Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Малышев, А. Д. Манита, Фазовые переходы в модели синхронизации времени, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 1, 150–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp163>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:50:01

(это следует из того, что $\mu_j \circ T_{\mu_j, \lambda}^{-1} = \lambda$ и $\|\mu_j - \mu\| \rightarrow 0$), то упомянутый выше факт указывает нужную сходимость. Теорема 2 доказана.

Доказанная теорема усиливает результат работ [1], [2], где рассматривалась только одна мера μ , причем меры μ и ν_j предполагались абсолютно непрерывными относительно меры Лебега на $\mathbf{R}^n$.

Отметим, что в работе [9] даны эффективно проверяемые достаточные условия сходимости по вариации образов абсолютно непрерывной меры μ на $\mathbf{R}^n$ при слабо дифференцируемых отображениях T_j . В случае канонических треугольных отображений эти условия можно заметно ослабить. Это явствует из установленных в [2] формул замены переменных для канонических треугольных отображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богачев В. И., Колесников А. В., Медведев К. В. О треугольных преобразованиях мер. — Докл. РАН, 2004, т. 396, № 6, с. 727–732.
2. Богачев В. И., Колесников А. В., Медведев К. В. Треугольные преобразования мер. — Матем. сб., 2005 (в печати).
3. Богачев В. И., Колесников А. В. Нелинейные преобразования выпуклых мер и энтропия плотностей Радона–Никодима. — Докл. РАН, 2004, т. 397, № 2, с. 155–159.
4. Богачев В. И., Колесников А. В. Нелинейные преобразования выпуклых мер. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 1, с. 27–51.
5. Колесников А. В. Неравенства выпуклости и нелинейные преобразования мер. — Докл. РАН, 2004, т. 396, № 3, с. 300–304.
6. Kolesnikov A. V. Convexity inequalities and optimal transport of infinite-dimensional measures. — J. Math. Pures Appl., 2004, v. 83, № 11, p. 1373–1404.
7. Богачев В. И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997, 352 с.
8. Богачев В. И. Основы теории меры. Т. 1, 2. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.
9. Александрова Д. Е., Богачев В. И., Пилипенко А. Ю. О сходимости индуцированных мер по вариации. — Матем. сб., 1999, т. 190, № 9, с. 3–20.

Поступила в редакцию
1.VII.2004

© 2005 г.

МАЛЫШЕВ В. А.*, МАНИТА А. Д.*

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В МОДЕЛИ СИНХРОНИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ¹⁾

На вещественной прямой $\mathbf{R}$ рассматриваются частицы двух типов $i = 1, 2$, и пусть N_i — число частиц типа i . Каждая частица типа i движется с постоянной скоростью v_i . Кроме этого, любая частица типа $i = 1, 2$ скачет к любой частице типа $j = 1, 2$ с интенсивностью $N_j^{-1} \alpha_{ij}$. Мы находим фазовый переход, связанный с кластеризацией (синхронизацией) этой системы частиц, на различных временных шкалах $t = t(N)$ по отношению к $N = N_1 + N_2$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: malyshev@lbss.math.msu.su, e-mail: manita@mech.math.msu.su

¹⁾ Первый автор поддержан РФФИ (грант 02-01-00415); второй автор поддержан РФФИ (грант 02-01-00945).

Ключевые слова и фразы: марковские процессы, системы стохастических частиц, модели синхронизации.

1. Модель и основной результат. Модель, которую мы рассматриваем, проще всего описать в терминах системы частиц. На вещественной прямой имеется N_1 частиц типа 1 и N_2 частиц типа 2, $N = N_1 + N_2$. Каждая частица типа $i = 1, 2$ осуществляет два независимых движения. Во-первых, она движется с постоянной скоростью v_i в положительном направлении. В дальнейшем предполагается, что v_i различны, поэтому без ограничения общности можно считать, что $0 \leq v_1 < v_2$. Вырожденный случай $v_1 = v_2$ является особым и будет изучен отдельно.

Во-вторых, на любом интервале времени $[t, t + dt]$ каждая частица типа i независимо от других частиц с вероятностью $\alpha_{ij} dt$ принимает решение совершить скачок к некоторой частице типа j , при этом выбор конкретной частицы j -го типа, к которой будет осуществлен перескок, среди всех частиц j -го типа производится с вероятностью $1/N_j$. Здесь α_{ij} — заданные неотрицательные параметры, $i, j = 1, 2$. В дальнейшем, если не сказано обратное, мы предполагаем, что $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, $\alpha_{12}, \alpha_{21} > 0$.

После такого мгновенного перескока частица типа i продолжает движение с прежней скоростью v_i . Таким образом, определена цепь Маркова

$$\xi_{N_1, N_2}(t) = (x_1^{(1)}(t), \dots, x_{N_1}^{(1)}(t); x_1^{(2)}(t), \dots, x_{N_2}^{(2)}(t)), \quad (1)$$

где $x_k^{(i)}(t)$ — координата k -й частицы типа i в момент времени t . Предположим, что в начальный момент времени 0 координаты всех частиц $x_k^{(i)}(0)$ заданы. Нас будет интересовать поведение этой системы на больших временах при различном выборе временных шкал $N \rightarrow \infty$, $t = t(N) \rightarrow \infty$.

В других терминах, вышесказанное может быть проинтерпретировано как задача синхронизации времени. В общем виде задача синхронизации времени ставится следующим образом. Имеется N систем (процессоров, устройств, индивидуумов и т.п.). Есть абсолютное (физическое) время t , в то время как каждый процессор j выполняет однородное задание в своем собственном времени $t_j = v_j t$, $v_j > 0$. Собственное время измеряется количеством v_j работы, выполняемой процессором в единицу физического времени при условии, что он изолирован от других процессоров. Однако между каждой парой процессоров имеется обмен сообщениями, который приводит к значительным изменениям их собственного времени. В нашем случае координаты $x_k^{(i)}(t)$ можно интерпретировать как модифицированные собственные времена частиц-процессоров, тогда как немодифицированное собственное время процессора имеет вид $x_k^{(i)}(0) + v_i t$.

Существует много вариантов формулировки такого рода проблем (см., например, [1], [4], [6]). Мы будем называть рассматриваемую здесь модель основной (базисной) моделью, поскольку в ней нет ограничений на скачкообразный процесс. Множество других проблем включают такого рода ограничения, к примеру, разрешаются только скачки влево. Благодаря отсутствию таких ограничений рассматриваемая нами задача, как мы увидим ниже, является «линейной задачей» в том смысле, что после скейлинга (перемасштабирования) она приводит к линейным уравнениям. Тем не менее модель проявляет нетривиальное поведение — мы наблюдаем различные картины на разных временных шкалах.

Имеются, однако, другие интересные интерпретации нашей модели, связанные с психологией, биологией и физикой. Например, в социальной психологии восприятие времени и жизненные ритмы сильно зависят от социальных контактов и общения. Мы не будем углубляться здесь в эти детали.

Мы покажем, что эволюция процесса проходит через три последовательные стадии: начальная десинхронизация до критической шкалы, затухание десинхронизации в критической области и заключительная стабилизация.

Рассмотрим эмпирические средние (центры масс) и эмпирические дисперсии

$$\overline{x^{(i)}}(t) = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} x_k^{(i)}(t), \quad S_i^2(t) = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} (x_k^{(i)}(t) - \overline{x^{(i)}}(t))^2$$

для типов 1 и 2, а также их математические ожидания

$$\mu_i(t) = \overline{\mathbf{E}x^{(i)}}(t), \quad l_{12}(t) = \mu_1(t) - \mu_2(t), \quad R_i(t) = \mathbf{E}S_i^2(t).$$

Наш первый результат относится к асимптотическому поведению эмпирических средних.

Теорема 1. Для любой последовательности троек (N_1, N_2, t) таких, что $\min(N_1, N_2) \rightarrow \infty$ и $t = t(N_1, N_2) \rightarrow \infty$, имеют место следующие утверждения:

$$l_{12}(t) \rightarrow \frac{v_1 - v_2}{\alpha_{12} + \alpha_{21}}, \quad \frac{\mu_i(t)}{t} \rightarrow \frac{\alpha_{12}v_2 + \alpha_{21}v_1}{\alpha_{12} + \alpha_{21}}.$$

Предположим теперь, что $N_i = [c_i N]$, где $c_i > 0$, $c_1 + c_2 = 1$. Результаты следующей теоремы покрывают всю область асимптотического поведения $t(N)$ при $N \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Существуют следующие три области асимптотического поведения при достаточно больших N :

- (а) если $t(N)/N \rightarrow 0$, то $R_i(t(N)) \sim h\kappa_2 t(N)$,
- (б) если $t = t(N) = sN$ для некоторого $s > 0$, то $R_i(t(N)) \sim h(1 - e^{-\kappa_2 s})N$,
- (с) если $t(N)/N \rightarrow \infty$, то $R_i(t(N)) \sim hN$,

где постоянная $\kappa_2 > 0$ определяется формулой (11), см. ниже, а

$$h = \frac{2\alpha_{12}\alpha_{21}(v_1 - v_2)^2}{\kappa_2(\alpha_{12} + \alpha_{21})^3}.$$

2. Доказательства.

2.1. Вложенная цепь Маркова. Для доказательства теорем 1 и 2 мы воспользуемся вложенной цепью Маркова. Рассмотрим марковский процесс $\xi_{N_1, N_2}(t) = \xi_{N_1, N_2}(t, \omega)$ с непрерывным временем и пространством состояний $\mathbf{R}^{N_1 + N_2}$, определяемый формулой (1), и

$$\tau_1(\omega) < \tau_2(\omega) < \dots < \tau_n = \tau_n(\omega) < \dots$$

— случайные моменты времени, в которые происходят скачки частиц процесса $\xi_{N_1, N_2}(t)$. Тогда $\{\tau_{n+1} - \tau_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение со средним $\gamma_{N_1, N_2} = (N_1\alpha_{12} + N_2\alpha_{21})^{-1}$.

Введем в рассмотрение на том же пространстве состояний $\mathbf{R}^{N_1 + N_2}$ цепь Маркова с дискретным временем $\zeta_{N_1, N_2}(n)$, $n = 1, 2, \dots$:

$$\zeta_{N_1, N_2}(n, \omega) = \xi_{N_1, N_2}(\tau_n(\omega), \omega).$$

Идея состоит в том, что вопрос об изучении асимптотического поведения системы частиц в непрерывном времени $\xi_{N_1, N_2}(t)$ может быть сведен к асимптотическим свойствам цепи Маркова с дискретным временем $\zeta_{N_1, N_2}(n)$. В самом деле, по закону больших чисел

$$\tau_n \sim \frac{n}{N_1\alpha_{12} + N_2\alpha_{21}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Другими словами, если n велико, то значение $n\gamma_{N_1, N_2} = n(N_1\alpha_{12} + N_2\alpha_{21})^{-1}$ асимптотически равно «физическому» времени t , связанному с системой частиц в непрерывном времени $\xi_{N_1, N_2}(t)$. Аналогично эмпирическому среднему и эмпирической дисперсии мы введем для вложенной цепи

$$X_i(n) = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} x_k^{(i)}(\tau_n), \quad D_i(n) = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} (x_k^{(i)}(\tau_n) - X_i(n))^2.$$

Очевидно, что

$$X_i(n) = \overline{x^{(i)}}(\tau_n) \quad \text{и} \quad D_i(n) = S_i^2(\tau_n).$$

В дальнейшем нам понадобятся их математические ожидания

$$\mu_i(n) = \mathbf{E}X_i(n), \quad d_i(n) = \mathbf{E}D_i(n),$$

а также следующие обозначения:

$$l_{12}(n) = \mu_1(n) - \mu_2(n), \quad r(n) = \mathbf{E}(X_1(n) - X_2(n))^2.$$

2.2. Закрытое уравнение для эмпирических средних. Здесь мы докажем теорему 1.

Следующая лемма устанавливается непосредственной проверкой.

Лемма 1. *Функции $\mu_i(n)$ удовлетворяют замкнутой системе*

$$\begin{aligned}\mu_1(n+1) &= \mu_1(n) + [\alpha_{12}(\mu_2(n) - \mu_1(n)) + v_1] \gamma_{N_1, N_2} + \alpha_{12}(v_2 - v_1) \gamma_{N_1, N_2}^2, \\ \mu_2(n+1) &= \mu_2(n) + [\alpha_{21}(\mu_1(n) - \mu_2(n)) + v_2] \gamma_{N_1, N_2} + \alpha_{21}(v_1 - v_2) \gamma_{N_1, N_2}^2.\end{aligned}$$

Уравнение для l_{12} также замкнуто и линейно. А именно,

$$\begin{aligned}l_{12}(n+1) &= l_{12}(n) + [-(\alpha_{12} + \alpha_{21}) l_{12}(n) + (v_1 - v_2)] \gamma_{N_1, N_2} \\ &\quad + (\alpha_{12} + \alpha_{21})(v_2 - v_1) \gamma_{N_1, N_2}^2 \\ &= l_{12}(n)[1 - \gamma_{N_1, N_2}(\alpha_{12} + \alpha_{21})] + \gamma_{N_1, N_2}(v_1 - v_2)[1 - \gamma_{N_1, N_2}(\alpha_{12} + \alpha_{21})],\end{aligned}$$

и, как следствие, мы получаем

$$l_{12}(n) = l_{12}(0)R^n + \frac{v_1 - v_2}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} (1 - R^n) R \quad (2)$$

$$= \frac{v_1 - v_2}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} R + \left(l_{12}(0) - \frac{v_1 - v_2}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} R \right) R^n, \quad (3)$$

где $R = 1 - \gamma_{N_1, N_2}(\alpha_{12} + \alpha_{21})$.

Величины

$$S(n) = \alpha_{21}\mu_1(n) + \alpha_{12}\mu_2(n)$$

также удовлетворяют рекуррентным уравнениям:

$$S(n+1) = S(n) + \gamma_{N_1, N_2}[\alpha_{21}v_1 + \alpha_{12}v_2].$$

Таким образом,

$$S(n) = S(0) + n \frac{\alpha_{21}v_1 + \alpha_{12}v_2}{N_1\alpha_{12} + N_2\alpha_{21}} = S(0) + (n\gamma_{N_1, N_2}) \cdot (\alpha_{21}v_1 + \alpha_{12}v_2). \quad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает утверждение теоремы 1.

2.3. Эмпирические дисперсии. Ближайшая цель состоит в получении замкнутых уравнений для $d_i(n)$.

Лемма 2. *Имеет место следующее тождество:*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(D_1(n+1) | (x_i^{(1)}(t), x_j^{(2)}(t), i = 1, \dots, N_1, j = 1, \dots, N_2), t \leq \tau_n) \\ = D_1(n) + \alpha_{12}\gamma_{N_1, N_2} \\ \times \left[\frac{N_1 - 1}{N_1} (D_2(n) - D_1(n) + (X_1(n) - X_2(n))^2) - \frac{2}{N_1} D_1(n) \right. \\ \left. + 2 \frac{N_1 - 1}{N_1} (\gamma_{N_1, N_2}(v_1 - v_2)(X_1(n) - X_2(n)) + \gamma_{N_1, N_2}^2(v_1 - v_2)^2) \right],\end{aligned}$$

а аналогичное тождество для $\mathbf{E}(D_2(n+1) | \dots)$ получается простой переменой индексов $1 \leftrightarrow 2$.

Доказательство этой леммы может быть получено непосредственным вычислением. Применяя оператор математического ожидания к предыдущим тождествам, мы видим, что в уравнениях для $d_i(n)$ участвует также член $r(n)$.

Вводя в рассмотрение вектор-столбец $w(n) = (d_1(n), d_2(n), r(n))^T$, мы можем записать

$$w(n+1) = Aw(n) + f(n) + g, \quad (5)$$

где A — матрица размера 3×3 , не зависящая от n , $f(n)$ — ограниченная векторная функция от n , g — постоянный вектор, имеющие следующий явный вид:

$$A = E + \gamma_{N_1, N_2} B, \quad (6)$$

$$B = B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_{12} & \alpha_{12} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & -\alpha_{21} & \alpha_{21} \\ 0 & 0 & -2(\alpha_{12} + \alpha_{21}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{12}}{N_1} & -\frac{\alpha_{12}}{N_1} & -\frac{\alpha_{12}}{N_1} \\ -\frac{\alpha_{21}}{N_2} & -\frac{\alpha_{21}}{N_2} & -\frac{\alpha_{21}}{N_2} \\ \frac{\alpha_{12}}{N_1} + \frac{\alpha_{21}}{N_2} & \frac{\alpha_{12}}{N_1} + \frac{\alpha_{21}}{N_2} & \frac{\alpha_{12}}{N_1} + \frac{\alpha_{21}}{N_2} \end{pmatrix},$$

$$f(n) = 2\gamma_{N_1, N_2}(v_1 - v_2)l_{12}(n)\mathbf{q}_{N_1, N_2}, \quad (7)$$

$$\mathbf{q}_{N_1, N_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_{N_1, N_2} \begin{pmatrix} \alpha_{12} - \frac{\alpha_{12}}{N_1} \\ \alpha_{21} - \frac{\alpha_{21}}{N_2} \\ -(\alpha_{12} + \alpha_{21}) \end{pmatrix},$$

$$g = \gamma_{N_1, N_2}^2 (v_1 - v_2)^2 \begin{pmatrix} \alpha_{12}\gamma_{N_1, N_2} \\ \alpha_{21}\gamma_{N_1, N_2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что A , $f(n)$, g зависят от N_1, N_2 и от других параметров модели. Легко видеть, что при достаточно больших N_1, N_2 (при условии, что α_{ij} фиксированы) все компоненты вектора $\mathbf{q}_{N_1, N_2}$ положительны. Поскольку при больших N_1, N_2 все элементы матрицы A также положительны, то представляется оправданным применение аргументов в духе теории Перрона–Фробениуса.

2.4. Спектральные свойства матрицы A . Непосредственная проверка показывает, что матрица B_1 имеет три различных собственных значения

$$\lambda_1 = -(\alpha_{12} + \alpha_{21}), \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -2(\alpha_{12} + \alpha_{21}).$$

Рассмотрим предельный переход $N_1 = c_1 N$, $N_2 = c_2 N$, $N \rightarrow \infty$. Введем обозначение $\Delta := c_1 \alpha_{12} + c_2 \alpha_{21}$, т.е. $\gamma_{N_1, N_2} = (N\Delta)^{-1}$.

При больших N_i матрица B является малым возмущением матрицы B_1 :

$$B = B_1 + \frac{1}{N} B_{2,k} = B_1 + \frac{1}{N} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{12}}{c_1} & -\frac{\alpha_{12}}{c_1} & -\frac{\alpha_{12}}{c_1} \\ -\frac{\alpha_{21}}{c_2} & -\frac{\alpha_{21}}{c_2} & -\frac{\alpha_{21}}{c_2} \\ \frac{\alpha_{12}}{c_1} + \frac{\alpha_{21}}{c_2} & \frac{\alpha_{12}}{c_1} + \frac{\alpha_{21}}{c_2} & \frac{\alpha_{12}}{c_1} + \frac{\alpha_{21}}{c_2} \end{pmatrix}.$$

Для анализа собственных значений матрицы B мы воспользуемся теорией возмущений. Для $\lambda_1(N)$ и $\lambda_3(N)$ нам будет достаточно представлений

$$\lambda_1(N) = -(\alpha_{12} + \alpha_{21}) + O(N^{-1}), \quad \lambda_3(N) = -2(\alpha_{12} + \alpha_{21}) + O(N^{-1}), \quad (8)$$

тогда как для $\lambda_2(N)$ нам понадобится результат из [2] о том, что

$$\lambda_2(N) = \frac{1}{N} (\psi' B_{2,k} \varphi) + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (9)$$

где вектор-столбец φ и вектор-строка ψ' — и соответственно правый и левый собственные векторы матрицы B_1 отвечающие собственному значению 0, нормированные таким образом, чтобы $\psi'\varphi = 1$. Мы можем взять

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi' = Z^{-1} \left(1 + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}}, 1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}, 1 \right), \quad Z = (\alpha_{12} + \alpha_{21}) \left(\frac{1}{\alpha_{12}} + \frac{1}{\alpha_{21}} \right).$$

Подставляя эти значения в формулу (9), получаем

$$\lambda_2(N) = -\frac{\kappa_2}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (10)$$

где

$$\kappa_2 = 2Z^{-1} \left(\frac{\alpha_{21}}{c_1} + \frac{\alpha_{12}}{c_2} \right). \quad (11)$$

Обозначим через $\sigma_1(N)$, $\sigma_2(N)$, $\sigma_3(N)$ собственные числа матрицы A . Из соотношений (6), (8) и (9) легко вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Собственные числа матрицы A имеют вид*

$$\begin{aligned} \sigma_1(N) &= 1 - \frac{b_1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), & \sigma_3(N) &= 1 - \frac{b_3}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \\ \sigma_2(N) &= 1 - \frac{b_2}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

где b_1, b_2, b_3 — некоторые положительные константы.

Нас будут интересовать также собственные векторы матрицы A , которые мы обозначим $e_1^{(N)}, e_2^{(N)}, e_3^{(N)}$. Очевидно, что они являются также собственными векторами матрицы $B_1 + N^{-1}B_{2,k}$. Пользуясь теорией возмущений (см. [2]), заключаем, что $e_1^{(N)}, e_2^{(N)}, e_3^{(N)}$ являются малыми возмущениями собственных векторов e_1, e_2, e_3 матрицы B_1 . Таким образом, вычисляя e_1, e_2, e_3 , имеем

$$\begin{aligned} e_1^{(N)} &= \begin{pmatrix} -\alpha_{12} \\ \alpha_{21} \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{N}\right), & e_2^{(N)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{N}\right), \\ e_3^{(N)} &= \begin{pmatrix} -\alpha_{12}^2 \\ -\alpha_{21}^2 \\ (\alpha_{12} + \alpha_{21})^2 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

Очевидно, что, пользуясь (8) и (10), нетрудно получить явный вид констант b_i , участвующих в лемме. В дальнейшем нам понадобится только b_2 :

$$b_2 = \frac{\kappa_2}{\Delta} = \frac{2}{Z} \cdot \frac{\alpha_{12}/c_1 + \alpha_{21}/c_2}{c_1\alpha_{12} + c_2\alpha_{21}}. \quad (13)$$

2.5. Леммы об асимптотическом поведении. Решение уравнения (5) единственным образом может быть представлено в виде

$$w(n) = A^n w(0) + \sum_{j=1}^n A^{j-1} f(n-j) + (1-A)^{-1}(1-A^n)g. \quad (14)$$

Следующая лемма показывает, что первое и третье слагаемое в представлении (14) не влияют на асимптотику $w(n)$.

Лемма 4. *Имеют место следующие равномерные (по n и N) оценки:*

$$\|A^n w(0)\| \leq \text{const}, \quad \|(1-A)^{-1}(1-A^n)g\| \leq \text{const}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В базисе из собственных векторов матрицы A запишем разложение: $w(0) = \sum_{i=1}^3 k_{w,i} e_i^{(N)}$. Получим $A^n w(0) = \sum_{i=1}^3 k_{w,i} (\sigma_i(N))^n e_i^{(N)}$. Так как $\sup_N \|e_i^{(N)}\| < \infty$ и, начиная с некоторого N , $|\sigma_i(N)| < 1$, то первая оценка леммы вытекает очевидным образом. Для получения второй оценки представим

$$g = \gamma_{N_1, N_2}^2 \sum_{i=1}^3 k_{g,i}^o(N) e_i^{(N)}$$

с ограниченными по N коэффициентами $k_{g,i}^o(N)$. Подействуем на это разложение оператором $(1 - A)^{-1}(1 - A^n)$ и, заметив, что в силу леммы 3

$$\gamma_{N_1, N_2}^2 \frac{1 - (\sigma_i(N))^n}{1 - \sigma_i(N)} \leq \frac{\text{const}}{N}, \quad i = 1, 3,$$

и

$$\gamma_{N_1, N_2}^2 \frac{1 - (\sigma_2(N))^n}{1 - \sigma_2(N)} \leq \text{const},$$

получим вторую оценку леммы. Лемма 4 доказана.

Чтобы проанализировать второе слагаемое в (14),

$$V_N(n) := \sum_{j=1}^n A^{j-1} f(n-j),$$

заметим, что векторная функция $f(n)$, определяемая формулой (7), известна в явном виде благодаря формуле (2).

Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbf{R}$ таковы, что $(0, 0, 1)^T = \sum_{i=1}^3 \xi_i e_i$. Непосредственно находим, что

$$\xi_1 = \frac{\alpha_{21} - \alpha_{12}}{(\alpha_{12} + \alpha_{21})^2}, \quad \xi_2 = \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{(\alpha_{12} + \alpha_{21})^2}, \quad \xi_3 = \frac{1}{(\alpha_{12} + \alpha_{21})^2}.$$

Если $\xi_i(N) \in \mathbf{R}$ суть коэффициенты разложения $\mathbf{q}_{N_1, N_2} = \sum_{i=1}^3 \xi_i(N) e_i^{(N)}$, то, очевидно,

$$\xi_i(N) = \xi_i + O(N^{-1}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Имеем разложение

$$V_N(n) = \sum_{i=1}^3 \xi_i(N) \left(2\gamma_{N_1, N_2} (v_1 - v_2) \sum_{j=1}^n l_{12}(n-j) (\sigma_i(N))^{j-1} \right) e_i^{(N)}.$$

В силу (15), отбрасывая $O(N^{-1})$, заключаем, что при $N \rightarrow \infty$ асимптотика $V_N(n)$ совпадает с асимптотикой суммы

$$V_N^1(n) := \sum_{i=1}^3 \xi_i \left(2\gamma_{N_1, N_2} (v_1 - v_2) \sum_{j=1}^n l_{12}(n-j) (\sigma_i(N))^{j-1} \right) e_i^{(N)}. \quad (16)$$

Лемма 5. При $n = N\theta(N)$, где $\theta(N) \rightarrow +\infty$, асимптотика $V_N^1(n)$ определяется лишь слагаемым, соответствующим $i = 2$, а первое и третье слагаемые малы по сравнению со вторым.

Напомним, что $\sigma_2(N)$ есть максимальное собственное значение положительной матрицы A . Тем самым, утверждение данной леммы соответствует духу теории Перрона–Фробениуса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обратимся к формуле (2). Если предположить, что $l_{12}(0) < 0$, то из принятого нами ранее соглашения $v_1 < v_2$ вытекает, что $f(n) > 0$ (покоординатно) при всех n . Везде в дальнейшем мы будем считать, что это предположение выполнено. Более того, из (2) нетрудно сделать вывод, что найдутся такие $C_1 > C_2 > 0$, не зависящие от N и n , что

$$0 < C_2 < (v_1 - v_2) l_{12}(n) < C_1 \quad \forall n, N. \quad (17)$$

Таким образом, коэффициент при $e_2^{(N)}$ в сумме (16) является положительным и оценивается снизу следующим образом:

$$2\xi_2 C_2 \gamma_{N_1, N_2} \sum_{j=1}^n (\sigma_2(N))^{j-1} = 2\xi_2 C_2 \gamma_{N_1, N_2} \frac{1 - (\sigma_2(N))^n}{1 - \sigma_2(N)}.$$

Аналогично, для $i = 1, 3$ коэффициенты при $e_i^{(N)}$ в сумме (16) оцениваются *сверху по абсолютной величине* так:

$$2\xi_i C_1 \gamma_{N_1, N_2} \sum_{j=1}^n (\sigma_i(N))^{j-1} = 2\xi_i C_1 \gamma_{N_1, N_2} \frac{1 - (\sigma_i(N))^n}{1 - \sigma_i(N)}.$$

Таким образом, чтобы закончить доказательство леммы, достаточно сравнить асимптотику трех функций

$$\frac{1 - (\sigma_1(N))^{N\theta(N)}}{1 - \sigma_1(N)}, \quad \frac{1 - (\sigma_2(N))^{N\theta(N)}}{1 - \sigma_2(N)}, \quad \frac{1 - (\sigma_3(N))^{N\theta(N)}}{1 - \sigma_3(N)}$$

и показать, что первая и третья малы по сравнению со второй. Удобно рассмотреть отдельно два случая: а) $\theta(N) \rightarrow \infty$, $\theta(N)/N \rightarrow 0$, б) $\theta(N) \geq cN$, и воспользоваться леммой 3. Мы опускаем детали.

2.6. Асимптотическое поведение средних от выборочных дисперсий.

Теперь мы готовы изучить асимптотику функций $R_1(t)$ и $R_2(t)$ и доказать теорему 2. Вспомним, что интервалы между скачками вложенной цепи имеют экспоненциальное распределение со средним $\gamma_{N_1, N_2} = (N\Delta)^{-1}$, поэтому при больших N связь между временем n , отсчитываемым вложенной цепью Маркова, и абсолютным *физическим* временем t имеет следующий вид: $n \sim t/\gamma_{N_1, N_2} = (N\Delta)t$. Поэтому вместо $R_i(t)$ мы можем рассмотреть $d_i((N\Delta)t)$. Напомним также, что d_1 есть первая, а d_2 — вторая компонента вектора w .

Теперь воспользуемся леммой 5, которая утверждает, что если $t(N) \rightarrow \infty$, то асимптотика $w((N\Delta)t(N))$ совпадает с асимптотикой вектора

$$\xi_2 \left(2 \gamma_{N_1, N_2} (v_1 - v_2) \sum_{j=1}^{(N\Delta)t(N)} l_{12}((N\Delta)t(N) - j) (\sigma_2(N))^{j-1} \right) e_2^{(N)}.$$

Так как $e_2^{(N)} = (1, 1, 0)^T + O(N^{-1})$, то

$$d_i((N\Delta)t) \sim 2\xi_2 \gamma_{N_1, N_2} (v_1 - v_2) \sum_{j=1}^{(N\Delta)t(N)} l_{12}((N\Delta)t(N) - j) (\sigma_2(N))^{j-1}.$$

Чтобы вычислить асимптотику этого выражения, обратимся к представлению (3), согласно которому можно записать

$$l_{12}(n) = C'_{1,N} + C'_{2,N} R^n, \quad C'_{1,N} \rightarrow \frac{v_1 - v_2}{\alpha_{12} + \alpha_{21}}, \quad C'_{2,N} \rightarrow C'_{2,\infty} \quad (N \rightarrow \infty).$$

Заметим, что верна равномерная по N и n оценка

$$\left| \gamma_{N_1, N_2} \sum_{j=1}^n C'_{2,N} R^{n-j} (\sigma_2(N))^{j-1} \right| \leq (N\Delta)^{-1} |C'_{2,N}| \sum_{k=1}^{\infty} R^k = (N\Delta)^{-1} |C'_{2,N}| \frac{1}{1-R} \leq \text{const},$$

поскольку $1 - R = \gamma_{N_1, N_2} (\alpha_{12} + \alpha_{21})$. Рассмотрим теперь асимптотику выражения

$$\begin{aligned} & 2\xi_2 \gamma_{N_1, N_2} (v_1 - v_2) \sum_{j=1}^{(N\Delta)t(N)} \frac{v_1 - v_2}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} (\sigma_2(N))^{j-1} \\ &= 2\xi_2 \frac{1}{N\Delta} \frac{(v_1 - v_2)^2}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} \frac{1 - (\sigma_2(N))^{(N\Delta)t(N)}}{1 - \sigma_2(N)}. \end{aligned}$$

В силу (12) и (13) $\sigma_2(N) = 1 - (\kappa_2/\Delta)/N^2 + O(N^{-3})$, и, значит, задача свелась к изучению асимптотики

$$\frac{2\xi_2(v_1 - v_2)^2}{\kappa_2(\alpha_{12} + \alpha_{21})} N \left(1 - \left(1 - \frac{(\kappa_2/\Delta)}{N^2} \right)^{(N\Delta)t(N)} \right).$$

Отсюда легко следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Greenberg A., Malyshev V. A., Popov S. Yu. Stochastic model of massively parallel simulation. — Markov Process. Related Fields, 1995, v. 1, № 4, p. 473–490.
2. Kato T. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, 740 с.
3. Kipnis C., Landim C. Scaling Limits of Interacting Particle Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 442 p.
4. Manita A., Shcherbakov V. Asymptotic analysis of a particle system with a mean-field interaction. — ArXiv:math.PR/0408372.
5. Shcherbakov V., Manita A. Stochastic particle system with non-local mean-field interaction. — Международная конференция «Колмогоров и современная математика» (Москва, 2003): Тезисы докладов. М.: МГУ, 2003, с. 549–550.
6. Mitra D., Mitrani I. Analysis and optimum performance of two message-passing parallel processors synchronized by rollback. — Performance Evaluation, 1987, v. 7, № 2, p. 111–124.

Поступила в редакцию
9.IX.2004

© 2005 г.

РАГИМОВ Ф. Г.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЦ СУММАМИ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

В настоящей работе изучаются интегральные предельные теоремы для времени пересечения нелинейных границ случайным блужданием с бесконечной дисперсией.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, время пересечения нелинейной границы, интегральная предельная теорема.

1. Введение. Пусть ξ_n , $n \geq 1$, — независимые одинаково распределенные случайные величины, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, и пусть $f_a(t)$, $a > 0$, $t > 0$, — некоторое семейство положительных нелинейных (нестандартных) функций.

Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k \quad \text{и} \quad \tau = \tau_a = \inf\{n \geq 1: S_n > f_a(n)\}.$$

Здесь, как всегда, будем считать, что $\inf \emptyset = \infty$.

* Бакинский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики, кафедра теории вероятностей и математической статистики, ул. З. Халилова, 23, 370148 Баку, Азербайджан; e-mail: ragimovf@rambler.ru