Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Прохоров, В. И. Хохлов, О многочленах от компонент гауссовских случайных векторов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 4, 810–814

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1650>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:57:59

$E|X| \ln^+ |X| < \infty$. Используя симметрию, мы выводим отсюда усиленный закон больших чисел Смайза [6].

Пример 2. Пусть $0 < \theta < 1$ и $g_1(x) = \theta x$. Тогда $T_n \asymp n$ и мы получаем усиленный закон больших чисел Гута [3].

Пример 3. Пусть $1 > \delta > 0$ и $g_1(x) = x^{1-\delta}$. Тогда $T_n \asymp n \ln n$ и поэтому усиленный закон больших чисел на $A = \{(i, j): i^{1-\delta} \leq j \leq i\}$ эквивалентен условию $E|X| \ln^+ |X| < \infty$.

Пример 4. Пусть $\delta > 0$ и $g_1(x) = x/(\ln x)^\delta$. Тогда $T_n \asymp n \ln \ln n$ и усиленный закон больших чисел на $A = \{(i, j): i/(\ln i)^\delta \leq j \leq i\}$ эквивалентен условию $E|X| \ln^+ \ln^+ |X| < \infty$.

Пример 5. Пусть $1 > \delta \geq 0$ и $g_1(x) = x \exp\{-(\ln x)^\delta\}$. Тогда $T_n \asymp n(\ln n)^\delta$ и усиленный закон больших чисел на $A = \{(i, j): g_1(i) \leq j \leq i\}$ эквивалентен $E|X|(\ln^+ |X|)^\delta < \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baum L. E., Katz M. Convergence rates in the law of large numbers. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, v. 120, p. 108–123.
2. Dunford N. An individual ergodic theorem for noncommutative transformations. — Acta Sci. Math. Szeged, 1951, v. 14, p. 1–4.
3. Gut A. Strong laws for independent identically distributed random variables indexed by a sector. — Ann. Probab., 1983, v. 11, № 3, p. 569–577.
4. Клесов О. И. Неравенство Гаека–Реньи для случайных полей и усиленный закон больших чисел. — Теория вероятн. матем. статист., 1980, т. 22, с. 58–66.
5. Клесов О. И., Рыжлик З. Усиленный закон больших чисел на частично упорядоченных множествах. — Теория вероятн. матем. статист., 1998, т. 58, с. 31–37.
6. Smythe R. T. Strong laws of large numbers for r -dimensional arrays of random variables. — Ann. Probab., 1973, v. 1, № 1, p. 164–170.
7. Wiener N. The ergodic theorem. — Duke Math. J. 1939, v. 5, p. 1–18.
8. Zygmund A. An individual ergodic theorem for noncommutative transformations. — Acta Sci. Math. Szeged., 1951, v. 14, p. 103–110.

Поступила в редакцию
18.III.2004

Исправленный вариант
11.VII.2007

© 2007 г.

ПРОХОРОВ Ю. В.*, ХОХЛОВ В. И.*

О МНОГОЧЛЕНАХ ОТ КОМПОНЕНТ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

В настоящей статье уточняются и распространяются на многомерный случай результаты, полученные в [1] для одномерного случая.

Ключевые слова и фразы: многочлены от случайных величин, гауссовские векторы, многочлены Эрмита, формула Мелера

Напомним одну из теорем работы [1]. Пусть $Q(x)$ — многочлен степени $n \geq 2$, Z — случайная величина, имеющая нормальное распределение вероятностей с параметрами 0 и 1 (т.е. стандартное нормальное распределение) и $Y = Q(Z)$.

Допустим $EY = 0$.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: tvp@tvp.ru

Обозначим $DY = \sigma^2$ (дисперсия σ^2 обязательно положительна) и

$$\rho = \rho(Q) = \frac{E|Y|}{\sigma}. \quad (1)$$

Согласно [1], имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. При каждом $n = 2, 3, \dots$ существует такая положительная абсолютная постоянная c_n , что

$$c_n \leq \rho(Q). \quad (2)$$

При $n \geq 2$ в качестве c_n можно взять величину

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 0,849 n^{-3/2} e^{-3n}. \quad (3)$$

Здесь мы рассмотрим многочлены $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_k)$ от $k \geq 2$ переменных и докажем для них утверждение, аналогичное теореме 1. Наше доказательство при $k = 1$ упрощает доказательство теоремы 1 и позволяет улучшить оценку для c_n . Мы используем формулу Мелера и неравенства Н. К. Бакирова (см. [2], [3]).

1. Многочлены Эрмита. В теории вероятностей и математической статистике многочлены Эрмита обычно определяют формулой

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}), \quad n \geq 0. \quad (4)$$

З а м е ч а н и е. В литературе по ортогональным многочленам эти многочлены обозначают $He_n(x)$, а обозначение $H_n(x)$ используют в случае, когда в формуле (4) вместо $e^{x^2/2}$ и $e^{-x^2/2}$ берут функции e^{x^2} и e^{-x^2} соответственно.

Для $H_n(x)$ имеет место формула

$$H_n(x) = n! \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \frac{x^{n-2j}}{2^j j! (n-2j)!} = x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \dots. \quad (5)$$

Нетрудно (с использованием производящих функций) доказать формулу

$$x^n = n! \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{H_{n-2j}(x)}{2^j j! (n-2j)!} = H_n(x) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} H_{n-2}(x) + \dots. \quad (6)$$

Так, формулам

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

и

$$H_7(x) = x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x$$

соответствуют формулы

$$x^4 = H_4(x) + 6H_2(x) + 3$$

и

$$x^7 = H_7(x) + 21H_5(x) + 105H_3(x) + 105H_1(x).$$

Многочлены Эрмита обладают свойством ортогональности:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2/2} dx = \begin{cases} m! & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases} \quad (7)$$

Это соотношение можно записать в виде

$$E H_m(Z) H_n(Z) = \begin{cases} m! & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases} \quad (8)$$

В частности, при $m = 0$, $n = 1, 2, \dots$ получаем

$$E H_n(Y) = 0. \quad (9)$$

Нам потребуется также формула Мелера (Крамер [4, раздел 12.6, формула (12.6.8) и раздел 21.12]: при $|t| < 1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{H_j^2(x) t^j}{j!} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp \left\{ \frac{t}{t+1} x^2 \right\}. \quad (10)$$

Из (10) выводим

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=1}^{\infty} \frac{H_{j_1}^2(x_1) \dots H_{j_k}^2(x_k) t^{j_1+\dots+j_k}}{j_1! \dots j_k!} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{1-t^2})^k} \exp \left\{ \frac{t}{1+t} (x_1^2 + \dots + x_k^2) \right\}. \end{aligned} \quad (10a)$$

Пусть $M = 2, 3, \dots$. Положим $t = \frac{1}{2}$ и оставим в левых частях формул (10) и (10a) только слагаемые с $j_k \leq M$ и с $j_1 + j_2 + \dots + j_k \leq M$ соответственно. Тогда при $k \geq 1$ получим неравенство

$$\sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_k \leq M} \frac{H_{j_1}^2(x_1) \dots H_{j_k}^2(x_k)}{j_1! \dots j_k!} \leq 2^M \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^k \exp \left\{ \frac{1}{3} (x_1^2 + \dots + x_k^2) \right\}. \quad (11)$$

1. Оценка дисперсии σ^2 и неравенство для $Q(x_1, \dots, x_k)$, $k \geq 1$. Пусть $Q(x_1, \dots, x_k)$ — многочлен от k переменных

$$Q = Q(x_1, \dots, x_k) = \sum_{m_1=0}^m \dots \sum_{m_k=0}^m a(m_1, \dots, m_k) x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}. \quad (12)$$

Его степень обозначим n :

$$n = \max_{m_1, \dots, m_k: a(m_1, \dots, m_k) \neq 0} (m_1 + \dots + m_k),$$

и допустим, что $n \geq 2$. Применяя формулу (6), можно представить $Q(x_1, \dots, x_k)$ в виде

$$Q(x_1, \dots, x_k) = \sum_{m_1=0}^m \dots \sum_{m_k=0}^m \alpha(m_1, \dots, m_k) H_{m_1}(x_1) \dots H_{m_k}(x_k), \quad (13)$$

причем

$$\{\max(m_1 + \dots + m_k): \alpha(m_1, \dots, m_k) \neq 0\} = n. \quad (14)$$

Пусть $Z_1, \dots, Z_k$ — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением вероятностей, $Y = Q(Z_1, \dots, Z_k)$.

Из формулы (13) вытекает, что

$$\mathbf{E} Y = \alpha(0, \dots, 0),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Y^2 &= \sum_{m_1=0}^m \dots \sum_{m_k=0}^m \sum_{l_1=0}^m \dots \sum_{l_k=0}^m \alpha(m_1, \dots, m_k) \alpha(l_1, \dots, l_k) (\mathbf{E} H_{m_1}(Z_1) H_{l_1}(Z_1)) \\ &\quad \times \dots \times (\mathbf{E} H_{m_k}(Z_k) H_{l_k}(Z_k)). \end{aligned} \quad (15)$$

В правой части (15) от нуля отличными могут быть только слагаемые, у которых $m_1 = l_1, \dots, m_k = l_k$ и, таким образом,

$$\mathbf{E} Y^2 = \sum_{m_1=0}^m \dots \sum_{m_k=0}^m \alpha^2(m_1, \dots, m_k) m_1! \dots m_k!$$

и

$$\mathbf{D} Y = \sum_{\substack{0 \leq m_1, \dots, m_k \leq m \\ m_1 + \dots + m_k > 0}} \alpha^2(m_1, \dots, m_k) m_1! \dots m_k!. \quad (16)$$

Перепишем формулу (13) в виде

$$Q(x_1, \dots, x_k) = \sum_{m_1=0}^m \cdots \sum_{m_k=0}^m B(m_1, \dots, m_k) A(m_1, \dots, m_k),$$

где

$$A(m_1, \dots, m_k) = \alpha(m_1, \dots, m_k) \sqrt{m_1!} \cdots \sqrt{m_k!},$$

$$B(m_1, \dots, m_k) = \frac{H_{m_1}(x_1)}{\sqrt{m_1!}} \cdots \frac{H_{m_k}(x_k)}{\sqrt{m_k!}},$$

и, применяя неравенство Коши–Буняковского, получим (с учетом (11))

$$\begin{aligned} Q^2(x_1, \dots, x_k) &\leq \left(\sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\dots+m_k \leq n}}^m \cdots \sum_{m_k=0}^m \frac{H_{m_1}^2(x_1)}{m_1!} \cdots \frac{H_{m_k}^2(x_k)}{m_k!} \right) \mathbf{E} Y^2 \\ &\leq 2^n \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^k \exp \left\{ \frac{1}{3} (x_1^2 + \dots + x_k^2) \right\} \mathbf{E} Y^2 \end{aligned} \quad (17)$$

или, в предположении $\mathbf{E} Y = \alpha(0, \dots, 0) = 0$,

$$Q^2(x_1, \dots, x_k) \leq 2^n \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^k \exp \left\{ \frac{1}{3} (x_1^2 + \dots + x_k^2) \right\} \sigma^2. \quad (17a)$$

1. Неравенства Бакирова и их применение. Напомним, что $Z_1, \dots, Z_k$ — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением вероятностей. Справедливо следующее утверждение (ср. [2], [3]).

Теорема 2. Если x_0 лежит вне интервала $[-\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$, то при целом $k \geq 2$

$$\mathbf{P} \{ Z_1^2 + \dots + Z_k^2 \geq k + x_0 \sqrt{2k} \} \leq \mathbf{P} \{ Z_1^2 \geq 1 + x_0 \sqrt{2} \}. \quad (18)$$

Докажем теперь одно элементарное неравенство.

Лемма 1. При любом $N \geq 2$

$$2^N \mathbf{P} \{ Z_1^2 \geq 2N \} < 0,216. \quad (19)$$

Доказательство. Левая часть (19) равна

$$\frac{2^N \cdot 2}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \geq \sqrt{2N}} e^{-x^2/2} dx \leq \frac{2^N \cdot 2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2N}} \int_{x \geq \sqrt{2N}} x e^{-x^2/2} dx = \frac{2^N \cdot 2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{-N},$$

что при $N \geq 2$ не превосходит $(4/e^2)/\sqrt{2\pi} = 0,215964$. Лемма доказана.

Оценим теперь сверху интеграл

$$J_1 = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int \cdots \int_{x_1^2 + \dots + x_k^2 \geq A} Q^2(x_1, \dots, x_k) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1^2 + \dots + x_k^2) \right\} dx_1 \cdots dx_k, \quad (20)$$

где A мы выберем позже. Подставляя вместо Q^2 правую часть формулы (17a) и полагая $y_j = x_j/\sqrt{3}$, $1 \leq j \leq k$, получим

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \sigma^2 2^n \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^k \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int \cdots \int_{x_1^2 + \dots + x_k^2 \geq A} \exp \left\{ -\frac{1}{6} (x_1^2 + \dots + x_k^2) \right\} dx_1 \cdots dx_k \\ &= \sigma^2 2^n 2^k \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int \cdots \int_{y_1^2 + \dots + y_k^2 \geq A/3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_1^2 + \dots + y_k^2) \right\} dy_1 \cdots dy_k \\ &= \sigma^2 2^n 2^k \mathbf{P} \left\{ Z_1^2 + \dots + Z_k^2 \geq \frac{A}{3} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Определим теперь число x_0 равенством $x_0\sqrt{2} = 2(n+k) - 1$ и положим $A/3 = k + x_0\sqrt{k}$.

Тогда $A/3 = 2(n+1)$ при $k = 1$ и правая часть (21) по лемме не превосходит $0,216\sigma^2$. Если же $k \geq 2$ и $n \geq 2$, то $x_0\sqrt{2} \geq 7$, $x_0 \geq 7/\sqrt{2} > 4,94 > 2 + \sqrt{2}$ и по неравенству Бакирова

$$\begin{aligned} \sigma^2 2^n 2^k \mathbf{P} \{Z_1^2 + \dots + Z_k^2 \geq k + x_0\sqrt{2k}\} &\leq \sigma^2 2^n 2^k \mathbf{P} \{Z_1^2 \geq 1 + x_0\sqrt{2}\} \\ &= \sigma^2 2^n 2^k \mathbf{P} \{Z_1^2 \geq 2(n+k)\} \leq 0,216\sigma^2. \end{aligned}$$

Следовательно, при всех натуральных k

$$J_1 \leq 0,216\sigma^2 \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq A} Q^2(x_1, \dots, x_k) \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_k^2) \right\} dx_1 \dots dx_k \geq 0,784\sigma^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Но

$$\begin{aligned} 0,784\sigma^2 &\leq J_0 \leq \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq A} \sigma 2^{n/2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{k/2} e^{A/6} \\ &\quad \times |Q(x_1, \dots, x_k)| \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_k^2) \right\} dx_1 \dots dx_k \\ &\leq \sigma 2^{n/2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{k/2} \exp \left\{ \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{k}}{2}(2(n+k) - 1) \right\} \mathbf{E} |Q(Z_1, \dots, Z_k)|. \end{aligned}$$

Из (23) окончательно следует

$$0,784 \cdot 2^{-n/2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{k/2} \exp \left\{ -\frac{k}{2} - \frac{\sqrt{k}}{2}(2(n+k) - 1) \right\} \leq \frac{\mathbf{E}|Y|}{\sigma}. \quad (24)$$

Следствие. При $k = 1$ левая часть (24) равна

$$\begin{aligned} &0,784 \cdot 2^{-n/2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} 2(n+1) + \frac{1}{2} \right\} \\ &= 0,784 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{1/2} e^{-1} 2^{-n/2} e^{-n} > 0,268 \cdot 2^{-n/2} e^{-n}. \end{aligned}$$

Иными словами, в теореме 1 при $n \geq 2$ можно заменить

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 0,849 n^{-3/2} e^{-2n}$$

на

$$c'_n = 0,268 \cdot 2^{-n/2} e^{-n}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прохоров Ю. В. О многочленах от нормально распределенных случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 747–550.
2. Бакиров Н. К. Письмо в редакцию. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. XXXIII, в. 4, с. 823.
3. Бакиров Н. К. Экстремумы распределений квадратичных форм от гауссовских величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, в. 2, с. 241–250.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию
20.VIII.2007