Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Э. Денисов, Д. А. Коршунов, С. Г. Фосс, Нижние пределы для хвостов распределений случайно остановленных сумм, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 4, 794–802

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1648>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:44:56

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2007 г.

ДЕНИСОВ Д. Э.*, КОРШУНОВ Д. А.**; ФОСС С. Г.***

НИЖНИЕ ПРЕДЕЛЫ ДЛЯ ХВОСТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ
СЛУЧАЙНО ОСТАНОВЛЕННЫХ СУММ¹⁾

Изучаются нижние пределы отношений $\overline{F^{*\tau}}(x)/\overline{F}(x)$ хвостов распределений, где $F^{*\tau}$ — распределение суммы случайного числа τ независимых одинаково распределенных случайных величин с общим распределением F , при этом τ не зависит от слагаемых.

Ключевые слова и фразы: хвост свертки распределений, случайные суммы случайных величин, нижний предел, распределения с тяжелыми и легкими хвостами.

1. **Введение.** Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Предполагаем, что их общее распределение F неограничено справа, т.е. $\overline{F}(x) \equiv F(x, \infty) > 0$ при всех x . Положим $S_0 = 0$ и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Пусть τ — положительная целочисленная случайная величина, не зависящая от $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$. Обозначим через $F^{*\tau}$ распределение случайной суммы $S_\tau = \xi_1 + \dots + \xi_\tau$. В настоящей работе изучаются нижние пределы (при $x \rightarrow \infty$) отношения $\overline{F^{*\tau}}(x)/\overline{F}(x)$.

Мы разбиваем все распределения на два класса: распределения с тяжелыми и легкими (правыми) хвостами. Случайная величина η имеет распределение с *тяжелым хвостом*, если $Ee^{\varepsilon\eta} = \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. В противном случае η имеет распределение с *легким хвостом*.

Мы рассматриваем только неотрицательные случайные величины и в случае, когда F имеет тяжелый хвост, находим условия, при которых

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*\tau}}(x)}{\overline{F}(x)} = E\tau. \quad (1)$$

* EURANDOM P. O. BOX 513–5600 MB Eindhoven, The Netherlands; School of MACS, Heriot–Watt University, Edinburgh EH14 4AS, UK; e-mail: denisov@ma.hw.ac.uk

** Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр-т Коптюга 4; Новосибирский государственный университет, пр-т акад. Коптюга, 2, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: Korshunov@math.nsc.ru

*** School of MACS, Heriot–Watt University, Edinburgh EH14 4AS, UK; Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр-т акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: S.Foss@ma.hw.ac.uk; foss@math.nsc.ru

¹⁾ Первый автор поддержан грантом EPSRC EP/E033717/1 и проектом BSIK/BRICKS. Второй автор поддержан Royal Society International Joint Project Grant 2005/R2-JP и Фондом содействия отечественной науке. Третий автор поддержан Royal Society International Joint Project Grant 2005/R2-JP и грантом EPSRC EP/E033717/1.

Эта задача была полностью решена в [5] для $\tau = 2$, а затем в [3] в случае, когда τ имеет распределение с легким хвостом. В настоящей работе результаты [3] обобщаются на классы распределений τ , включающие в себя все распределения с легкими хвостами и некоторые распределения с тяжелыми хвостами. Каждому распределению F с тяжелым хвостом ставится в соответствие класс распределений τ . Более ранние результаты о нижних пределах и родственной задаче об определении константы K в эквивалентности $\overline{F^{*2}}(x) \sim K\overline{F}(x)$ можно найти, например, в [1], [2], [4], [7], [8] (см. также библиографию в этих работах).

Неравенство « $\gg$ » в (1) верно для неотрицательных $\{\xi_n\}$ без каких-либо дополнительных ограничений (см., например, [9] или [3]). Следовательно, (1) заведомо верно, если $E\tau = \infty$. Поэтому в дальнейшем рассматривается только случай $E\tau < \infty$. Приведем первый результат.

Теорема 1. *Предположим, что $\xi \geq 0$ имеет распределение с тяжелым хвостом и $E\xi < \infty$. Пусть при некотором $c > E\xi$*

$$P\{c\tau > x\} = o(\overline{F}(x)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Тогда справедливо (1).

Доказательство теоремы 1 основано на исследовании моментов $Ee^{f(\xi)}$ для соответствующим образом подобранной функции f . Точнее говоря, теорема 1 выводится из следующего более общего результата, использующего некоторые идеи из [9], [5], [3].

Теорема 2. *Предположим, что $\xi \geq 0$ имеет распределение с тяжелым хвостом и $E\xi < \infty$. Пусть существует функция $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что*

$$Ee^{f(\xi)} = \infty \quad (3)$$

и для некоторого $c > E\xi$

$$Ee^{f(c\tau)} < \infty. \quad (4)$$

Если $f(x) \geq \ln x$ и функция $f(x) - \ln x$ вогнута при всех достаточно больших x , то справедливо (1).

В частности, равенство (1) выполняется, если $E\xi^k = \infty$ и $E\tau^k < \infty$ для некоторого $k \geq 1$; для доказательства достаточно рассмотреть функцию $f(x) = k \ln x$. Ранее это было доказано в [3, теорема 1] более простым методом, см. также [9].

Рассмотрение функции $f(x) = \gamma x$, $\gamma > 0$, приводит к равенству (1) при условии, что ξ имеет распределение с тяжелым хвостом, а τ — с легким. Этот результат составляет содержание теоремы 2 из [3].

Также равенство (1) верно, если F имеет распределение Вейбулла с параметром $\beta \in (0, 1)$, $\overline{F}(x) = e^{-x^\beta}$ и $f(x) = x^\beta$ или, в более общем случае, $f(x) = x^\beta - c \ln x$ для $x \geq 1$, где $c \leq \beta$ — любая фиксированная константа.

Далее приводится естественный аналог теоремы 1 для случая легких хвостов. Для этого нам потребуются дополнительные обозначения. Под преобразованием Лапласа распределения F в точке $\gamma \in \mathbf{R}$ мы понимаем

$$\varphi(\gamma) = \int_0^\infty e^{\gamma x} F(dx) \in (0, \infty].$$

Положим

$$\hat{\gamma} = \sup\{\gamma: \varphi(\gamma) < \infty\} \in [0, \infty].$$

Заметим, что функция $\varphi(\gamma)$ монотонна и непрерывна в интервале $(-\infty, \hat{\gamma})$ и что $\varphi(\hat{\gamma}) = \lim_{\gamma \uparrow \hat{\gamma}} \varphi(\gamma) \in [1, \infty]$.

Теорема 3. *Пусть $\hat{\gamma} \in (0, \infty)$, и предположим, что значения $\varphi(\hat{\gamma})$ и левой производной $\varphi'(\hat{\gamma})$ конечны. Предположим, что для некоторого $c > \varphi'(\hat{\gamma})/\varphi(\hat{\gamma})$*

$$E\{\varphi^\tau(\hat{\gamma}); c\tau > x\} = o(E\{e^{\hat{\gamma}\xi}; \xi > x\}) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Если для любого фиксированного $y > 0$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \geq e^{\hat{\gamma}y}, \quad (6)$$

то

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{*\tau}(x)}{\bar{F}(x)} = \mathbf{E} \tau \varphi^{\tau-1}(\hat{\gamma}). \quad (7)$$

При $\hat{\gamma} \downarrow 0$ условие (5) переходит по непрерывности в (2). В качестве простого достаточного для выполнения (5) условия можно предложить следующее:

$$\mathbf{E}(\varphi(\hat{\gamma}) + \varepsilon)^\tau < \infty \quad \text{для некоторого } \varepsilon > 0;$$

см. также лемму 4 в [3], в которой рассмотрен этот случай.

Примеры, построенные в [5], показывают, что без дополнительных условий типа (6) равенство (7) может не выполняться.

Статья организована следующим образом. В п. 2 сформулирован и доказан общий результат, характеризующий распределения с тяжелыми хвостами на положительной полуоси. Пункт 3 посвящен оценке функционала $\mathbf{E}e^{h(S_n)}$ для вогнутой функции h . Пункты 4, 5 и 6 содержат доказательства теорем 2, 1 и 3 соответственно.

2. Характеризация распределений с тяжелыми хвостами. В [3, лемма 2] было доказано, что для любой случайной величины $\xi \geq 0$ с тяжелым хвостом и любого числа $\delta > 0$ существует возрастающая вогнутая функция $h: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ такая, что $\mathbf{E}e^{h(\xi)} \leq 1 + \delta$ и $\mathbf{E}\xi e^{h(\xi)} = \infty$. В настоящем пункте получен более общий результат.

Лемма 1. Пусть случайная величина $\xi \geq 0$ имеет распределение с тяжелым хвостом. Пусть $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ — вогнутая функция, для которой

$$\mathbf{E}e^{f(\xi)} = \infty. \quad (8)$$

Пусть функция $g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ такова, что $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда существует вогнутая функция $h: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что $h \leq f$ и

$$\mathbf{E}e^{h(\xi)} < \infty, \quad \mathbf{E}e^{h(\xi)+g(\xi)} = \infty.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $f(0) = 0$. Построим функцию $h(x)$ на последовательных отрезках. Для этого введем две положительные последовательности $x_n \uparrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_n \in (0, 1]$. Положим $x_0 = 0$, $h(0) = f(0) = 0$, $h'(0) = f'(0)$ и

$$h(x) = h(x_{n-1}) + \varepsilon_n \min(h'(x_{n-1})(x - x_{n-1}), f(x) - f(x_{n-1}))$$

при $x \in (x_{n-1}, x_n]$; здесь h' — левая производная функции h . Функция h возрастает, так как $\varepsilon_n > 0$ и f возрастает. Более того, эта функция вогнута, так как $\varepsilon_n \leq 1$ и f вогнута. Поскольку $h(x) - h(x_{n-1}) \leq f(x) - f(x_{n-1})$ при $x \in (x_{n-1}, x_n]$, имеем $h \leq f$.

Перейдем непосредственно к построению x_n и ε_n . В силу условия $g(x) \rightarrow \infty$ и равенства (8) можно выбрать x_1 настолько большим, что $e^{g(x)} \geq 2^1$ для всех $x \geq x_1$ и

$$\mathbf{E}\{e^{\min(h'(0)\xi, f(\xi))}; \xi \in (x_0, x_1]\} + e^{\min(h'(0)x_1, f(x_1))}\bar{F}(x_1) > \bar{F}(x_0) + 1.$$

Выберем $\varepsilon_1 \in (0, 1]$ таким образом, чтобы

$$\mathbf{E}\{e^{\varepsilon_1 \min(h'(0)\xi, f(\xi))}; \xi \in (x_0, x_1]\} + e^{\varepsilon_1 \min(h'(0)x_1, f(x_1))}\bar{F}(x_1) = \bar{F}(x_0) + 1.$$

Положим $h(x) = \varepsilon_1 \min(x, f(x))$ для $x \in (0, x_1]$. Тогда последнее равенство эквивалентно такому:

$$\mathbf{E}\{e^{h(\xi)}; \xi \in (x_0, x_1]\} + e^{h(x_1)}\bar{F}(x_1) = e^{h(x_0)}\bar{F}(x_0) + 2^{-1}.$$

По индукции можно построить возрастающую последовательность x_n и последовательность $\varepsilon_n \in (0, 1]$ такие, что $e^{g(x)} \geq 2^n$ при всех $x \geq x_n$ и

$$\mathbf{E}\{e^{h(\xi)}; \xi \in (x_{n-1}, x_n]\} + e^{h(x_n)}\bar{F}(x_n) = e^{h(x_{n-1})}\bar{F}(x_{n-1}) + 2^{-n}$$

для всех $n \geq 1$. Действительно, при $n = 1$ это уже сделано. Допустим, что построение выполнено при некотором $n \geq 2$. Для любого $x > x_n$ обозначим

$$\delta(x, \varepsilon) \equiv e^{h(x_n)} \left(\mathbf{E} \{ e^{\varepsilon \min(h'(x_n)(\xi - x_n), f(\xi) - f(x_n))}; \xi \in (x_n, x] \} + e^{\varepsilon \min(h'(x_n)(x - x_n), f(x) - f(x_n))} \bar{F}(x) \right).$$

Поскольку $g(x) \rightarrow \infty$ и ξ имеет распределение с тяжелым хвостом, то по условию (8) найдется x_{n+1} настолько большое, что $e^{g(x)} \geq 2^{n+1}$ при всех $x \geq x_{n+1}$ и

$$\delta(x_{n+1}, 1) > e^{h(x_n)} \bar{F}(x_n) + 1.$$

Заметим, что функция $\delta(x_{n+1}, \varepsilon)$ непрерывно убывает и стремится к $e^{h(x_n)} \bar{F}(x_n)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Поэтому можно выбрать $\varepsilon_{n+1} \in (0, 1]$ так, что

$$\delta(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) = e^{h(x_n)} \bar{F}(x_n) + 2^{-(n+1)}.$$

Тогда

$$\mathbf{E} \{ e^{h(\xi)}; \xi \in (x_n, x_{n+1}] \} + e^{h(x_{n+1})} \bar{F}(x_{n+1}) = e^{h(x_n)} \bar{F}(x_n) + 2^{-(n+1)}.$$

Таким образом доказан индукционный переход от n к $n+1$, что и требовалось показать.

Далее, для любого N

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ e^{h(\xi)}; \xi \leq x_{N+1} \} &= \sum_{n=0}^N \mathbf{E} \{ e^{h(\xi)}; \xi \in (x_n, x_{n+1}] \} \\ &= \sum_{n=0}^N \left(e^{h(x_n)} \bar{F}(x_n) - e^{h(x_{n+1})} \bar{F}(x_{n+1}) + 2^{-(n+1)} \right) \leq e^{h(x_0)} \bar{F}(x_0) + 1, \end{aligned}$$

так что $\mathbf{E} e^{h(\xi)}$ конечно. С другой стороны, так как $e^{g(x)} \geq 2^k$ при всех $x \geq x_k$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ e^{h(\xi)+g(\xi)}; \xi > x_n \} &\geq 2^n \left(\mathbf{E} \{ e^{h(\xi)}; \xi \in (x_n, x_{n+1}] \} + e^{h(x_{n+1})} \bar{F}(x_{n+1}) \right) \\ &= 2^n (e^{h(x_n)} \bar{F}(x_n) + 2^{-(n+1)}). \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{E} \{ e^{h(\xi)+g(\xi)}; \xi > x_n \} \geq \frac{1}{2}$ при любом n , что влечет $\mathbf{E} e^{h(\xi)+g(\xi)} = \infty$. Доказательство завершено.

Лемма 2. Пусть случайная величина $\xi \geq 0$ имеет распределение с тяжелым хвостом. Пусть $f_1: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ — любая измеримая функция, а $f_2: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ — вогнутая функция такие, что

$$\mathbf{E} e^{f_1(\xi)} < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E} e^{f_1(\xi)+f_2(\xi)} = \infty.$$

Пусть функция $g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ такова, что $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда существует вогнутая функция $h: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что $h \leq f_2$,

$$\mathbf{E} e^{f_1(\xi)+h(\xi)} < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E} e^{f_1(\xi)+h(\xi)+g(\xi)} = \infty.$$

Доказательство. Определим новую вероятностную меру $\mathbf{P}^*$ следующим образом:

$$\mathbf{P}^* \{ d\omega \} = \frac{e^{f_1(\xi(\omega))} \mathbf{P} \{ d\omega \}}{\mathbf{E} e^{f_1(\xi)}}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}^* e^{f_2(\xi)} = \frac{\mathbf{E} e^{f_1(\xi)+f_2(\xi)}}{\mathbf{E} e^{f_1(\xi)}} = \infty.$$

В частности, ξ имеет распределение с тяжелым хвостом относительно меры $\mathbf{P}^*$. Поэтому из леммы 1 вытекает, что найдется вогнутая функция $h: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что $h \leq f_2$, $h(x) = o(x)$, $\mathbf{E}^* e^{h(\xi)} < \infty$ и $\mathbf{E}^* e^{h(\xi)+g(\xi)} = \infty$. Это эквивалентно тому, что

$$\mathbf{E} e^{f_1(\xi)+h(\xi)} = \mathbf{E} e^{f_1(\xi)} \mathbf{E}^* e^{h(\xi)} < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E} e^{f_1(\xi)+h(\xi)+g(\xi)} = \mathbf{E} e^{f_1(\xi)} \mathbf{E}^* e^{h(\xi)+g(\xi)} = \infty.$$

Доказательство завершено.

3. Скорость роста сумм в терминах обобщенных моментов. Согласно закону больших чисел, сумма S_n растет как $nE\xi$. В следующей лемме приводятся условия на функцию $h(x)$, гарантирующие правильный рост функционала $Ee^{h(S_n)}$.

Лемма 3. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина. Пусть $h: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ — неубывающая функция, являющаяся вогнутой при достаточно больших x , причем $h(x) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$ и $h(x) \geq \ln x$ при всех достаточно больших x . Если $Ee^{h(\xi)} < \infty$, то при любом $c > E\xi$ найдется константа $K(c)$ такая, что $Ee^{h(S_n)} \leq K(c)e^{h(nc)}$ при всех n .

Для доказательства этой леммы нам необходимо следующее утверждение, обобщающее соответствующую оценку из [6].

Лемма 4. Пусть η — случайная величина, причем $E\eta < 0$. Пусть $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — неубывающая функция, являющаяся вогнутой при достаточно больших x , причем $h(x) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$ и $h(x) \geq \ln x$ для всех достаточно больших x . Если $Ee^{h(\eta)} < \infty$, то существует x_0 такое, что при всех $x > x_0$ выполняется неравенство $Ee^{h(x+\eta)} \leq e^{h(x)}$.

Доказательство. Поскольку h не убывает, то без ограничения общности можно предполагать, что случайная величина η ограничена снизу, т.е. $\eta \geq M$ для некоторого M . Также можно предполагать, что h неотрицательна и вогнута на всей положительной полуоси $[0, \infty)$.

Так как h вогнута, то $h'(x)$ не возрастает. С необходимостью $h'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, в противном случае нарушается условие $h(x) = o(x)$. Если $h'(x) = 0$ при всех достаточно больших x , то h постоянна с некоторого момента и утверждение леммы очевидно.

Рассмотрим теперь случай, когда $h'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и $h'(x) > 0$ для всех x . Положим $g(x) \equiv 1/h'(x)$, тогда $g(x) \uparrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Поскольку $E\eta < 0$, то можно выбрать достаточно большое A такое, что

$$\varepsilon \equiv E\{\eta; \eta \in [M, A]\} + eE\{\eta; \eta > A\} < 0. \quad (9)$$

Вогнутость h влечет при всех $x, y \in \mathbf{R}$ неравенство $h(x+y) - h(x) \leq h'(x)y$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Ee^{h(x+\eta)-h(x)} &\leq E\{e^{h'(x)\eta}; \eta \in [M, A]\} + E\{e^{h'(x)\eta}; \eta \in (A, g(x))\} \\ &\quad + E\{e^{h(x+\eta)-h(x)}; \eta > g(x)\} \equiv E_1 + E_2 + E_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку $h'(x) \rightarrow 0$, то из разложения экспоненциальной функции в ряд Тейлора с точностью до линейного члена получаем при $x \rightarrow \infty$

$$E_1 = P\{\eta \in [M, A]\} + h'(x)E\{\eta; \eta \in [M, A]\} + o(h'(x)). \quad (11)$$

На событии $\eta \in (A, g(x))$ выполнено $h'(x)\eta \leq 1$ и, значит, $e^{h'(x)\eta} \leq 1 + eh'(x)\eta$. Тогда

$$E_2 \leq P\{\eta \in (A, g(x))\} + eh'(x)E\{\eta; \eta \in (A, g(x))\}. \quad (12)$$

Имеем

$$E_3 = E\{e^{h(\eta)}e^{h(x+\eta)-h(x)-h(\eta)}; \eta > g(x)\}. \quad (13)$$

Так как функция h вогнута, то при $x > 0$ разность $h(x+y) - h(y)$ не возрастает по y . Следовательно, при всех $y > g(x)$

$$\begin{aligned} h(x+y) - h(x) - h(y) &\leq h(x+g(x)) - h(x) - h(g(x)) \\ &\leq h'(x)g(x) - h(g(x)) = 1 - h(g(x)) \leq 1 - \ln g(x), \end{aligned}$$

где последнее неравенство выполняется в силу того, что $h(x) \geq \ln x$ при всех достаточно больших x . Эта оценка и (13) влекут

$$E_3 \leq E\{e^{h(\eta)}; \eta > g(x)\}e^{1-\ln g(x)} \stackrel{(a)}{=} \frac{o(1)}{g(x)} = o(h'(x)) \quad (14)$$

при $x \rightarrow \infty$, где равенство (а) справедливо ввиду условия $\mathbf{E}e^{h(\eta)} < \infty$. Подставляя (11), (12) и (14) в (10) и принимая во внимание выбор (9) величины A , получаем:

$$\mathbf{E}e^{h(x+\eta)} = e^{h(x)} \mathbf{E}e^{h(x+\eta)-h(x)} \leq e^{h(x)}(1 + h'(x)\varepsilon + o(h'(x))) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Поскольку $\varepsilon < 0$, последняя оценка влечет неравенство $\mathbf{E}e^{h(x+\eta)} < e^{h(x)}$ при всех достаточно больших x . Доказательство завершено.

Доказательство леммы 3. Положим $\eta_n = \xi_n - c$. Тогда $\mathbf{E}\eta_n < 0$ и $\mathbf{E}e^{h(\eta_n)} < \infty$. По лемме 4 найдется число $x_0 > 0$ такое, что $\mathbf{E}e^{h(x+\eta_n)} \leq \mathbf{E}e^{h(x)}$ при $x > x_0$. Поэтому из монотонности $h(x)$ и неотрицательности S_{n-1} следуют неравенства

$$\mathbf{E}e^{h(S_n)} \leq \mathbf{E}e^{h(S_n+x_0)} = \mathbf{E}e^{h(S_{n-1}+x_0+c+\eta_n)} \leq \mathbf{E}e^{h(S_{n-1}+x_0+c)}.$$

Воспользовавшись индукцией, получаем $\mathbf{E}e^{h(S_n)} \leq e^{h(cn+x_0)} \leq e^{h(cn)}e^{h(x_0)}$. Доказательство завершено.

4. Доказательство теоремы 2. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2, сформулируем следующее утверждение из [3, следствие 1].

Предложение 1. Пусть существует вогнутая функция $r: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что $\mathbf{E}e^{r(\xi)} < \infty$ и $\mathbf{E}\xi e^{r(\xi)} = \infty$. Если распределение F имеет тяжелый хвост и $\mathbf{E}\tau e^{r(\tau-1)} < \infty$, то справедливо (1).

Нам понадобятся также два вспомогательных технических результата.

Лемма 5. Пусть $\chi \geq 0$ — некоторая случайная величина. Тогда существует дифференцируемая вогнутая функция $g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ такая, что $g(0) = 0$, $g'(x) \leq 1$ при всех x , $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ и $\mathbf{E}e^{g(\chi)} < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим возрастающую последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} - x_n > x_n - x_{n-1}$ и $\mathbf{P}\{\chi > x_n\} \leq e^{-n}$. Положим $g_1(x_n) = n/2$ и определим g линейным образом между этими точками. Тогда при всех $x \in (x_n, x_{n+1})$ и $y \in (x_{n+1}, x_{n+2})$

$$g'_1(x) = \frac{1}{2(x_{n+1} - x_n)} > \frac{1}{2(x_{n+2} - x_{n+1})} = g'_1(y),$$

так что g_1 вогнута. По построению $g_1(x) \uparrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ и $g'_1(x) \leq 1$ в точках, где производная существует. Наконец,

$$\mathbf{E}e^{g_1(\chi)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{g_1(x_{n+1})} \mathbf{P}\{\chi > x_n\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{(n+1)/2} e^{-n} < \infty.$$

Применение процедуры сглаживания — например, $g(x) = \int_x^{x+1} g_1(y) dy - \int_0^1 g_1(y) dy$ — завершает доказательство.

Лемма 6. Пусть $\chi \geq 0$ — такая случайная величина, что $\mathbf{E}e^{f(\chi)} = \infty$ для некоторой вогнутой функции $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$. Тогда найдется вогнутая функция $f_1: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ такая, что $f_1 \leq f$, $f_1(x) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$ и $\mathbf{E}e^{f_1(\chi)} = \infty$.

Доказательство. Возьмем x_1 настолько большим, что $\mathbf{E}\{e^{\min(x, f(x))}; \chi \leq x_1\} \geq 1$, и положим $f_1(x) = \min(x, f(x))$ при $x \in [0, x_1]$. Тогда для любого n можно выбрать по индукции число x_{n+1} так, что

$$\mathbf{E}\{e^{f_1(x_n) + \min(n^{-1}f'_1(x_n)(x-x_n), f(x)-f(x_n))}; \chi \in (x_n, x_{n+1}]\} \geq 1.$$

Положим $f_1(x) = f_1(x_n) + \min(n^{-1}f'_1(x_n)(x-x_n), f(x)-f(x_n))$ при $x \in (x_n, x_{n+1}]$. По построению f_1 вогнута, $f_1 \leq f$ и $f'_1(x_{n+1}) \leq f'_1(x_n)/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности можно предполагать, что $f(x) \geq \ln x$ при всех x и что функция $f_2(x) \equiv f(x) - \ln x$ вогнута на всей положительной полуоси. Используя лемму 6 и рассуждения, связанные с заменой меры и аналогичные приведенным в доказательстве леммы 2, приходим к выводу, что можно с самого начала предполагать, что $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Далее, можно утверждать, что существует вогнутая функция $g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что $g(x) \rightarrow \infty$

при $x \rightarrow \infty$, $g(x) \leq \ln x$ при всех достаточно больших x , разность $\ln x - g(x)$ является неубывающей функцией и $\mathbf{E}e^{f(c\tau)+g(c\tau)} < \infty$. В самом деле, из леммы 5 с использованием рассуждений, связанных с заменой меры, следует существование дифференцируемой вогнутой функции $g_1: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ такой, что $g_1(0) = 0$, $g_1(x) \uparrow \infty$, $g_1'(x) \leq 1$ и $\mathbf{E}e^{f(c\tau)+g_1(c\tau)} < \infty$. Положим $g(x) = g_1(\ln(x+1)) - 1$. Тогда g — монотонная функция, возрастающая к бесконечности, и $g(x) \leq \ln x$ при всех достаточно больших x . Кроме того,

$$(\ln x - g(x))' = x^{-1} - g_1'(\ln(x+1))(x+1)^{-1} \geq 0,$$

так что разность $\ln x - g(x)$ не убывает, что и требовалось показать.

Поскольку функция $f_2(x)$ вогнута, то в силу леммы 2 при $f_1(x) = \ln x$ существует вогнутая функция h такая, что $h \leq f_2$, $h(x) = o(x)$, $\mathbf{E}\xi e^{h(\xi)} < \infty$ и $\mathbf{E}\xi e^{h(\xi)+g(\xi)} = \infty$. Поскольку $\ln x + h(x) + g(x) \leq f(x) + g(x)$, то по условию (4) и по выбору g

$$\mathbf{E}\tau e^{h(c\tau)+g(c\tau)} < \infty. \quad (15)$$

Вогнутая функция $r(x) = h(x) + g(x)$ удовлетворяет всем условиям предложения 1. Действительно, из неравенства $g(x) \leq \ln x$ при всех достаточно больших x следует $\mathbf{E}e^{r(\xi)} < \infty$, так как $\mathbf{E}\xi e^{h(\xi)} < \infty$. Осталось проверить, что $\mathbf{E}\tau e^{r(S_{\tau-1})} < \infty$. Поскольку из (15) вытекает

$$\mathbf{E}\{\tau e^{r(S_{\tau})}; S_{\tau} \leq c\tau\} \leq \mathbf{E}\tau e^{r(c\tau)} < \infty,$$

то достаточно показать, что $\mathbf{E}\{\tau e^{r(S_{\tau})}; S_{\tau} > c\tau\} < \infty$. Рассмотрим следующее представление:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\tau e^{r(S_{\tau})}; S_{\tau} > c\tau\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau = n\} n \mathbf{E}\{e^{r(S_n)}; S_n > cn\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau = n\} e^{g(cn)+\ln(cn)-g(cn)} \mathbf{E}\{e^{h(S_n)+g(S_n)}; S_n > cn\}. \end{aligned}$$

Так как разность $\ln x - g(x)$ является монотонной функцией, получаем следующую оценку:

$$\mathbf{E}\{\tau e^{r(S_{\tau})}; S_{\tau} > c\tau\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau = n\} e^{g(cn)} \mathbf{E}\{e^{\ln S_n + h(S_n)}; S_n > cn\}.$$

Поскольку функция $\ln x + h(x)$ вогнута и $\ln x + h(x) \geq \ln x$, то по лемме 3

$$\mathbf{E}e^{\ln S_n + h(S_n)} \leq K(c) e^{\ln(nc) + h(cn)}$$

для некоторого $K(c) < \infty$. Поэтому

$$\mathbf{E}\{\tau e^{r(S_{\tau})}; S_{\tau} > c\tau\} \leq K(c) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau = n\} e^{g(cn)} e^{\ln(cn) + h(cn)} = K(c) c \mathbf{E}\tau e^{h(c\tau) + g(c\tau)} < \infty$$

в силу (15). Теорема 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 1. Пусть G обозначает распределение $\sigma\tau$.

Построим возрастающую вогнутую функцию $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ такую, что

$$\mathbf{E}\xi e^{f(\xi)} = \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\tau e^{f(c\tau)} < \infty. \quad (16)$$

Тогда нужное соотношение (1) будет следовать из теоремы 2.

Если распределение G имеет легкий хвост, то можно положить $f(x) = \lambda x$ при некотором достаточно маленьком $\lambda > 0$. Далее будем предполагать, что G имеет тяжелый хвост.

Рассмотрим новые случайные величины ξ_* и τ_* со следующими распределениями:

$$\mathbf{P}\{\xi_* \in dx\} = \frac{x F(dx)}{\mathbf{E}\xi} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{\tau_* = n\} = \frac{n \mathbf{P}\{\tau = n\}}{\mathbf{E}\tau}.$$

Пусть F_* и G_* обозначают распределения ξ_* и $\sigma\tau_*$ соответственно. Тогда оба распределения F_* и G_* имеют тяжелые хвосты и

$$\bar{G}_*(x) = o(\bar{F}_*(x)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Распределение G_* имеет тяжелый хвост тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_1^\infty \bar{G}_*(\varepsilon^{-1} \ln x) dx \equiv \int_0^\infty e^x \bar{G}_*\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \infty. \quad (18)$$

В терминах новых распределений F_* и G_* условия (16) могут быть переформулированы следующим образом: необходимо построить возрастающую вогнутую функцию f такую, что $\mathbf{E}e^{f(\xi_*)} = \infty$ и $\mathbf{E}e^{f(\sigma\tau_*)} < \infty$, или, что эквивалентно,

$$\int_1^\infty \bar{F}_*(f^{-1}(\ln x)) dx = \infty \quad \text{и} \quad \int_1^\infty \bar{G}_*(f^{-1}(\ln x)) dx < \infty. \quad (19)$$

Вогнутость f эквивалентна выпуклости обратной функции $h = f^{-1}$. Поэтому условия (19) могут быть переформулированы так: надо найти возрастающую выпуклую функцию h такую, что

$$\int_0^\infty e^x \bar{F}_*(h(x)) dx = \infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty e^x \bar{G}_*(h(x)) dx < \infty. \quad (20)$$

Построим $h(x)$ в виде кусочно-линейной функции. Для этого введем две возрастающие последовательности, скажем, $x_n \uparrow \infty$ и $a_n \uparrow \infty$, и положим $h(x) = h(x_n) + a_n(x - x_n)$ при $x \in (x_n, x_{n+1}]$. Тогда выпуклость f будет следовать из возрастания $\{a_n\}$.

Положим $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$. Согласно (17) и (18), можно выбрать x_1 настолько большим, что $\bar{F}_*(y)/\bar{G}_*(y) \geq 2^1$ для всех $y > x_1$ и $\int_0^{x_1} e^x \bar{G}_*(h(x_0) + 1 \cdot (x - x_0)) dx \geq 1$. Тогда существует достаточно большое $a_0 \geq 1$, для которого

$$\int_0^{x_1} e^x \bar{G}_*(h(x_0) + a_0(x - x_0)) dx = 1.$$

Теперь воспользуемся индукцией для построения возрастающих последовательностей $\{x_n\}$ и $\{a_n\}$ таких, что

$$\frac{\bar{F}_*(y)}{\bar{G}_*(y)} \geq 2^{n+1} \quad (21)$$

при всех $y > x_{n+1}$ и $\int_{x_n}^{x_{n+1}} e^x \bar{G}_*(h(x)) dx = 2^{-n}$. При $n = 0$ это уже сделано. Предположим, что построение проведено для некоторого $n \geq 1$. Для любого $x > x_{n+1}$ обозначим

$$\delta(x, a) \equiv \int_{x_{n+1}}^x e^y \bar{G}_*(h(x_{n+1} + a(y - x_{n+1}))) dy.$$

Согласно (17) и (18), можно выбрать x_{n+2} настолько большим, что $\bar{F}_*(y)/\bar{G}_*(y) \geq 2^{n+2}$ при всех $y > x_{n+2}$ и $\delta(x_{n+2}, a_n) \geq 1$. Поскольку функция $\delta(x_{n+2}, a)$ непрерывно убывает к 0 при $a \uparrow \infty$, можно выбрать число $a_{n+1} > a_n$ таким, что $\delta(x_{n+2}, a_{n+1}) = 2^{-(n+1)}$. Тогда

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} e^x \bar{G}_*(h(x)) dx = 2^{-(n+1)}.$$

Таким образом доказан индукционный переход от n к $n + 1$.

Это означает, что имеет место (20), поскольку по построению функции h

$$\int_0^\infty e^x \bar{G}_*(h(x)) dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^x \bar{G}_*(h(x)) dx = \sum_{n=0}^\infty 2^{-n} < \infty$$

и, ввиду (21),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^x \bar{F}_*(h(x)) dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^x \bar{F}_*(h(x)) dx \\ &\geq \sum_{n=0}^\infty 2^n \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^x \bar{G}_*(h(x)) dx = \sum_{n=0}^\infty 2^n 2^{-n} = \infty. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

6. Доказательство теоремы 3. Условие (6) и стандартные рассуждения (см. лемму 7 в [5]) приводят к неравенству

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{*\tau}(x)}{\bar{F}(x)} \geq \mathbf{E} \tau \varphi^{\tau-1}(\hat{\gamma}).$$

Таким образом, достаточно доказать обратное неравенство.

Произведем экспоненциальную замену меры с параметром $\hat{\gamma}$ и рассмотрим распределение $G(du) = e^{\hat{\gamma}u} F(du) / \varphi(\hat{\gamma})$ и момент остановки ν с распределением $\mathbf{P}\{\nu = k\} = \varphi^k(\hat{\gamma}) \mathbf{P}\{\tau = k\} / \mathbf{E} \varphi^\tau(\hat{\gamma})$. Заметим, что $\mathbf{E} \varphi^\tau(\hat{\gamma})$ конечно ввиду условия (5).

Из [3, лемма 3] следует, что

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}^{*\nu}(x)}{\bar{G}(x)} \geq \frac{1}{\mathbf{E} \varphi^{\tau-1}(\hat{\gamma})} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{*\tau}(x)}{\bar{F}(x)}. \quad (22)$$

Из определения $\hat{\gamma}$ вытекает, что распределение G имеет тяжелый хвост со средним $\varphi'(\hat{\gamma}) / \varphi(\hat{\gamma})$. Поэтому можно применить теорему 1 к G и ν , поскольку (5) эквивалентно условию

$$\mathbf{P}\{c\nu > x\} = o(\bar{G}(x)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Следовательно, выполняются равенства

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}^{*\nu}(x)}{\bar{G}(x)} = \mathbf{E} \nu = \frac{\mathbf{E} \tau \varphi^\tau(\hat{\gamma})}{\mathbf{E} \varphi^\tau(\hat{\gamma})},$$

и, согласно (22),

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{*\tau}(x)}{\bar{F}(x)} \leq \mathbf{E} \tau \varphi^{\tau-1}(\hat{\gamma}).$$

Доказательство завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chover J., Ney P., Wainger S. Functions of probability measures. — J. Anal. Math., 1973, v. 26, p. 255–302.
2. Cline D. Convolutions of distributions with exponential and subexponential tails. — J. Aust. Math. Soc., 1987, v. 43, № 3, p. 347–365.
3. Denisov D., Foss S., Korshunov D. On lower limits and equivalences for tails of randomly stopped sums. — Bernoulli (to appear).
4. Embrechts P., Goldie C. M. On convolution tails. — Stochastic Process. Appl., 1982, v. 13, № 3, p. 263–278.
5. Foss S., Korshunov D. Lower limits and equivalences for convolution tails. — Ann. Probab., 2007, v. 35, № 1, p. 366–383.
6. Foss S., Sapozhnikov A. On the existence of moments for the busy period in the single-server queue. — Math. Oper. Res., 2004, v. 29, № 3, p. 592–601.
7. Pakes A. G. Convolution equivalence and infinite divisibility. — J. Appl. Probab., 2004, v. 41, № 2, p. 407–424.
8. Rogozin Б. А. О постоянной в определении субэкспоненциальных распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 2, с. 455–458.
9. Rudin W. Limits of ratios of tails of measures. — Ann. Probab., 1973, v. 1, p. 982–994.

Поступила в редакцию
13.VI.2007