Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Рагимов, Интегральные предельные теоремы для времени пересечения нелинейных границ суммами независимых величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 1, 158–161

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:46:54

В силу (12) и (13) $\sigma_2(N) = 1 - (\kappa_2/\Delta)/N^2 + O(N^{-3})$, и, значит, задача свелась к изучению асимптотики

$$\frac{2\xi_2(v_1 - v_2)^2}{\kappa_2(\alpha_{12} + \alpha_{21})} N \left(1 - \left(1 - \frac{(\kappa_2/\Delta)}{N^2} \right)^{(N\Delta)t(N)} \right).$$

Отсюда легко следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Greenberg A., Malyshev V. A., Popov S. Yu. Stochastic model of massively parallel simulation. — Markov Process. Related Fields, 1995, v. 1, № 4, p. 473–490.
2. Kato T. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, 740 с.
3. Kipnis C., Landim C. Scaling Limits of Interacting Particle Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 442 p.
4. Manita A., Shcherbakov V. Asymptotic analysis of a particle system with a mean-field interaction. — ArXiv:math.PR/0408372.
5. Shcherbakov V., Manita A. Stochastic particle system with non-local mean-field interaction. — Международная конференция «Колмогоров и современная математика» (Москва, 2003): Тезисы докладов. М.: МГУ, 2003, с. 549–550.
6. Mitra D., Mitrani I. Analysis and optimum performance of two message-passing parallel processors synchronized by rollback. — Performance Evaluation, 1987, v. 7, № 2, p. 111–124.

Поступила в редакцию
9.IX.2004

© 2005 г.

РАГИМОВ Ф. Г.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЦ СУММАМИ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

В настоящей работе изучаются интегральные предельные теоремы для времени пересечения нелинейных границ случайным блужданием с бесконечной дисперсией.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, время пересечения нелинейной границы, интегральная предельная теорема.

1. Введение. Пусть ξ_n , $n \geq 1$, — независимые одинаково распределенные случайные величины, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, и пусть $f_a(t)$, $a > 0$, $t > 0$, — некоторое семейство положительных нелинейных (нестандартных) функций.

Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k \quad \text{и} \quad \tau = \tau_a = \inf\{n \geq 1: S_n > f_a(n)\}.$$

Здесь, как всегда, будем считать, что $\inf \emptyset = \infty$.

* Бакинский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики, кафедра теории вероятностей и математической статистики, ул. З. Халилова, 23, 370148 Баку, Азербайджан; e-mail: ragimovf@rambler.ru

Изучению асимптотических свойств распределения момента первого выхода τ_a посвящено много работ (см. [1], [2]). В работе [3] сформулирована и доказана одна интегральная предельная теорема для τ_a при условии, что $D\xi_1 < \infty$.

В настоящей работе изучаются интегральные предельные теоремы для времени пересечения нелинейных границ случайным блужданием с бесконечной дисперсией.

2. Условия и формулировка основных результатов. Будем предполагать, что случайная величина ξ_1 принадлежит области притяжения устойчивого распределения $G_\alpha(x)$ с характеристическим показателем α , $0 < \alpha \leq 2$, т.е. существуют нормирующие константы $A(n)$ и $B(n) > 0$, $n \geq 1$, такие, что

$$\mathbf{P}\{S_n - A(n) \leq xB(n)\} \rightarrow G_\alpha(x) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Отметим, что предельное поведение распределения τ_a существенно различно при $\alpha < 1$ и $\alpha > 1$.

Поэтому эти два случая будем рассматривать по отдельности.

Теорема 1. Пусть $1 < \alpha \leq 2$ и $\mu = \mathbf{E}\xi_1 > 0$. Предположим, что функция $f_a(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) для каждого a функция $f_a(t)$ непрерывно дифференцируема и монотонно возрастает при $t \geq 0$, причем $f_a(1) \uparrow \infty$ при $a \rightarrow \infty$;
- 2) $a \rightarrow \infty$ и $n = n(a) \rightarrow \infty$ таким образом, что $n^{-1}f_a(n) \rightarrow \mu$ и $f'_a(n) \rightarrow \theta \in [0, \mu]$;
- 3) для каждого a при $n \rightarrow \infty$ и $n/m \rightarrow 1$

$$\frac{f'_a(n)}{f'_a(m)} \rightarrow 1.$$

Тогда

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\tau_a - n_a}{B([n_a])} \leq x\right\} = 1 - G_\alpha(-\lambda x),$$

где $\lambda = \mu - \theta$, $n_a = n_a(\mu)$ — решение уравнения $f_a(n) = n\mu$ и $[\cdot]$ обозначает целую часть.

Теорема 2. Пусть распределение F случайной величины ξ_1 сосредоточено на $(0, \infty)$ и для каждого a функция $f_a(t)$ монотонно возрастает и непрерывно дифференцируема, причем $f_a(1) \uparrow \infty$ при $a \rightarrow \infty$ и для достаточно больших a и t

$$f'_a(t) \leq M < \infty.$$

Кроме того, предположим, что $F(M) = 0$ и $a \rightarrow \infty$ и $n = n(a) \rightarrow \infty$ так, что

$$\frac{1}{B(n)} f_a(n) \rightarrow x > 0.$$

Тогда

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N(a) \tau_a \geq x^{-\alpha}\} = G_\alpha(x), \quad (2)$$

где

$$N(a) = \frac{\alpha}{2 - \alpha} [1 - F(xB(n))].$$

З а м е ч а н и е 1. Хорошо известно (см. [5]), что можно полагать $B(n) = n^{1/\alpha} L(n)$, где $L(x)$, $x > 0$, — некоторая медленно меняющаяся на бесконечности функция.

В случаях $\alpha > 1$ и $\alpha < 1$ будем полагать соответственно $A(n) = n\mu$ и $A(n) = 0$.

З а м е ч а н и е 2. Семейство функций вида $f_a(t) = at^\gamma$, $0 \leq \gamma < 1$, и $f_a(t) = (a+t)^\delta$, $0 < \delta < 1$, удовлетворяют условиям 1)–3) теоремы 1, а семейства функций вида $f_a(t) = (t \ln t + a)^\beta$, $0 < \beta < 1$, и $f_a(t) = (a+t)^\delta$, $0 < \delta < 1$, удовлетворяют условиям теоремы 2.

3. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1)–3) теоремы 1. Тогда в смысле сходимости почти всюду при $a \rightarrow \infty$ имеют место соотношения: 1) $\tau_a \rightarrow \infty$; 2) $\tau_a/n_a \rightarrow 1$; 3) $B(\tau_a)/B([n_a]) \rightarrow 1$.

Эта лемма доказывается аналогично лемме 1 из [3].

Обозначим

$$\chi_a = S_{\tau_a} - f_a(\tau_a).$$

Имеем:

$$\frac{S_\tau - \mu\tau}{B(\tau)} = -\mu \frac{\tau_a - n_a}{B(\tau)} + \frac{f_a(\tau) - f_a(n_a)}{B(\tau)} + \frac{\chi_a}{B(\tau)}.$$

Отсюда легко находим, что

$$\frac{S_\tau - \mu\tau}{B(\tau)} = (f'_a(\nu_a) - \mu)\tau_a^* + \frac{\chi_a}{B(\tau)}, \quad (3)$$

где ν_a — промежуточная точка между n_a и τ_a , а $\tau_a^* = (\tau_a - n_a)/B(\tau_a)$. В условиях доказываемой теоремы справедливы утверждения теоремы Анскомбе (см. [1, с. 11]) и теоремы 2 в [4], в силу которых из (1) и леммы 1 имеем

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_\tau - \mu\tau \leq xB(\tau)\} \rightarrow G_\alpha(x). \quad (4)$$

Докажем, что

$$\frac{\chi_a}{B(\tau)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad \text{при } a \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Действительно, учитывая, что $0 \leq \chi_a = S_{\tau_a} - f_a(\tau_a) \leq S_\tau - S_{\tau-1} = \xi_\tau$, достаточно показать, что

$$\frac{\xi_\tau}{B(\tau)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad \text{при } a \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Поскольку $\xi_n/B(n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ при $n \rightarrow \infty$, нам нужно показать, что последовательность $\xi_n/B(n)$, $n \geq 1$, равномерно непрерывна по вероятности [1, с. 10]). С этой целью заметим, что

$$\frac{\xi_n - \mu}{B(\tau)} = S_n^* - \frac{B(n-1)}{B(n)} S_{n-1}^*,$$

где $S_n^* = (S_n - n\mu)/B(n)$.

Согласно упоминавшейся выше работе [4], последовательность S_n^* , $n \geq 1$, равномерно непрерывна по вероятности, и в силу леммы 1.4 из [1, с. 10] последовательность $\xi_n/B(n)$, $n \geq 1$, также равномерно непрерывна по вероятности. Поэтому по теореме Анскомбе и лемме 1 имеет место сходимость (6). Теперь из (3), (4) и (5) получаем утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 2. Пусть функция $f_a(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и $\mathbf{P}\{\xi_1 \geq M\} = 1$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\tau_a > n\} = \mathbf{P}\{S_n \leq f_a(n)\}.$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}\{\tau_a > n\} = \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} (S_k - f_a(k)) \leq 0\right\}.$$

В силу условия $\mathbf{P}\{\xi_1 \geq M\} = 1$ для каждого $k = 1, \dots, n$ имеем

$$\mathbf{P}\{S_k - f_a(k) \geq S_{k-1} - f_a(k-1)\} = \mathbf{P}\{\xi_k \geq f'_a(\theta_k)\} \geq \mathbf{P}\{\xi_k \geq M\} = 1,$$

где θ_k — точка из $[k-1, k]$. Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} (S_k - f_a(k)) \leq 0\right\} = \mathbf{P}\{S_n - f_a(n) \leq 0\}.$$

Лемма 2 доказана.

Далее, хорошо известно (см. [5]), что при допущениях теоремы 2 существует медленно меняющаяся функция $L(x)$ такая, что

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha} L(x), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (7)$$

и можно выбрать $B(n)$ так, что

$$n[1 - F(B(n))] \rightarrow \frac{2 - \alpha}{\alpha}. \quad (8)$$

Тогда в силу того, что $f_a(n) \sim xB(n)$, из (7) получаем

$$1 - F(B_n) \sim x^\alpha (1 - F(f_a(n))).$$

Из (8) следует, что

$$n \sim \frac{2 - \alpha}{\alpha} \frac{x^{-\alpha}}{1 - F(f_a(n))}. \quad (9)$$

Поэтому из леммы 2, имеем

$$\mathbf{P}\left\{(1 - F(f_a(n))) \tau_a \geq \frac{2 - \alpha}{\alpha} x^{-\alpha}\right\} \rightarrow G_\alpha(x) \quad \text{при } a \rightarrow \infty.$$

Из последнего соотношения следует (2). Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Для случая $f_a(t) \equiv a$ из (2) имеем

$$\mathbf{P}\left\{(1 - F(a)) \tau_a \geq \frac{2 - \alpha}{\alpha} x^{-\alpha}\right\} \rightarrow G_\alpha(x) \quad \text{при } a \rightarrow \infty.$$

Поведение τ_a связано с нормирующим множителем $1 - F(a)$, который имеет порядок $O(a^{-\alpha})$. Поэтому из (9) следует, что τ_a имеет, грубо говоря, порядок $O(a^\alpha)$. Нетрудно показать, что для границ

$$f_a(t) = (a + t)^\delta, \quad 0 < \delta < 1,$$

величина τ_a имеет порядок $O(a^{\alpha\delta})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Woodroffe M. Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis. Philadelphia, PA: SIAM, 1982, 119 p.
2. Новиков А. А. О времени пересечения односторонней нелинейной границы суммами независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 4, с. 643–656.
3. Рагимов Ф. Г. Асимптотическое разложение распределения времени пересечения нелинейных границ. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 3, с. 580–583.
4. Mogyóródi J. On limiting distributions for sums of a random number of independent random variables. — Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., 1961, v. 6, № 3, p. 365–371.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984, 752 с.

Поступила в редакцию
01.II.2001