , относительно которой абсолютно непрерывны все меры ν_j . Тогда меры ν_j и ν задаются плотностями f_j и f относительно σ . Точки из I_{n+1} будем записывать в виде (y, x_{n+1}) , $y \in I_n$. Пусть σ_0 – проекция σ на I_n и σ^y – условные меры на $[0, 1]$. Условные меры ν_j^y и ν^y на $[0, 1]$ имеют вид

$$\nu_j^y = f_j(y, \cdot) \Theta_j(y)^{-1} \sigma^y, \quad \nu^y = f(y, \cdot) \Theta(y)^{-1} \sigma^y,$$

где $\Theta_j(y) := \int_{[0,1]} f_j(y, x_{n+1}) \sigma^y(dx_{n+1})$, $\Theta(y) := \int_{[0,1]} f(y, x_{n+1}) \sigma^y(dx_{n+1})$. Для точек y из множества σ_0 -меры нуль таких, что $\Theta(y) = 0$ или $\Theta_j(y) = 0$, в качестве условных берутся меры σ^y . Функции Θ_j и Θ являются плотностями проекций мер ν_j и ν на I_n относительно σ_0 и потому $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\Theta - \Theta_j\|_{L^1(\sigma_0)} = 0$. Переходя к подпоследовательности, считаем, что функции Θ_j сходятся к Θ почти всюду относительно σ_0 . Для всякой ограниченной борелевской функции ξ на I_{n+1} справедливо равенство

$$\int_{I_{n+1}} \xi d(\nu_j - \nu) = \int_{I_n} \int_{[0,1]} \xi(y, x_{n+1}) [f_j(y, x_{n+1}) - f(y, x_{n+1})] \sigma^y(dx_{n+1}) \sigma_0(dy),$$

откуда при $\xi = \text{sign}(f_j - f)$ получаем

$$\|\nu_j - \nu\| = \int_{I_n} \int_{[0,1]} |f_j(y, x_{n+1}) - f(y, x_{n+1})| \sigma^y(dx_{n+1}) \sigma_0(dy).$$

Сходимость по вариации означает, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{I_n} \int_{[0,1]} |f_j(y, x_{n+1}) - f(y, x_{n+1})| \sigma^y(dx_{n+1}) \sigma_0(dy) = 0.$$

Еще раз перейдя к подпоследовательности, получаем, что меры $f_j(y, \cdot) \cdot \sigma^y$ сходятся по вариации к мере $f(y, \cdot) \cdot \sigma^y$ для σ_0 -п.в. y . Вместе со сходимостью $\Theta_j(y)$ к $\Theta(y)$ это дает сходимость по вариации для условных мер в полученной подпоследовательности. Тогда функции $z \mapsto \psi_j(z)$ сходятся ν_0 -п.в. к функции $z \mapsto \psi(z)$. Ввиду сходимости мер $\mu_0 \circ S_j^{-1}$ к мере $\mu_0 \circ S^{-1}$ по вариации и упомянутого выше факта, получаем сходимость функций $\psi_j(S_j(y))$ к $\psi(S(y))$ по мере μ_0 . Перейдя к подпоследовательности, добиваемся сходимости почти всюду.

Теперь рассмотрим другой частный случай, когда сходящаяся по вариации последовательность мер μ_j отображается в меру Лебега λ на $(0, 1)^n$. В этом случае все компоненты треугольных отображений преобразуют условные меры или одномерные проекции в меру Лебега, т.е. представляют собой функции распределения соответствующих мер. Поэтому, рассуждая по индукции, достаточно перейти к подпоследовательности мер, для которой имеет место сходимость по вариации условных мер.

Наконец, в общем случае имеем $T_{\mu_j, \nu_j} = T_{\lambda, \nu_j} \circ T_{\mu_j, \lambda}$. Ввиду двух рассмотренных случаев последовательности отображений $T_{\mu_j, \lambda}$ и T_{λ, ν_j} сходятся по мере относительно мер μ и λ соответственно. Поскольку меры $\mu \circ T_{\mu_j, \lambda}^{-1}$ сходятся по вариации к мере λ

(это следует из того, что $\mu_j \circ T_{\mu_j, \lambda}^{-1} = \lambda$ и $\|\mu_j - \mu\| \rightarrow 0$), то упомянутый выше факт указывает нужную сходимость. Теорема 2 доказана.

Доказанная теорема усиливает результат работ [1], [2], где рассматривалась только одна мера μ , причем меры μ и ν_j предполагались абсолютно непрерывными относительно меры Лебега на $\mathbf{R}^n$.

Отметим, что в работе [9] даны эффективно проверяемые достаточные условия сходимости по вариации образов абсолютно непрерывной меры μ на $\mathbf{R}^n$ при слабо дифференцируемых отображениях T_j . В случае канонических треугольных отображений эти условия можно заметно ослабить. Это явствует из установленных в [2] формул замены переменных для канонических треугольных отображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богачев В. И., Колесников А. В., Медведев К. В. О треугольных преобразованиях мер. — Докл. РАН, 2004, т. 396, № 6, с. 727–732.
2. Богачев В. И., Колесников А. В., Медведев К. В. Треугольные преобразования мер. — Матем. сб., 2005 (в печати).
3. Богачев В. И., Колесников А. В. Нелинейные преобразования выпуклых мер и энтропия плотностей Радона–Никодима. — Докл. РАН, 2004, т. 397, № 2, с. 155–159.
4. Богачев В. И., Колесников А. В. Нелинейные преобразования выпуклых мер. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 1, с. 27–51.
5. Колесников А. В. Неравенства выпуклости и нелинейные преобразования мер. — Докл. РАН, 2004, т. 396, № 3, с. 300–304.
6. Kolesnikov A. V. Convexity inequalities and optimal transport of infinite-dimensional measures. — J. Math. Pures Appl., 2004, v. 83, № 11, p. 1373–1404.
7. Богачев В. И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997, 352 с.
8. Богачев В. И. Основы теории меры. Т. 1, 2. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.
9. Александрова Д. Е., Богачев В. И., Пилипенко А. Ю. О сходимости индуцированных мер по вариации. — Матем. сб., 1999, т. 190, № 9, с. 3–20.

Поступила в редакцию
1.VII.2004

© 2005 г.

МАЛЫШЕВ В. А.*, МАНИТА А. Д.*

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В МОДЕЛИ СИНХРОНИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ¹⁾

На вещественной прямой $\mathbf{R}$ рассматриваются частицы двух типов $i = 1, 2$, и пусть N_i — число частиц типа i . Каждая частица типа i движется с постоянной скоростью v_i . Кроме этого, любая частица типа $i = 1, 2$ скачет к любой частице типа $j = 1, 2$ с интенсивностью $N_j^{-1} \alpha_{ij}$. Мы находим фазовый переход, связанный с кластеризацией (синхронизацией) этой системы частиц, на различных временных шкалах $t = t(N)$ по отношению к $N = N_1 + N_2$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: malyshev@lbss.math.msu.su, e-mail: manita@mech.math.msu.su

¹⁾ Первый автор поддержан РФФИ (грант 02-01-00415); второй автор поддержан РФФИ (грант 02-01-00945).