Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К.-Н. Indlekofer, О. И. Клесов, Усиленный закон больших чисел для кратных сумм, индексы которых принадлежат сектору, ограниченному двумя функциями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 4, 803–810

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1649>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:41:33

© 2007 г.

ИНДЛЕКОФЕР К.-Х.*, КЛЕСОВ О.И.**

УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ КРАТНЫХ СУММ, ИНДЕКСЫ КОТОРЫХ ПРИНАДЛЕЖАТ СЕКТОРУ, ОГРАНИЧЕННОМУ ДВУМЯ ФУНКЦИЯМИ¹⁾

Найдены необходимые и достаточные условия справедливости усиленного закона больших чисел для двойных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин для случая, когда индексы сумм принадлежат сектору, граница которого образована двумя функциями.

Ключевые слова и фразы: усиленный закон больших чисел, двойные суммы, случайные поля.

1. Введение. Пусть $d \geq 1$ и $\mathbb{N}^d$ — пространство d -мерных векторов с целыми положительными координатами. Рассмотрим семейство $\{X(k_1, \dots, k_d); k_1 \geq 1, \dots, k_d \geq 1\}$ независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин. Для $n_1 \geq 1, \dots, n_d \geq 1$ положим

$$S(n_1, \dots, n_d) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_d=1}^{n_d} X(k_1, \dots, k_d). \quad (1.1)$$

Целью этой работы является изучение поведения почти наверное «прямоугольных» сумм $S(n_1, \dots, n_d)$ при изменении их индексов в определенном множестве. Аналогом такой постановки в классическом случае $d = 1$ является усиленный закон больших чисел для подпоследовательностей. Основным результатом работы является теорема 1. В п. 3 мы приводим также несколько ее следствий для конкретных случаев.

Закон больших чисел для кратных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин получен в работе Р.Т. Смайза [6] для случая, когда индексы меняются без ограничений. В [6] доказано, что соотношение

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{S(n_1, \dots, n_d)}{n_1 \dots n_d} - \mu \right| \geq \varepsilon \text{ б.ч.} \right\} = 0 \quad \text{для всех } \varepsilon > 0 \quad (1.2)$$

выполняется для некоторой неслучайной константы μ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}X = \mu, \quad \mathbf{E}|X|(\ln^+ |X|)^{d-1} < \infty. \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем аббревиатура «б.ч.» означает «бесконечное количество раз» (или «бесконечно часто»), X — это случайная величина, имеющая то же распределение, что и все другие случайные величины $X(k_1, \dots, k_d)$, а $\ln^+ z = \ln(1 + z)$ для $z \geq 0$. Этот результат совпадает с классическим законом больших чисел Колмогорова в случае $d = 1$, но при $d > 1$ соотношение (1.2) формально сильнее, чем утверждение о том, что семейство случайных величин $\{S(n_1, \dots, n_d)/(n_1 \dots n_d)\}$ имеет предел почти наверное при $n_1 \rightarrow \infty, \dots, n_d \rightarrow \infty$.

В определенном смысле можно считать, что исследования соотношений, подобных (1.2), были начаты Н. Винером [7], который изучал эргодическую теорему для некоммутативных групп преобразований, сохраняющих меру в измеримом пространстве. Винер [7] рассматривал случай кратных интегралов, а не сумм, причем областью интегрирования у него были расширяющиеся шары.

Результат работы [7] обобщен А. Зигмундом [8], который также изучал непрерывный случай в эргодической теореме, хотя областью интегрирования у него были

* Fachbereich Mathematik-Informatik, Universität Paderborn, Warburger Str., 100, 33098 Paderborn, Germany; e-mail: k-heinz@uni-paderborn.de

** Кафедра математического анализа и теории вероятностей, Национальный технический университет Украины, пр-т Победы, 37, 02056 Киев, Украина; e-mail: tbimc@ln.ua

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантом DFG 436 UKR 113/41/0-2.

параллелепипеды вместо шаров. Н. Данфорд [2] одновременно и независимо от Зигмунда [8] изучал эргодическую теорему для дискретного времени, причем вместо интегралов он рассматривал кратные суммы. Постановка задачи в [2] наиболее близка к нашей.

А. Гут [3] первым рассмотрел усиленный закон больших чисел для кратных сумм, индексы которых удовлетворяют некоторым ограничениям.

О п р е д е л е н и е. Пусть заданы бесконечное подмножество $A \subseteq \mathbb{N}^d$ и семейство (поле) действительных чисел $\{c(k_1, \dots, k_d); k_1 \geq 1, \dots, k_d \geq 1\}$. Мы пишем

$$\lim_A c(n_1, \dots, n_d) = c,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|c(n_1, \dots, n_d) - c| < \varepsilon$ выполняется для всех векторов $(n_1, \dots, n_d) \in A$, кроме, возможно, конечного их числа.

Определим также последовательность Дирихле $\{\tau_n, n \geq 1\}$ на множестве A следующим образом:

$$\tau_n = \text{card}\{(k_1, \dots, k_d) \in A: k_1 \cdots k_d = n\}, \quad n \geq 1.$$

В [3] изучен следующий вопрос: какие условия на распределение случайных величин $X(k_1, \dots, k_d)$ являются необходимыми и достаточными в случае $A = A_\theta$ для того, чтобы

$$\lim_A \frac{S(n_1, \dots, n_d)}{n_1 \cdots n_d} = \mu \quad \text{п.н.}, \quad (1.4)$$

где $A = A_\theta = \{(n_1, \dots, n_d): \theta n_i \leq n_j \leq \theta^{-1} n_i \text{ для всех } 1 \leq i < j \leq d\}$, а $0 < \theta < 1$ фиксировано? Оказалось, что ответ не зависит от θ и таким условием является выполнение равенства

$$EX = \mu. \quad (1.5)$$

Вполне естественным является желание обобщить постановку Гута на случай других множеств A вместо секторов A_θ . Подобная попытка предпринята в статье [5] для случая $d = 2$ и $A = \{(i, j): g_1(i) \leq j \leq g_2(i)\}$, где возрастающие функции g_1 и g_2 таковы, что

$$g_1(x) \leq x \leq g_2(x) \quad \text{для всех } x \geq 1, \quad (1.6)$$

$$\frac{g_1(x)}{x} \downarrow \quad \text{и} \quad \frac{g_2(x)}{x} \uparrow. \quad (1.7)$$

Случай, рассмотренный в [3], отвечает выбору функций $g_1(x) = \theta x$ и $g_2(x) = \theta^{-1} x$.

Достаточное условие для усиленного закона больших чисел на A в работе [5] имеет следующий вид:

$$\sum_{(i,j) \in A} \mathbf{P}\{|X| \geq ij\} < \infty, \quad (1.8)$$

где X — копия случайной величины $X(1, 1)$. Необходимость условия (1.8) не обсуждалась в [5].

Целью этой заметки является изучение усиленного закона больших чисел для случая $d = 2$ при отказе от условия (1.7). При этом мы доказываем, что условия являются необходимыми и достаточными. В доказательстве применяется новый метод, не требующий подсчета количества целых точек в области A , но зависящий от некоторых свойств последовательности $T_n = \tau_1 + \dots + \tau_n$, которые мы устанавливаем без использования асимптотических формул для T_n . Идея заключается в том, чтобы оперировать непосредственно с двойными рядами, не сводя их к однократным (когда и возникает необходимость вычисления T_n). Этот метод требует больше технических преобразований, но в конце концов дает лучший результат, чем в [5].

2. Основной результат. В дальнейшем мы ограничиваемся случаем $d = 2$. Рассмотрим неубывающую функцию f такую, что

$$f(x) \geq x \quad \text{для всех } x \geq 1. \quad (2.1)$$

Определим множество A следующим образом:

$$A = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2: i \leq j \leq f(i)\}. \quad (2.2)$$

Рассмотрим поле независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X(i, j); (i, j) \in \mathbb{N}^2\}$ и поле их прямоугольных сумм $\{S(m, n); (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$:

$$S(m, n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X(i, j).$$

Пусть X — это копия случайной величины $X(1, 1)$. Функцию распределения случайной величины X обозначим F .

Теорема 1. Пусть неубывающая функция f удовлетворяет условию (2.1), а множество A определено в (2.2). Усиленный закон больших чисел

$$\lim_{\substack{A \\ mn}} \frac{S(m, n)}{mn} = \mu \quad \text{н.н.}, \quad (2.3)$$

где μ — некоторая неслучайная константа, эквивалентен совокупности условий (1.5) и (1.8).

З а м е ч а н и е 1. Пусть $\tau_k, k \geq 1$, — это количество решений уравнения $ij = k$ таких, что $(i, j) \in A$. Условие (1.8) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \mathbf{P}\{|X| \geq k\} < \infty.$$

Это условие равносильно следующему:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k \mathbf{P}\{k \leq |X| < k+1\} < \infty,$$

где $T_1 = \tau_1$ и $T_k = \tau_1 + \dots + \tau_k, k \geq 2$. Условие (1.8) вытекает из того, что $\mathbf{E}T(|X|) < \infty$, где $T(x) = T_{[x]}$. Если T изменяется не слишком быстро в том смысле, что $T(x+1) = O(T(x))$, то последнее условие эквивалентно (1.8). Подобными рассуждениями мы воспользуемся в п. 3.

Для доказательства теоремы 1 нам необходимы два вспомогательных результата. Положим $\Pi(m, n) = \{(i, j): 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ для $m \geq 1$ и $n \geq 1$. Мы говорим, что семейство $\mathcal{A}$ множеств A_α линейно упорядочено (по отношению к включению множеств), если для каждой пары $A_\alpha, A_\beta \in \mathcal{A}$ выполнено по крайней мере одно из двух включений: $A_\alpha \subseteq A_\beta$ или $A_\beta \subseteq A_\alpha$.

Лемма 1. Пусть

$$B = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2: j > f(i)\}, \quad C = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2: j < i\}.$$

Оба семейства множеств $\{B \cap \Pi(m, n); (m, n) \in A\}$ и $\{C \cap \Pi(m, n); (m, n) \in A\}$ являются линейно упорядоченными.

Аналогично, мы говорим, что семейство $\mathcal{V}$ точек (m_α, n_α) линейно упорядочено (по координатно), если для каждой пары $(m_\alpha, n_\alpha), (m_\beta, n_\beta) \in \mathcal{V}$ выполнено по крайней мере одно из условий: а) $m_\alpha \leq m_\beta$ и $n_\alpha \leq n_\beta$, б) $m_\beta \leq m_\alpha$ и $n_\beta \leq n_\alpha$.

Лемма 2. Пусть внутренность и граница произвольного множества $D \in \mathbb{N}^2$ определены следующим образом:

$$\text{int}(D) = \{(i, j) \in D: (i-1, j) \in D, (i, j-1) \in D, (i-1, j-1) \in D\}, \quad D = D \setminus \text{int}(D).$$

Положим

$$B = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2: j \geq f(i)\} \quad \text{и} \quad C = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2: j \leq i\}.$$

Оба семейства точек $\partial(B)$ и $\partial(C)$ являются линейно упорядоченными.

Доказательство леммы 1. Доказательство проведем только для семейства $\{B \cap \Pi(m, n); (m, n) \in A\}$. Доказательство для $\{C \cap \Pi(m, n); (m, n) \in A\}$ совершенно аналогично. Для $n \geq 1$ положим $m^* = m^*(n) = \min\{m: f(m) \geq n\}$. Заметим, что поскольку $m^* \leq m$ и $(m^* + k, j) \notin B$ для всех $k \geq 1$ и $j \leq n$, то $B \cap \Pi(m, n) = B \cap \Pi(m^*, n)$ для всех $(m, n) \in A$. Пусть теперь (m_1, n_1) и (m_2, n_2) — два элемента из A , а $m_1^* = m_1^*(n_1)$ и $m_2^* = m_2^*(n_2)$ определены как выше для n_1 и n_2 соответственно. Положим $B_i = B \cap \Pi(m_i, n_i)$ для $i = 1, 2$. Докажем, что если $n_2 \leq n_1$, то $B_2 \subseteq B_1$. Если это не так, то существует точка $(i, j) \in B_2$, для которой $(i, j) \notin B_1$, т.е.

$$i \leq m_2^*, \quad j \leq n_2, \quad j > f(i) \quad \text{и} \quad i > m_1^* \quad \text{или} \quad j > n_1.$$

Неравенство $j > n_1$ противоречит неравенству $j \leq n_2$ и поэтому не может выполняться. В свою очередь, неравенство $i > m_1^*$ также не может выполняться, так как в этом случае в силу монотонности функции f было бы выполнено неравенство $f(i) \geq f(m_1^*)$. Отсюда и из определения m_1^* вытекало бы, что $j > f(i) \geq f(m_1^*) > n_1 \geq n_2$ и, следовательно, $j > n_2$. Это противоречие и доказывает включение $B_2 \subseteq B_1$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Доказательство проведем для $\partial(B)$. Доказательство для $\partial(C)$ совершенно аналогично. Заметим, что

$$\text{для всех } (i, j) \in B \text{ выполнено включение } (i-1, j) \in B. \quad (2.4)$$

Действительно, если бы утверждение (2.4) не выполнялось для некоторой точки $(i, j) \in B$, мы бы получили $j < f(i-1) \leq f(i)$ и, значит, $(i, j) \notin B$. Кроме того,

$$\text{для всех } (i, j) \in \partial(B) \text{ имеет место } (i, j-1) \notin B. \quad (2.5)$$

Если бы утверждение (2.5) не выполнялось для некоторой точки $(i, j) \in \partial(B)$, то было бы выполнено включение $(i, j-1) \in B$. Применяя утверждение (2.4), доказываем, что $(i-1, j-1) \in B$, откуда $(i, j), (i-1, j), (i, j-1), (i-1, j-1) \in B$, а это противоречит включению $(i, j) \in \partial(B)$.

Пусть теперь (m_1, n_1) и (m_2, n_2) — два элемента границы $\partial(B)$. Не теряя общности, предположим, что $m_1 \leq m_2$. Докажем, что в этом случае $n_1 \leq n_2$. Если бы выполнялось обратное, т.е. $n_1 > n_2$, мы бы имели $n_2 \leq n_1 - 1 < f(m_1) \leq f(m_2)$, что противоречит включению $(m_2, n_2) \in B$. Второе неравенство в этой цепочке вытекает из $(m_1, n_1 - 1) \notin B$, что в свою очередь следует из (2.5). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть выполнен усиленный закон больших чисел (2.3). Поскольку $(n, n) \in A$ для всех $n \geq 1$, то $S(n, n)/n^2 \rightarrow \mu$ п.н. при $n \rightarrow \infty$. Последовательность $\{S(n, n), n \geq 1\}$ можно рассматривать как подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ с $n_k = k^2$ последовательности сумм $\{S_n, n \geq 1\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_k, k \geq 1\}$ с функцией распределения F . Следовательно $(S_{n_{k+1}} - S_{n_k})/n_k \rightarrow 0$ п.н. при $k \rightarrow \infty$ и поэтому из леммы Бореля–Кантелли вытекает, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|S_{2k+1}| \geq \varepsilon k^2\} < \infty. \quad (2.6)$$

Поскольку случайные величины $\{X_n\}$ независимы, одинаково распределены и

$$\{\omega: |S_{2k+1}| \geq \varepsilon k^2\} \supseteq \{\omega: |S_{2k}| \geq 2\varepsilon k^2\} \cap \{\omega: |X_{2k+1}| < \varepsilon k^2\},$$

мы заключаем из (2.6), что $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|S_{2k}| \geq \varepsilon k^2\} < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$, откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|S_k| \geq \varepsilon k^2\} < \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0.$$

Теперь мы применяем один из результатов работы [1] и доказываем, что $\mathbf{E}|X| < \infty$. Согласно усиленному закону больших чисел Колмогорова, это означает, что $S_n/n \rightarrow \mathbf{E}X$ п.н. при $n \rightarrow \infty$. В частности, $S_{n_k}/n_k \rightarrow \mathbf{E}X$ п.н., значит, $\mu = \mathbf{E}X$. Таким образом, (1.5) доказано.

Остается доказать (1.8). Ясно, что

$$X(i, j) = S(i, j) - S(i-1, j) - S(i, j-1) + S(i-1, j-1),$$

значит, из усиленного закона больших чисел (2.3) вытекает, что п.н. неравенство $|X(i, j)| \geq ij$ может выполняться только для конечного числа пар $(m, n) \in \text{int}(A)$. Применяя лемму Бореля–Кантелли для независимых событий $\{\omega: |X(i, j)| \geq ij\}$, получаем

$$\sum_{(i, j) \in \text{int}(A)} \mathbf{P}\{|X| \geq ij\} < \infty. \quad (2.7)$$

Пусть теперь B и C определены как в лемме 2. Понятно, что $\partial(A) = \partial(B) \cup \partial(C)$. Более того, $\partial(C) = \{(i, j): i = j\}$ и поэтому

$$\sum_{(i, j) \in \partial(C)} \mathbf{P}\{|X| \geq ij\} < \infty \quad (2.8)$$

в силу условия (1.5) (заметим, что (2.8) равносильно $\mathbf{E}|X|^{1/2} < \infty$). Семейство точек $\partial(B)$ линейно упорядочено в силу леммы 2, поэтому уравнение $ij = k$ имеет не более одного решения $(i, j) \in \partial(B)$. Значит, из условия (1.5) вытекает

$$\sum_{(i,j) \in \partial(B)} \mathbf{P}\{|X| \geq ij\} < \infty. \quad (2.9)$$

Объединяя (2.7)–(2.9), доказываем (1.8).

Достаточность. Пусть условия (1.5) и (1.8) выполнены. Не теряя общности, предположим, что $\mu = 0$. Если положить $S_D(m, n) = \sum_{(i,j) \in D \cap \Pi(m, n)} X(i, j)$ для произвольного множества $D \subset \mathbf{N}^2$ и считать, что $\sum_{(i,j) \in \emptyset} X(i, j) = 0$, то

$$S(m, n) = S_A(m, n) + S_B(m, n) + S_C(m, n)$$

для всех $m \geq 1$ и $n \geq 1$, где B и C определены в лемме 1. Усиленный закон больших чисел для сумм S_B и S_C вытекает из теоремы Колмогорова и условия (1.5) (напомним, что $\mu = 0$). Действительно, оба семейства множеств $\{B \cap \Pi(m, n); (m, n) \in A\}$ и $\{C \cap \Pi(m, n); (m, n) \in A\}$ являются линейно упорядоченными в силу леммы 1. В частности, это означает, что оба семейства случайных величин $\{S_B(m, n); (m, n) \in A\}$ и $\{S_C(m, n); (m, n) \in A\}$ можно рассматривать как подпоследовательности $\{S_{m_k}\}$ и $\{S_{n_k}\}$ обычной последовательности сумм $\{S_k, k \geq 1\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_i, i \geq 1\}$, имеющих функцию распределения F . Заметим, что для сумм S_C соответствующая подпоследовательность отвечает индексам $n_k = k(k+1)/2$. Следовательно,

$$\lim_A \frac{S_B(m, n)}{mn} = 0, \quad \lim_A \frac{S_C(m, n)}{mn} = 0 \quad \text{п.н.}, \quad (2.10)$$

поскольку $\text{card}(B \cap \Pi(m, n)) \leq mn$ и $\text{card}(C \cap \Pi(m, n)) \leq mn$.

Рассмотрим теперь суммы S_A . Определим усеченные случайные величины

$$Y(i, j) = \begin{cases} 0, & (i, j) \notin A, \\ X(i, j) \mathbf{I}_{\{|X(i, j)| < ij\}}, & (i, j) \in A, \end{cases}$$

и их частичные суммы

$$T(m, n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Y(i, j).$$

Заметим, что случайные величины $\{Y(i, j); (i, j) \in \mathbf{N}^2\}$ независимы и ограничены, в частности, они имеют второй момент. Более того,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}Y(m, n)}{(mn)^2} < \infty$$

согласно лемме 3, которую мы докажем ниже. Последнее соотношение и аналог теоремы Колмогорова для кратных сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин (см. работу [4]) влекут

$$\mathbf{P}\{|T(m, n) - \mathbf{E}T(m, n)| \geq \varepsilon mn \text{ б.ч.}\} = 0 \quad \text{для всех } \varepsilon > 0. \quad (2.11)$$

Поскольку $\mu = 0$, то

$$\mathbf{E}Y(i, j) = \begin{cases} 0, & (i, j) \notin A, \\ - \int_{|X| \geq ij} X d\mathbf{P}, & (i, j) \in A. \end{cases}$$

Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$

$$\text{неравенство } |\mathbf{E}T(m, n)| \geq \varepsilon mn \text{ выполняется конечное число раз.} \quad (2.12)$$

Действительно, зафиксируем $\delta > 0$. Тогда неравенство $\int_{|X| \geq ij} |X| d\mathbf{P} \geq \delta$ выполняется только для конечного числа пар (i, j) . Если количество таких пар обозначить через $l(\delta)$, то

$$\frac{|\mathbf{E}T(m, n)|}{mn} \leq \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{|X| \geq ij} |X| d\mathbf{P} \leq \delta + \frac{l(\delta) \mathbf{E}|X|}{mn},$$

что и доказывает (2.12).

Чтобы закончить доказательство достаточности, заметим, что

$$\sum_{(i,j) \in A} \mathbf{P}\{X(i, j) \neq Y(i, j)\} = \sum_{(i,j) \in A} \mathbf{P}\{|X| \geq ij\} < \infty$$

в силу условия (1.8). Применяя лемму Бореля–Кантелли для независимых событий, доказываем, что с вероятностью 1 происходит только конечное число событий $\{\omega: X(i, j) \neq Y(i, j)\}$. Это означает, что с вероятностью 1 суммы $S_A(m, n)$ и $T(m, n)$ отличаются только на конечное число слагаемых. Объединяя этот результат с (2.11) и (2.12), получаем

$$\lim_A \frac{S_A(m, n)}{mn} = 0 \quad \text{п.н.},$$

откуда и вытекает (2.3) ввиду (2.10). Теорема 1 доказана.

Докажем наконец лемму 3, которая использовалась в доказательстве теоремы 1. Заметим, что предположение о монотонности функции f в лемме не обязательно, хотя оно необходимо в доказательстве теоремы 1.

Лемма 3. Пусть X — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Пусть функция f удовлетворяет условию (2.1), а множество A определено согласно (2.2). Если выполнено условие (1.8), то

$$\sum_{(i, j) \in A} \frac{1}{(ij)^2} \int_{\{\omega: |X(\omega)| < ij\}} X^2 dP < \infty. \quad (2.13)$$

Более того,

$$\sum_{(i, j) \in A} \frac{1}{(ij)^2} \int_{\{\omega: |X(\omega)| < ij\}} X^2 dP \leq 2 \sum_{(i, j) \in A} P\{|X| \geq ij\} + 6E|X| + 4E|X|^{1/2} + 4. \quad (2.14)$$

Доказательство. Положим $p_k = \int_{k-1 \leq |X| < k} dP$ для $k \geq 1$ и $R_1 = \sum_{(i, j) \in A} P\{|X| \geq ij\}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{(i, j) \in A} \sum_{k: k \geq ij} p_{k+1} \geq \sum_{(i, j) \in A} \sum_{k: ij \leq k \leq if(i)} p_{k+1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j: j \leq j \leq f(i)} \sum_{k: ij \leq k \leq if(i)} p_{k+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k: i^2 \leq k \leq if(i)} \sum_{j: i \leq j \leq k/i} p_{k+1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k: i^2 \leq k \leq if(i)} p_{k+1} \left(\left[\frac{k}{i} \right] - i + 1 \right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k: i^2 \leq k \leq if(i)} p_{k+1} \left(\frac{k}{i} - i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k: i^2 \leq k \leq if(i)} \frac{k}{i} p_{k+1} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k: i^2 \leq k \leq if(i)} ip_{k+1}. \end{aligned}$$

Второе выражение в правой части не превосходит $E|X|$. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k: i^2 \leq k \leq if(i)} ip_{k+1} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k: k \geq i^2} ip_{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k+1} \sum_{i: i^2 \leq k} i \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{k \leq |X| < k+1} dP \leq E|X|.$$

Определим теперь последовательность $\{\lambda_k, k \geq 1\}$ следующим образом:

$$\lambda_k = \sum_{i: i^2 \leq k, if(i) \geq k} \frac{1}{i}.$$

Тогда

$$R_1 + E|X| \geq \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k p_{k+1}. \quad (2.15)$$

Положим

$$\sigma_k^2 = \int_{k-1 \leq |X| < k} X^2 dP, \quad R_2 = \sum_{(i, j) \in A} \frac{1}{(ij)^2} \int_{\{\omega: |X(\omega)| < ij\}} X^2 dP.$$

Ясно, что

$$R_2 = \sum_{(i, j) \in A} \frac{1}{(ij)^2} \sum_{k=1}^{ij} \sigma_k^2 \leq \sum_{(i, j) \in A} \frac{1}{(ij)^2} \sum_{k=1}^{i^2} \sigma_k^2 + \sum_{(i, j) \in A} \frac{1}{(ij)^2} \sum_{k=i^2}^{ij} \sigma_k^2.$$

Слагаемые в правой части обозначим через R_{21} и R_{22} соответственно. Первое из них не превосходит $4\mathbb{E}|X|$. Действительно,

$$\begin{aligned} R_{21} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j: i \leq j \leq f(i)} \sum_{k=1}^{i^2} \frac{\sigma_k^2}{(ij)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i^2} \frac{\sigma_k^2}{i^2} \sum_{j: i \leq j \leq f(i)} \frac{1}{j^2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i^2} \frac{\sigma_k^2}{i^2} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{j^2} \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i^2} \frac{\sigma_k^2}{i^3} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \sum_{i: i^2 \geq k} \frac{1}{i^3} \leq 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k} \leq 4\mathbb{E}|X|. \end{aligned}$$

Слагаемое R_{22} можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{22} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j: i \leq j \leq f(i)} \frac{1}{(ij)^2} \sum_{k: i^2 \leq k \leq ij} \sigma_k^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k: i^2 \leq k \leq if(i)} \frac{\sigma_k^2}{i^2} \sum_{j: k/i \leq j \leq f(i)} \frac{1}{j^2} \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k: i^2 \leq k \leq if(i)} \frac{\sigma_k^2}{ik} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} kp_k \lambda_k. \end{aligned}$$

Собирая вместе оценки для R_{21} и R_{22} , получаем

$$R_2 \leq 4\mathbb{E}|X| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} kp_k \lambda_k. \quad (2.16)$$

Чтобы закончить доказательство леммы, необходимо сравнить ряды $\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k p_{k+1}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k p_k$. Положим $\lambda'_k = \sum_{i: i^2 \leq k+1, if(i) \geq k} i^{-1}$. Понятно, что

$$\lambda'_k - \lambda_k = \begin{cases} m^{-1}, & \text{если } k+1 = m^2 \text{ для некоторого } m \geq 1, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) p_{k+1} (\lambda'_k - \lambda_k) = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 p_{m^2} \frac{1}{m} \leq \mathbb{E}|X|^{1/2} + 1.$$

С другой стороны, $\lambda'_k \geq \lambda_{k+1}$ и поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) p_{k+1} \lambda_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) p_{k+1} \lambda_k + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) p_{k+1} (\lambda'_k - \lambda_k),$$

откуда $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k \lambda_k \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} kp_{k+1} \lambda_k + \sum_{k=1}^{\infty} p_{k+1} \lambda_k + \mathbb{E}|X|^{1/2} + 1$. Наконец, $\lambda_k \leq \sqrt{k}$ и поэтому $\sum_{k=1}^{\infty} p_{k+1} \lambda_k \leq \mathbb{E}|X|^{1/2}$, откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k \lambda_k \leq 2 + \sum_{k=1}^{\infty} kp_{k+1} \lambda_k + 2\mathbb{E}|X|^{1/2}.$$

Объединяя эту оценку с (2.15) и (2.16), получаем (2.14). Лемма 3 доказана.

3. Заключительные замечания и примеры.

З а м е ч а н и е 2. Теорему 1 легко обобщить на случай, рассмотренный в работе [5], где границы A сформированы двумя функциями, т.е. $A = \{(i, j): g_1(i) \leq j \leq g_2(i)\}$. Следует также отметить, что условие (1.7), необходимое для метода работы [5], не предполагается в следующем результате.

Следствие 1. Пусть g_1 и g_2 — две неубывающие функции, которые удовлетворяют условию (1.6), а $A = \{(i, j): g_1(i) \leq j \leq g_2(i)\}$. Усиленный закон больших чисел (2.3) эквивалентен условиям (1.5) и (1.8).

З а м е ч а н и е 3. Метод, использованный в доказательстве теоремы 1, можно применить и в случае кратных сумм высших размерностей (т.е. для $d \geq 3$).

Ниже приведены несколько примеров для случая $g_2(x) = x$. Всюду ниже в формулировках мы используем последовательность T_n , $n \geq 1$, и функцию $T(x)$, определенные в замечании 1, а также предполагаем, что $\mathbb{E}X = 0$.

П р и м е р 1. Пусть $g_1(x) = 1$ для всех $x \geq 1$. Из «грубой» оценки в проблеме множителей Дирихле вытекает, что $T_n \asymp n \ln n$, и поэтому условие (1.8) эквивалентно

$E|X| \ln^+ |X| < \infty$. Используя симметрию, мы выводим отсюда усиленный закон больших чисел Смайза [6].

Пример 2. Пусть $0 < \theta < 1$ и $g_1(x) = \theta x$. Тогда $T_n \asymp n$ и мы получаем усиленный закон больших чисел Гута [3].

Пример 3. Пусть $1 > \delta > 0$ и $g_1(x) = x^{1-\delta}$. Тогда $T_n \asymp n \ln n$ и поэтому усиленный закон больших чисел на $A = \{(i, j): i^{1-\delta} \leq j \leq i\}$ эквивалентен условию $E|X| \ln^+ |X| < \infty$.

Пример 4. Пусть $\delta > 0$ и $g_1(x) = x/(\ln x)^\delta$. Тогда $T_n \asymp n \ln \ln n$ и усиленный закон больших чисел на $A = \{(i, j): i/(\ln i)^\delta \leq j \leq i\}$ эквивалентен условию $E|X| \ln^+ \ln^+ |X| < \infty$.

Пример 5. Пусть $1 > \delta \geq 0$ и $g_1(x) = x \exp\{-(\ln x)^\delta\}$. Тогда $T_n \asymp n(\ln n)^\delta$ и усиленный закон больших чисел на $A = \{(i, j): g_1(i) \leq j \leq i\}$ эквивалентен $E|X|(\ln^+ |X|)^\delta < \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baum L. E., Katz M. Convergence rates in the law of large numbers. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, v. 120, p. 108–123.
2. Dunford N. An individual ergodic theorem for noncommutative transformations. — Acta Sci. Math. Szeged, 1951, v. 14, p. 1–4.
3. Gut A. Strong laws for independent identically distributed random variables indexed by a sector. — Ann. Probab., 1983, v. 11, № 3, p. 569–577.
4. Клесов О. И. Неравенство Гаека–Реньи для случайных полей и усиленный закон больших чисел. — Теория вероятн. матем. статист., 1980, т. 22, с. 58–66.
5. Клесов О. И., Рыжлик З. Усиленный закон больших чисел на частично упорядоченных множествах. — Теория вероятн. матем. статист., 1998, т. 58, с. 31–37.
6. Smythe R. T. Strong laws of large numbers for r -dimensional arrays of random variables. — Ann. Probab., 1973, v. 1, № 1, p. 164–170.
7. Wiener N. The ergodic theorem. — Duke Math. J. 1939, v. 5, p. 1–18.
8. Zygmund A. An individual ergodic theorem for noncommutative transformations. — Acta Sci. Math. Szeged., 1951, v. 14, p. 103–110.

Поступила в редакцию
18.III.2004

Исправленный вариант
11.VII.2007

© 2007 г.

ПРОХОРОВ Ю. В.*, ХОХЛОВ В. И.*

О МНОГОЧЛЕНАХ ОТ КОМПОНЕНТ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

В настоящей статье уточняются и распространяются на многомерный случай результаты, полученные в [1] для одномерного случая.

Ключевые слова и фразы: многочлены от случайных величин, гауссовские векторы, многочлены Эрмита, формула Мелера

Напомним одну из теорем работы [1]. Пусть $Q(x)$ — многочлен степени $n \geq 2$, Z — случайная величина, имеющая нормальное распределение вероятностей с параметрами 0 и 1 (т.е. стандартное нормальное распределение) и $Y = Q(Z)$.

Допустим $EY = 0$.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: tvp@tvp.ru