Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Алешкявичене, В. А. Статулявичус, Формулы обращения в случае разрывного предельного закона, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 1, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:01:59

© 1997 г. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ А. К.*, СТАТУЛЯВИЧУС В. А.*

ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ В СЛУЧАЕ РАЗРЫВНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЗАКОНА

Статья посвящена оценке расстояния в равномерной метрике между функцией распределения F и разрывной функцией ограниченной вариации G через разность им соответствующих преобразований Фурье–Стилтьеса и через концентрацию функций F в окрестностях точек разрыва.

Ключевые слова и фразы: формула обращения, функции распределения, характеристические функции, функции концентрации.

Пусть имеются функция распределения $F(x)$ случайной величины X и функция ограниченной вариации $G(x)$. Преобразования Фурье–Стилтьеса этих функций обозначим через $f(t)$ и $g(t)$ соответственно. Причем преобразование Фурье–Стилтьеса функции $G(x)$, имеющей ограниченную вариацию,

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x)$$

будем называть характеристической функцией независимо от того, является ли $G(x)$ функцией распределения или нет.

Формулы обращения, позволяющие по близости характеристических функций оценивать близость самих функций F и G , были объектом исследований многих авторов. Насколько нам известно, эта проблема наиболее полно решена в случае, когда G на всей прямой имеет ограниченную производную или удовлетворяет условию Липшица (см. [1]–[3], [6]–[8]). Но интересующий нас случай, когда F и G имеют разрывы, в общей постановке, по нашему мнению, исследован меньше, хотя и этот случай был объектом исследований ряда авторов. Отметим известные нам работы, посвященные упомянутому случаю. Когда F чисто разрывная функция распределения, а функция G является функцией ограниченной вариации (обе функции могут иметь разрывы только в одних и тех же точках), формула обращения была получена Эссееном ([1], см. также [2, § 39, теорема 2]). Для случая, когда F и G являются функциями распределения целочисленных случайных величин, И. П. Цареградским

*Институт математики и информатики АН Литвы, ул. Академийос, 4, 232021 Вильнюс; УВВ Каунас, Литва.

[4, теорема 2] получена оценка

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt. \quad (1)$$

Аналогичный результат имеет место и тогда, когда G является функцией ограниченной вариации от целочисленного неотрицательного аргумента [5, лемма 1]. Следует отметить и формулу обращения, полученную А. Кароблисом [8, лемма 1]. Интересный результат без каких-либо ограничений на функции распределения F и G недавно получен В. Бенткусом и Ф. Гетце [9, лемма 8.1]. Они показали, что для любых функций распределения F и G и любого $T > 0$ имеет место оценка

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + R(T), \quad (2)$$

где

$$R(T) \leq \frac{1}{T} \int_{-T}^T |f(t)| dt + \frac{1}{T} \int_{-T}^T |g(t)| dt.$$

Но в некоторых интересующих нас случаях, в частности, в случае, когда G — закон Пуассона, оценка остаточного члена $R(T)$ через оценки величин $T^{-1} \int_{-T}^T |f(t)| dt$ и $T^{-1} \int_{-T}^T |g(t)| dt$ (которые, в свою очередь, являются оценками функций концентрации распределений F и G соответственно — см. [10, гл. 2, § 1, лемма 3]) не даст хорошего результата. Действительно, пусть G — закон Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Тогда, с одной стороны,

$$\sup_x (G(x+T) - G(x)) \leq \left(\frac{96}{95} \right)^2 \frac{1}{T} \int_{-T}^T |g(t)| dt$$

(см. [10, гл. 2, § 1, лемма 3]), а с другой стороны, так как для распределения G масса, сосредоточенная в нуле, равна $e^{-\lambda}$, то при любом $T > 0$

$$\sup_x (G(x+T) - G(x)) \geq e^{-\lambda}.$$

Это показывает, что в приведенном нами примере с помощью формулы (2) мы по близости характеристических функций ничего не сможем сказать о близости соответствующих распределений F и G .

Далее, для общего случая формула обращения приведена В. М. Золотаревым в работе [6] (см. [6, теорема 2], см. также [7]). Но и в формулировке теоремы, и в ее доказательстве допущены пробелы (они относятся к случаю, когда F и G имеют разрывы, но хотя бы одна из них, скажем, F не является чисто разрывной).

Укажем на некоторые из них. При этом будем пользоваться обозначениями, введенными в [6].

Согласно [6], пусть $L(x)$ — монотонная функция, $H(x)$ — функция ограниченной вариации, B_1 и B_2 — множества точек непрерывности функций L и H соответственно.

Пусть выполнены

У с л о в и е A_1 : $q_H = \sup_{B_2} |H'(x)| < \infty$, и

У с л о в и е A_3 : $L(x)$ — монотонная функция (в этом случае в [6] формально принимается, что $q_L = \sup_{B_2} |L'(x)| = 0$).

Положим

$$\Delta = \sup_x |L(x) - H(x)|, \quad M(x) = L(x) - H(x), \quad q = q_H + q_L.$$

Для некоторого достаточно малого $\delta > 0$ (впоследствии $\delta \rightarrow 0$) найдется точка x_δ , для которой $|M(x_\delta)| \geq \Delta - \delta$.

Далее предполагается, что $M(x_\delta) \leq -\Delta + \delta$ и интервал (a, b) — наибольший интервал непрерывности обеих функций L и H , содержащий точку x_δ ($a \leq x_\delta < b$).

Теперь попробуем разобраться в оценке (3) (из [6]), полученной при доказательстве теоремы 2 из [6] при дополнительном предположении, что $L(x)$ — неубывающая функция. Как и в [6], имеем, что для любого $0 < \gamma \leq x_\delta - a$ и всех ν , $|\nu| \leq \gamma$:

$$\begin{aligned} M(x_\delta - (\gamma - \nu)) &= M(x_\delta) - [M(x_\delta) - M(x_\delta - (\gamma - \nu))] \\ &\leq -\Delta + \delta - [L(x_\delta) - L(x_\delta - (\gamma - \nu))] \\ &\quad + [H(x_\delta) - H(x_\delta - (\gamma - \nu))] \\ &\leq -\Delta + \delta - [H(x_\delta) - H(x_\delta - (\gamma - \nu))] \\ &\leq -\Delta + \delta + q_H(\gamma - \nu) = -\Delta + \delta + q(\gamma - \nu), \end{aligned}$$

поскольку $L(x)$ не убывает и, согласно условию A_3 , $q_L = 0$.

Оценка верна — но при условии, что $\sup |L - H|$ достигается в середине или в правой части интервала непрерывности $[a, b)$. Однако $\sup |L - H|$ может достигаться и в левом конце или вблизи левого конца интервала непрерывности. Тогда

$$\begin{aligned} M(x_\delta + (\gamma - \nu)) &= M(x_\delta) - [M(x_\delta) - M(x_\delta + (\gamma - \nu))] \\ &\leq -\Delta + \delta + [L(x_\delta + (\gamma - \nu)) - L(x_\delta)] \\ &\quad + [H(x_\delta) - H(x_\delta + (\gamma - \nu))] \\ &\leq -\Delta + \delta + q_H(\gamma - \nu) + [L(x_\delta + (\gamma - \nu)) - L(x_\delta)] \\ &= -\Delta + \delta + q(\gamma - \nu) + [L(x_\delta + (\gamma - \nu)) - L(x_\delta)], \quad (*) \end{aligned}$$

поскольку, согласно условию A_3 , $q_L \equiv 0$. Но если функция L в интервале непрерывности $[a, b]$ возрастает, то $L(x_\delta + (\gamma - \nu)) - L(x_\delta) > 0$. Тогда из (*) вытекает, что оценка (3) из [6] неверна. Аналогично показывается, что неверна и оценка (4) из [6], когда $L(x)$ не возрастает.

Целью настоящей заметки является оценивание $\sup_x |F(x) - G(x)|$ в случае, когда G является не обязательно непрерывной функцией.

Перейдем к изложению наших результатов.

В дальнейшем G — функция ограниченной вариации, определенная на $\mathbf{R}$, с множеством точек разрыва $A_G = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$ и F — функция распределения на $\mathbf{R}$, множество точек разрыва которой A_F удовлетворяет у с л о в и ю (A):

$$A_F \supseteq A_G \cap \{x: x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\},$$

где $x_{\min}$ — наибольшее из чисел x , для которых $F(x) = 0$, и $x_{\max}$ — наименьшее из x , для которых $F(x + 0) = 1$. Будем считать, что обе функции F и G одновременно непрерывны или слева или справа. Для определенности будем считать, что они обе непрерывны слева. Обозначим

$$\Delta = \sup_x |F(x) - G(x)|.$$

Теорема 1. С л у ч а й 1. Если $F(-\infty) = G(-\infty)$, выполнено условие (A) и G является чисто разрывной функцией, то для Δ имеют место оценки:

$$\Delta \leq \frac{I_T + \delta_F U(x)}{2U(x) - 1} \quad (3)$$

и

$$\Delta \leq \frac{I_T + (l_{T_1} + R_F(T_1) + \bar{\delta}_G/T_1)U(x)}{2U(x) - 1}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{|f(t) - g(t)|}{|t|} dt, \quad L_{T_1} = \frac{T_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t) - g(t)|}{|t| \sqrt{T_1^2 + t^2}} dt, \\ \delta_F &= \max_j (F(x_{j+1} - 0) - F(x_j + 0)), \quad \bar{\delta}_G = 1 + 1.25 \operatorname{Var} G, \\ U(x) &= \int_{|u| < x} p(u) du, \quad p(u) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin u/2}{u/2} \right)^2, \end{aligned}$$

T_1 , T и x — любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$T_1 \geq 2, \quad \frac{\log T_1}{T_1} \leq \frac{1}{3}\beta, \quad T \geq \frac{2x}{\beta}, \quad x > \alpha,$$

α — единственный положительный корень уравнения $2U(x) - 1 = 0$,

$$\beta = \inf_j (x_{j+1} - x_j)$$

и

$$R_F(T_1) = \sup_j \left[(F(x_{j+1} - 0) - F(x_{j+1} - \varepsilon_{T_1})) + (F(x_j + \varepsilon_{T_1}) - F(x_j + 0)) \right], \quad \varepsilon_{T_1} = \frac{\log T_1}{T_1}.$$

С л у ч а й 2. Если $F(-\infty) = G(-\infty)$, выполнено условие (А), функция G не является чисто разрывной и в интервалах непрерывности имеет равномерно ограниченную производную:

$$\sup_j \sup_{x_j < x < x_{j+1}} G'(x) < q < \infty$$

(q — постоянное число), то

$$\Delta \leq \frac{I_T + \delta_{F-G} U(x)}{2U(x) - 1} \quad (5)$$

и

$$\Delta \leq \frac{I_T + (I_{T_1} + R_F(T_1) + \delta_{G,T_1}/T_1)U(x)}{2U(x) - 1}, \quad (6)$$

где

$$\delta_{F-G} = \sup_j \sup_{x, y \in (x_j, x_{j+1})} |M(y) - M(x)|,$$

$$M(x) = F(x) - G(x), \quad \delta_{G,T_1} = 1 + \text{Var } G + q \log T_1$$

и T_1, T, x — любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$T_1 \geq 2, \quad \frac{\log T_1}{T_1} \leq \frac{1}{6}\beta, \quad T \geq \frac{4x}{\beta} \quad \text{и} \quad x > \alpha.$$

С л у ч а й 3. Если $F(-\infty) = G(-\infty)$, выполнено условие (А) и существует конечное число q_G , для всех $0 < y < y'$ удовлетворяющее неравенству

$$|G(y') - G(y)| \leq q_G(y' - y),$$

то

$$\Delta \leq \frac{I_T + (\delta_F + q_G x/T)U(x)}{2U(x) - 1} \quad (7)$$

при любых $x > \alpha$ и $T \geq 4x/\beta$.

З а м е ч а н и е. В работе [7, с. 104] показано, что можно положить $\alpha = 1.7$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $p_T(u) = T p(Tu)$ и пусть $h(t)$ — характеристическая функция, соответствующая плотности $p_T(u)$, т.е.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} p_T(u) du = \begin{cases} 1 - |t|/T, & |t| \leq T, \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$

Тогда, согласно формуле обращения,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (F(y-u) - G(y-u)) p_T(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ity} (f(t) - g(t))}{-it} \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

С л у ч а й 1. Так как в интервалах непрерывности функция G постоянна, а F является функцией распределения, то $\sup |F(x) - G(x)|$ может достигаться только в крайней левой или в крайней правой точках интервала непрерывности функции G .

Предположим сначала, что $\sup_x |F(x) - G(x)|$ достигается в левой точке интервала непрерывности $(x_0, x_1]$, т.е.

$$\Delta = |F(x_0 + 0) - G(x_0 + 0)|.$$

В этом случае, очевидно, $F(x_0 + 0) < G(x_0 + 0)$, и, обозначив $M(x) = F(x) - G(x)$ для $\gamma = \frac{1}{2}(x_1 - x_0 - \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$; точнее ε подберем позднее), имеем

$$J^- = \left| \int_{-\infty}^{\infty} M(x_0 + \gamma - u) p_T(u) du \right| \geq \left| \int_{|u| \leq \gamma} \right| - \left| \int_{|u| > \gamma} \right|.$$

Так как при $|u| \leq \gamma$

$$\begin{aligned} M(x_0 + \gamma - u) &= M(x_0 + 0) - [M(x_0 + 0) - M(x_0 + \gamma - u)] \\ &= -\Delta + [F(x_0 + \gamma - u) - F(x_0 + 0)], \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} J^- &\geq \left\{ \Delta \int_{|u| \leq \gamma} p_T(u) du - \int_{|u| \leq \gamma} [F(x_0 + \gamma - u) - F(x_0 + 0)] p_T(u) du \right. \\ &\quad \left. - \Delta \left(1 - \int_{|u| \leq \gamma} p_T(u) du \right) \right\} \geq \Delta \left(2 \int_{|u| \leq \gamma} p_T(u) du - 1 \right) \\ &\quad - [F(x_0 + 2\gamma) - F(x_0 + 0)] \int_{|u| \leq \gamma} p_T(u) du. \end{aligned}$$

Отсюда, обозначив $\gamma T = x$, получаем

$$\Delta \leq \frac{J^- + [F(x_0 + 2\gamma) - F(x_0 + 0)] U(x)}{2U(x) - 1}. \quad (9)$$

Из (9), имея ввиду (8) и определения величин I_T и δ_F , получаем (3).

Пусть теперь $\sup_x |F(x) - G(x)|$ достигается в правой точке интервала непрерывности $(x_0, x_1]$ т.е.

$$\Delta = |F(x_1) - G(x_1)|.$$

Тогда $F(x_1) > G(x_1)$, и доказательство оценки (3) в этом случае проводится аналогично предыдущему случаю, с той только разницей, что вместо интеграла J^- берем интеграл

$$J^+ = \left| \int_{-\infty}^{\infty} M(x_1 - \gamma - u) p_T(u) du \right|$$

и, используя равенство

$$M(x_1 - \gamma - u) = M(x_1) - [M(x_1) - M(x_1 - \gamma - u)] = \Delta - [F(x_1) - F(x_1 - \gamma - u)],$$

показываем, что $J^+ \geq \{\Delta(2U(x) - 1) - [F(x_1) - F(x_1 - 2\gamma)]U(x)\}$. Тогда

$$\Delta \leq \frac{J^+ + [F(x_1) - F(x_1 - 2\gamma)]U(x)}{2U(x) - 1}. \quad (10)$$

Отсюда следует (3).

Осталось доказать (4). Положим $\varepsilon = \varepsilon_{T_1} = (\log T_1)/T_1$ и будем считать, что T_1 — любое число, удовлетворяющее неравенствам $T_1 \geq 2$, $(\log T_1)/T_1 \leq \frac{1}{3}\beta$. Тогда

$$\begin{aligned} F(x_0 + 2\gamma) - F(x_0 + 0) &\leq [F(x_1 - \varepsilon) - F(x_0 + \varepsilon)] + R_F(T_1), \\ F(x_1 - 0) - F(x_1 - 2\gamma) &\leq [F(x_1 - \varepsilon) - F(x_0 + \varepsilon)] + R_F(T_1), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$R_F(T_1) = \sup_j \left[(F(x_{j+1} - 0) - F(x_{j+1} - \varepsilon)) + (F(x_j + \varepsilon) - F(x_j + 0)) \right].$$

Отсюда и из (9) и (10) следует, что для доказательства (4) достаточно подходящим образом оценить разность $F(x_1 - \varepsilon) - F(x_0 + \varepsilon)$.

Приступим к оцениванию разности $F(x_1 - \varepsilon) - F(x_0 + \varepsilon)$. Пусть ξ обозначает случайную величину с плотностью распределения $T_1 e^{-T_1 x}$, $x \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} F(x_1 - \varepsilon) - F(x_0 + \varepsilon) &= \mathbf{P}\{x_0 + \varepsilon \leq X < x_1 - \varepsilon\} \\ &= \mathbf{P}\{x_0 + \varepsilon \leq X < x_1 - \varepsilon, 0 \leq \xi < \varepsilon\} + \mathbf{P}\{x_0 + \varepsilon \leq X < x_1 - \varepsilon, \xi \geq \varepsilon\} \\ &\leq \mathbf{P}\{x_0 + \varepsilon \leq X < x_1 - \varepsilon \mid 0 \leq \xi < \varepsilon\} \mathbf{P}\{0 \leq \xi < \varepsilon\} + \mathbf{P}\{\xi \geq \varepsilon\} \\ &\leq \mathbf{P}\{x_0 + \varepsilon \leq X + \xi < x_1 \mid 0 \leq \xi < \varepsilon\} \mathbf{P}\{0 \leq \xi < \varepsilon\} + \mathbf{P}\{\xi \geq \varepsilon\} \\ &= \mathbf{P}\{x_0 + \varepsilon \leq X + \xi < x_1, 0 \leq \xi < \varepsilon\} + \mathbf{P}\{\xi \geq \varepsilon\} \\ &\leq \mathbf{P}\{x_0 + \varepsilon \leq X + \xi < x_1\} + \mathbf{P}\{\xi \geq \varepsilon\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Предположим сначала, что G является функцией распределения некоторой случайной величины η . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{x_0 + \varepsilon \leq X + \xi < x_1\} &= \mathbf{P}\{x_0 + \varepsilon \leq X + \xi < x_1\} - \mathbf{P}\{x_0 < \eta < x_2\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{x_1 - 0 \leq \eta < x_2\}. \end{aligned} \quad (13)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 P\{x_0 < \eta < x_2\} &\geq P\{x_0 < \eta < x_2, 0 \leq \xi < \varepsilon\} \\
 &\geq P\{x_0 + \varepsilon \leq \eta + \xi < x_2 \mid 0 \leq \xi < \varepsilon\} P\{0 \leq \xi < \varepsilon\} \\
 &= P\{x_0 + \varepsilon \leq \eta + \xi < x_2, 0 \leq \xi < \varepsilon\} \\
 &= P\{x_0 + \varepsilon \leq \eta + \xi < x_2\} - P\{\xi \geq \varepsilon\}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), находим, что

$$\begin{aligned}
 P\{x_0 + \varepsilon \leq X + \xi < x_1\} \\
 \leq [P\{x_0 + \varepsilon \leq X + \xi < x_1\} - P\{x_0 + \varepsilon \leq \eta + \xi < x_1\}] \\
 + [P\{x_1 - 0 \leq \eta < x_2\} - P\{x_1 - 0 \leq \eta + \xi < x_2\}] \\
 + P\{\xi \geq \varepsilon\}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть $\varphi_\xi(t)$ обозначает характеристическую функцию величины ξ , т.е.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = T_1 \int_0^\infty e^{itu} e^{-T_1 u} du = \frac{T_1}{T_1 - it}. \tag{16}$$

Тогда, согласно формуле обращения,

$$\begin{aligned}
 P\{x_0 + \varepsilon \leq X + \xi < x_1\} - P\{x_0 + \varepsilon \leq \eta + \xi < x_1\} \\
 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-itx_1} - e^{-it(x_0 + \varepsilon)}}{-it} [f(t) - g(t)] \varphi_\xi(t) dt.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Учитывая (11) и равенство $P\{\xi < u\} = 1 - e^{-T_1 u}$, имеем

$$\begin{aligned}
 &\left| P\{x_1 - 0 \leq \eta < x_2\} - P\{x_1 - 0 \leq \eta + \xi < x_2\} \right| \\
 &= \left| P\{x_1 - 0 \leq \eta < x_2\} - \int_{-\infty}^{x_2 - 0} [1 - e^{-T_1(x_2 - u)}] dG(u) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{x_1 - 0} [1 - e^{-T_1(x_1 - u)}] dG(u) \right| \\
 &\leq \max(e^{-T_1(x_2 - x_1)} G(x_1 + 0), e^{-T_1(x_1 - x_0)} G(x_0 + 0)) \\
 &< e^{-3\varepsilon T_1} = \frac{1}{T_1^3}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Далее,

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} = T_1 \int_\varepsilon^\infty e^{-T_1 u} du = e^{-T_1 \varepsilon} = \frac{1}{T_1}. \tag{19}$$

Наконец, из соотношений (12) и (15)–(19) следует, что при любом $T_1 \geq 2$, удовлетворяющем неравенству $(\log T_1)/T_1 \leq \frac{1}{3}\beta$,

$$|F(x_1 - \varepsilon) - F(x_0 + \varepsilon)| \leq l_{T_1} + \frac{2.25}{T_1}, \tag{20}$$

где

$$l_{T_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t) - g(t)|}{|t|} |\varphi_{\xi}(t)| dt = \frac{T_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t) - g(t)|}{|t| \sqrt{T_1^2 + t^2}} dt. \quad (21)$$

Наконец, из (9), (11) и (20) следует (4) в случае, когда $\sup_x |F(x) - G(x)|$ достигается в левом конце интервала (x_0, x_1) и когда сама функция G является функцией распределения.

Пусть теперь $G(x)$ является чисто разрывной функцией ограниченной вариации со скачками в точках $\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$. Тогда функцию $G(x)$ можем записать как разность двух возрастающих функций, т.е. $G(x) = G_1(x) - G_2(x)$, где через G_1 обозначена возрастающая часть функции $G(x)$ и через $G_2(x)$ обозначена убывающая часть функции $G(x)$ со знаком минус. Заметим, что в интервале (x_0, x_1) обе функции будут постоянными, а в точке x_1 одна из этих функций, скажем, G_2 , будет иметь скачок. Случай, когда G_1 имеет скачок, исследуется аналогично. Тогда

$$\begin{aligned} G_2(x_1 - 0) - G_2(x_0 + 0) &= [G_2(x_2 - \varepsilon) - G_2(x_0 + \varepsilon)] \\ &\quad - [G_2(x_1 + 0) - G_2(x_1 - 0)] = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned} G_2(x_2 - \varepsilon) - G_2(x_0 + \varepsilon) &= [P_{G_2}(x_2 - \varepsilon) - P_{G_2}(x_0 + \varepsilon)] \\ &\quad \times [G_2(\infty) - G_2(-\infty)], \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$P_{G_2}(x) = \frac{G_2(x) - G_2(-\infty)}{G_2(\infty) - G_2(-\infty)}.$$

Далее, так как $\Delta = \sup_x |F(x) - G(x)|$ достигается в точке x_0 и $F(x_0 + 0) < G(x_0 + 0)$, то в этой точке x_0 только функция G_1 может иметь скачок, а функция G_2 должна быть постоянной. Пусть, далее, точка x_l ($x_l > x_1$) является следующей точкой скачка функции G_1 . Тогда

$$\begin{aligned} G_1(x_l - 0) - G_1(x_0 + 0) &= [G_1(x_{l+1} - 0) - G_1(x_0 + 0)] \\ &\quad - [G_1(x_1 + 0) - G_1(x_1 - 0)] = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} G_1(x_{l+1} - 0) - G_1(x_0 + 0) &= [P_{G_1}(x_{l+1} - 0) - P_{G_1}(x_0 + 0)] \\ &\quad \times [G_1(\infty) - G_1(-\infty)] \end{aligned} \quad (25)$$

и

$$P_{G_1}(x) = \frac{G_1(x) - G_1(-\infty)}{G_1(\infty) - G_1(-\infty)}.$$

Очевидно, что функции P_{G_1} и P_{G_2} являются функциями распределения некоторых случайных величин η_1 и η_2 . Следовательно, аналогично (12) и (14) имеем

$$\begin{aligned} P_{G_1}(x_{l+1} - 0) - P_{G_1}(x_0 + 0) &= \mathbf{P}\{x_0 < \eta_1 < x_{l+1}\} \\ &\geq \mathbf{P}\{x_0 + \varepsilon \leq \eta_1 + \xi < x_{l+1}\} - \mathbf{P}\{x_0 + \varepsilon \leq \eta_1 + \xi < x_{l+1}, \xi \geq \varepsilon\} \end{aligned} \quad (26)$$

и

$$P_{G_2}(x_2 - \varepsilon) - P_{G_2}(x_0 + \varepsilon) = P\{x_0 + \varepsilon \leq \eta_2 < x_2 - \varepsilon\} \\ \geq [P\{x_0 + \varepsilon \leq \eta_2 + \xi < x_2\} + P\{x_0 + \varepsilon \leq \eta_2 < x_2 - \varepsilon, \xi \geq \varepsilon\}]. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (25), а полученное подставляя в (24) и учитывая оценки

$$P\{x_0 + \varepsilon \leq \eta_1 + \xi < x_{l+1}, \xi \geq \varepsilon\} [G_1(\infty) - G_1(-\infty)] \\ \leq \int_{\varepsilon}^{\infty} G_1(x_{l+1} - u) d[1 - e^{-T_1 u}] - \int_{\varepsilon}^{\infty} G_1(x_1 + \varepsilon - u) d[1 - e^{-T_1 u}] \\ = T_1 \int_{\varepsilon}^{\infty} [G_1(x_{l+1} - u) - G_1(x_0 + \varepsilon - u)] e^{-T_1 u} du < (\text{Var } G_1) e^{-T_1 \varepsilon}$$

и

$$P\{x_1 - 0 \leq \eta_1 + \xi < x_{l+1}\} [G_1(\infty) - G_1(-\infty)] \\ = \int_{-\infty}^{x_{l+1}-0} [1 - e^{-T_1(x_{l+1}-u)}] dG_1(u) - \int_{-\infty}^{x_1-0} [1 - e^{-T_1(x_1-u)}] dG_1(u) \\ = \left\{ [G_1(x_l + 0) - G_1(x_l - 0)] - \int_{-\infty}^{x_l+0} e^{-T_1(x_{l+1}-u)} dG_1(u) \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{x_0+0} e^{-T_1(x_1-u)} dG_1(u) \right\} \\ \leq [G_1(x_l + 0) - G_1(x_l - 0)] + \max(e^{-T_1(x_1-x_0)}, e^{-T_1(x_{l+1}-x_l)}) \text{Var } G_1,$$

находим, что

$$[G_1(x_1 - 0) - G_1(x_0 + 0)] \geq \left(P\{x_0 + \varepsilon \leq \eta_1 + \xi < x_1\} [G_1(\infty) - G_1(-\infty)] \right. \\ \left. - \frac{\text{Var } G_1}{T_1^3} - \text{Var } G_1 e^{-T_1 \varepsilon} \right) \\ = \left(\int_{-\infty}^{x_1-0} [1 - e^{-T_1(x_1-u)}] dG_1(u) \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{x_0+\varepsilon} [1 - e^{-T_1(x_0+\varepsilon-u)}] dG_1(u) - \frac{\text{Var } G_1}{T_1^3} - \frac{\text{Var } G_1}{T_1} \right). \quad (28)$$

Далее, подставляя (27) в (23), а полученное — в (22), и имея в виду (19) и оценку

$$P\{x_1 - 0 \leq \eta_2 + \xi < x_2\} [G_2(\infty) - G_2(-\infty)] \\ = \int_{-\infty}^{x_2-0} [1 - e^{-T_1(x_2-u)}] dG_2(u) - \int_{-\infty}^{x_1-0} [1 - e^{-T_1(x_1-u)}] dG_2(u) \\ \leq \left\{ [G_2(x_1 + 0) - G_2(x_1 - 0)] + \frac{\text{Var } G_2}{T_1^3} \right\},$$

получаем

$$G_2(x_1 - 0) - G_2(x_0 + 0) \leq \mathbf{P}\{x_0 + \varepsilon \leq \eta_2 + \xi < x_1\} [G_2(\infty) - G_2(-\infty)] + \frac{\text{Var } G_2}{T_1^3} + \frac{\text{Var } G_2}{T_1}. \quad (29)$$

Наконец, из (19), (28) и (29) следует, что при $T_1 \geq 2$

$$\begin{aligned} & [G(x_1 - 0) - G(x_0 + 0)] \\ & \geq \left\{ \left(\int_{-\infty}^{x_1 - 0} [1 - e^{-T_1(x_1 - u)}] dG(u) - \int_{-\infty}^{x_0 + \varepsilon} [1 - e^{-T_1(x_0 + \varepsilon - u)}] dG(u) \right) - \frac{1.25 \text{Var } G}{T_1} \right\} \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it(x_1 - 0)} - e^{-it(x_0 + \varepsilon)}}{-it} g(t) \varphi_{\xi}(t) dt - \frac{1.25 \text{Var } G}{T_1}. \quad (30) \end{aligned}$$

С другой стороны, так как $G(x_1 - 0) - G(x_0 + 0) = G(x_1 - 0) - G(x_0 + \varepsilon) = 0$, то из соотношений (12), (19) и (30) вытекает, что

$$\begin{aligned} & F(x_0 + 2\gamma) - F(x_0 + \varepsilon) = [F(x_0 + 2\gamma) - F(x_0 + \varepsilon)] \\ & - [G(x_1 - 0) - G(x_0 + \varepsilon)] \\ & \leq \left[\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it(x_1 - 0)} - e^{-it(x_0 + \varepsilon)}}{-it} [f(t) - g(t)] \varphi_{\xi}(t) dt \right| + \frac{1 + 1.25 \text{Var } G}{T_1} \right] \leq I_{T_1} + \frac{1 + 1.25 \text{Var } G}{T_1}, \quad T_1 \geq 2, \quad \frac{\log T_1}{T_1} \leq \frac{1}{3}\beta, \end{aligned}$$

где I_{T_1} определено соотношением (21). Отсюда и из (9) и (11) следует (4) в случае, когда функция G с ограниченным изменением является постоянной на интервалах (x_l, x_{l+1}) , $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

С л у ч а й 2. Если G не является чисто разрывной функцией, то $\sup_x |F(x) - G(x)|$ может достигаться в любой точке некоторого интервала непрерывности. Пусть этой точкой будет точка $\tilde{x}$ из интервала $(x_0, x_1]$. Тогда наиболее сложным для исследования будет случай, когда $\tilde{x} - x_0 \geq x_1 - \tilde{x}$ и $F(\tilde{x}) > G(\tilde{x})$. Разберем этот случай подробнее. Так как другие случаи исследуются аналогично, то о них больше говорить не будем.

Очевидно, что в исследуемом случае $\tilde{x} - x_0 \geq \frac{1}{2}\beta$. Тогда для $\gamma_1 = \frac{1}{2}(\tilde{x} - x_0 - \varepsilon)$ с $\varepsilon = (\log T_1)/T_1$ и T_1 , удовлетворяющим неравенствам $T_1 \geq 2$, $\log T_1/T_1 \leq \frac{1}{6}\beta$, имеем

$$J = \left| \int_{-\infty}^{\infty} M(\tilde{x} - \gamma_1 + u) p_T(u) du \right| \geq J' - J'', \quad (31)$$

где

$$J'' = \left| \int_{|u| \geq \gamma_1} M(\tilde{x} - \gamma_1 + u) p_T(u) du \right| \leq \Delta \left(1 - \int_{|u| < \gamma_1} p_T(u) du \right) \quad (32)$$

и

$$\begin{aligned} J' &= \left| \int_{|u| < \gamma_1} M(\tilde{x} - \gamma_1 + u) p_T(u) du \right| \\ &\geq \left(\Delta - \sup_{|u| < \gamma_1} [M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - \gamma_1 + u)] \right) \int_{|u| < \gamma_1} p_T(u) du. \end{aligned}$$

Пусть

$$\sup_{|u| < \gamma_1} [M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - \gamma_1 + u)] = M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - u').$$

Тогда очевидно, что $u' \in (\delta, 2\gamma)$, где $\delta > 0$, и

$$J' \geq \left(\Delta - [M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - u')] \right) \int_{|u| < \gamma} p_T(u) du. \quad (33)$$

Из (31)–(33) следует, что при $M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - u') < \Delta$ и $T\gamma = x$

$$J \geq [2\Delta - (M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - u'))] U(x) - \Delta,$$

и, следовательно,

$$\Delta \leq \frac{J + [M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - u')] U(x)}{2U(x) - 1}. \quad (34)$$

Из (34) и определения величин I_T и δ_{F-G} вытекает справедливость оценки (5) при $M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - u') < \Delta$. Если же $M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - u') \geq \Delta$, то, очевидно, оценка (5) остается справедливой. Числа x и T можем выбирать любыми, удовлетворяющими неравенствам $x > \alpha$, $T > 6x/\beta$.

Чтобы убедиться в справедливости неравенства (6), оценим разность $|M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - u')|$, входящую в правую часть (34). Сначала исследуем случай, когда $\tilde{x} \notin (x_1 - \varepsilon, x_1)$. Не ограничивая общности, положим, что $[F(\tilde{x}) - F(\tilde{x} - u')] > [G(\tilde{x}) - G(\tilde{x} - u')]$. Тогда

$$|M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - u')| = [F(\tilde{x}) - F(\tilde{x} - u')] - [G(\tilde{x}) - G(\tilde{x} - u')]. \quad (35)$$

Далее, введем в рассмотрение случайную величину ξ^- с плотностью распределения $T_1 e^{T_1 x}$, $x \leq 0$, для которой

$$\varphi_{\xi^-}(t) = E e^{it\xi^-} = \frac{T_1}{T_1 + it}, \quad |\varphi_{\xi^-}(t)| = \frac{T_1}{\sqrt{T_1^2 + t^2}}. \quad (36)$$

Аналогично (12) показываем, что

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}) - F(\tilde{x} - u') &= P\{\tilde{x} - u' \leq X < \tilde{x}\} \\ &\leq P\{\tilde{x}_1 - u' \leq X < \tilde{x} \mid -\varepsilon < \xi^- \leq 0\} P\{-\varepsilon < \xi^- \leq 0\} + P\{\xi^- \leq -\varepsilon\} \\ &\leq P\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq X + \xi^- < \tilde{x}\} + P\{\xi^- \leq -\varepsilon\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it\tilde{x}} - e^{-it(\tilde{x}-u'-\varepsilon)}}{-it} f(t) \varphi_{\xi^-}(t) dt + P\{\xi^- \leq -\varepsilon\}. \quad (37)$$

Далее, рассмотрим разность $G(\tilde{x}) - G(\tilde{x} - u')$. Пусть $G(x) = G_1(x) - G_2(x)$, где, как и раньше, $G_1(x)$ обозначает возрастающую часть функции $G(x)$, а $G_2(x)$ — убывающую часть функции $G(x)$ со знаком минус. Тогда

$$G(\tilde{x}) - G(\tilde{x} - u') = [G_1(\tilde{x}) - G_1(\tilde{x} - u')] - [G_2(\tilde{x}) - G_2(\tilde{x} - u')]. \quad (38)$$

Далее, не ограничивая общности, будем считать, что G_1 и G_2 являются возрастающими функциями на интервале (x_0, x_1) . В противном случае, т.е. когда эти функции постоянны на интервале (x_0, x_1) , исследование можно провести по схеме случая 1. Тогда

$$G_1(\tilde{x}) - G_1(\tilde{x} - u') = [P_{G_1}(\tilde{x}) - P_{G_1}(\tilde{x} - u')] [G_1(\infty) - G_1(-\infty)] \quad (39)$$

и

$$G_2(\tilde{x}) - G_2(\tilde{x} - u') = [P_{G_2}(\tilde{x}) - P_{G_2}(\tilde{x} - u')] [G_2(\infty) - G_2(-\infty)], \quad (40)$$

где функции $P_{G_1}(x)$ и $P_{G_2}(x)$, как и раньше, являются функциями распределения некоторых случайных величин η_1 и η_2 . Очевидно,

$$\begin{aligned} P_{G_1}(\tilde{x}) - P_{G_1}(\tilde{x} - u') &= P\{\tilde{x} - u' \leq \eta_1 < \tilde{x}\} \\ &= P\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 < \tilde{x}\} - P\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 < \tilde{x} - u'\}. \end{aligned} \quad (41)$$

С другой стороны, аналогично (14),

$$\begin{aligned} P\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 < \tilde{x}\} &= P\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 < \tilde{x} \mid -\varepsilon < \xi^- < 0\} \\ &\quad \times P\{-\varepsilon < \xi^- < 0\} + P\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 \leq \tilde{x}, \xi^- < \varepsilon\} \\ &\geq P\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 + \xi^- < \tilde{x} - \varepsilon\} \geq P\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 + \xi^- < \tilde{x}\} \\ &\quad - P\{\tilde{x} - \varepsilon \leq \eta_1 + \xi^- < \tilde{x}\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (41) и (42) вытекает, что

$$\begin{aligned} P_{G_1}(\tilde{x}) - P_{G_1}(\tilde{x} - u') &= P\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 + \xi^- < \tilde{x}\} \\ &\quad - P\{\tilde{x} - \varepsilon \leq \eta_1 + \xi^- < \tilde{x}\} - P\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 < \tilde{x} - u'\} \end{aligned} \quad (43)$$

и, аналогично (12),

$$\begin{aligned} P_{G_2}(\tilde{x}) - P_{G_2}(\tilde{x} - u') &= P\{\tilde{x} - u' \leq \eta_2 < \tilde{x}\} \\ &\leq P\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_2 + \xi^- < \tilde{x}\} + P\{\tilde{x} - u' \leq \eta_2 < \tilde{x}, \xi^- \leq -\varepsilon\}. \end{aligned} \quad (44)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 + \xi^- < \tilde{x}\} &= [G_1(\infty) - G_1(-\infty)]^{-1} \\ &\quad \times \left[\int_{\tilde{x}}^{\infty} e^{T_1(\tilde{x}-z)} dG_1(z) - \int_{\tilde{x}-u'-\varepsilon}^{\infty} e^{T_1(\tilde{x}-u'-\varepsilon-z)} dG_1(z) \right] \end{aligned} \quad (45)$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_2 + \xi^- < \tilde{x}\} &= [G_2(\infty) - G_2(-\infty)]^{-1} \\ &\times \left[\int_{\tilde{x}}^{\infty} e^{T_1(\tilde{x}-z)} dG_2(z) - \int_{\tilde{x}-u'-\varepsilon}^{\infty} e^{T_1(\tilde{x}-u'-\varepsilon-z)} dG_2(z) \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Подставляя сначала (45) и (46) в (43) и (44) соответственно, а потом подставляя полученные оценки соответственно в (39) и (40), приходим к оценкам

$$\begin{aligned} &G_1(\tilde{x}) - G_1(\tilde{x} - u') \\ &\geq \left\{ \left[\int_{\tilde{x}}^{\infty} e^{T_1(\tilde{x}-z)} dG_1(z) - \int_{\tilde{x}-u'-\varepsilon}^{\infty} e^{T_1(\tilde{x}-u'-\varepsilon-z)} dG_1(z) \right] \right. \\ &\quad - \mathbf{P}\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 + \xi^- < \tilde{x}, \xi^- \leq -\varepsilon\} [G_1(\infty) - G_1(-\infty)] \\ &\quad \left. - \mathbf{P}\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 < \tilde{x} - u'\} [G_1(\infty) - G_1(-\infty)] \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

и

$$\begin{aligned} &G_2(\tilde{x}) - G_2(\tilde{x} - u') \\ &\leq \left\{ \left[\int_{\tilde{x}}^{\infty} e^{T_1(\tilde{x}-z)} dG_2(z) - \int_{\tilde{x}-u'-\varepsilon}^{\infty} e^{T_1(\tilde{x}-u'-\varepsilon-z)} dG_2(z) \right] \right. \\ &\quad \left. + [G_2(\tilde{x}) - G_2(\tilde{x} - u')] \mathbf{P}\{\xi^- \leq -\varepsilon\} \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 + \xi^- < \tilde{x} - \varepsilon, \xi^- \leq -\varepsilon\} [G_1(\infty) - G_1(-\infty)] \\ &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} [G_1(\tilde{x} - \varepsilon - z) - G_1(\tilde{x} - u' - \varepsilon - z)] de^{T_1 z} \leq (\text{Var } G) e^{-T_1 \varepsilon} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\tilde{x} - u' - \varepsilon \leq \eta_1 < \tilde{x} - u'\} [G_1(\infty) - G_1(-\infty)] \\ &= G_1(\tilde{x} - u' - \varepsilon) - G_1(\tilde{x} - u') \leq q\varepsilon, \end{aligned}$$

то из (38), (47) и (48) вытекает, что

$$\begin{aligned} G(\tilde{x}) - G(\tilde{x} - u') &\geq \left\{ \left[\int_{\tilde{x}}^{\infty} e^{T_1(\tilde{x}-z)} dG(z) - \int_{\tilde{x}-u'-\varepsilon}^{\infty} e^{-T_1(\tilde{x}-u'-\varepsilon-z)} dG(z) \right] \right. \\ &\quad \left. - e^{-T_1 \varepsilon} \text{Var } G - q\varepsilon \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it\tilde{x}} - e^{-it(\tilde{x}-u'-\varepsilon)}}{-it} g(t) \varphi_{\xi^-}(t) dt - \frac{1}{T_1} (\text{Var } G + q \log T_1). \end{aligned} \quad (49)$$

Наконец, из (35), (37) и (49) следует, что

$$\begin{aligned}
 & |M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - u')| \\
 & \leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it\tilde{x}} - e^{-it(\tilde{x}-u'-\epsilon)}}{-it} [f(t) - g(t)] \varphi_{\xi-}(t) dt \right| \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{T_1} (1 + \text{Var } G + q \log T_1) \right\} \leq l_{T_1} + \frac{\delta_{G, T_1}}{T_1}. \quad (50)
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (34) вытекает оценка (6) в случае, когда $\tilde{x} \notin (x_1 - \epsilon, x_1)$.

Рассмотрим случай $\tilde{x} \in (x_1 - \epsilon, x_1)$. Пусть $\epsilon' = \tilde{x} - (x_1 - \epsilon)$. Очевидно, что $\epsilon' < \epsilon$. Тогда, вспоминая определение величины $R_f(T_1)$, получаем

$$\begin{aligned}
 & M(\tilde{x}) - M(\tilde{x} - u') \\
 & = \left\{ [M(\tilde{x} - \epsilon') - M(\tilde{x} - u')] + [F(\tilde{x}) - F(\tilde{x} - \epsilon')] - [G(\tilde{x}) - G(\tilde{x} - \epsilon')] \right\} \\
 & \leq [M(\tilde{x} - \epsilon') - M(\tilde{x} - u')] + R_f(T_1) + q\epsilon. \quad (51)
 \end{aligned}$$

Исследуя разность $M(\tilde{x} - \epsilon') - M(\tilde{x} - u')$, проводим те же самые рассуждения, что и в предыдущем случае, и находим, что

$$|M(\tilde{x} - \epsilon') - M(\tilde{x} - u')| \leq l_{T_1} + \frac{1}{T_1} (1 + \text{Var } G + q \log T_1).$$

Отсюда и из (34) и (51) вытекает оценка (6) в случае $\tilde{x} \in (x_1 - \epsilon, x_1)$. Случай 2 разобран.

С л у ч а й 3. Используя соотношение (31) и при оценке J' учитывая неравенство

$$\begin{aligned}
 M(\tilde{x} - \gamma_1 + u) &= \Delta - [(F(\tilde{x}) - F(\tilde{x} - \gamma_1 + u)) \\
 &\quad - (G(\tilde{x}) - G(\tilde{x} - \gamma_1 + u))] \geq \Delta - \delta_F - q_G(\gamma - u)
 \end{aligned}$$

и соотношение

$$\int_{|u| < \gamma} u p_T(u) du = 0,$$

получаем, что

$$J' \geq (\Delta - \delta_F - q_G \gamma) \int_{|u| < \gamma} p_T(u) du$$

и

$$J \geq (2\Delta - (\delta_F + q_G \gamma)) \int_{|u| < \gamma T} p(u) du - \Delta.$$

Отсюда, полагая $\gamma T = x$, получаем (7).

Теорема 1 доказана.

Заметим, что если G — кусочно постоянная функция, имеющая разрывы только в целых числах, и если мы умеем достаточно хорошо оценить δ_F , то положив $\alpha = 1.7$, $\beta = 1$, можем в формуле (3) выбрать

$T = 3.46 \approx 1.1\pi$. Но тогда оценка (3) сравнима с оценкой интеграла из формулы Цареградского (1), в которой $T = \pi$.

Далее, заметим, что для оценки величины $R_F(T_1)$, входящей в правые части оценок (4) и (6), в случае, когда F является распределением суммы независимых случайных величин, будет полезна приводимая ниже теорема 2, поскольку $R_F(T_1) \leq 2Q_{\tilde{F}}(T_1)$, где $\tilde{F}$ — составляющая функции распределения, полученная после выброса скачков в точках множества A_G , и

$$Q_{\tilde{F}}(h) = \sup_x (\tilde{F}(x+h) - \tilde{F}(x)).$$

Пусть $Q_F(h)$ обозначает функцию концентрации распределения F , т.е. пусть

$$Q_F(h) = \sup_x [F(x+h) - F(x)], \quad h > 0.$$

Для любой меры

$$\mu(B) = \int_B dV(x),$$

заданной на борелевских множествах прямой посредством функции $V(x)$, неубывающей, непрерывной слева (или справа) и такой, что $V(-\infty) = 0$, $V(\infty) < \infty$, также можно определить «функцию концентрации» соотношением

$$Q_V(h) = \sup_x (V(x+h) - V(x)).$$

Для $Q_V(h)$ будут верны оценки, аналогичные оценкам, которые имеют место для концентрации $q_F(h)$ функции распределения F (см. [10, гл. 3, §§ 1, 2]). (При этом нужно только учесть, что возможна ситуация, когда $V(\infty) \neq 1$). Так, например, будем иметь неравенство

$$Q_{V_1+V_2}(h) \leq \min \{Q_{V_1}(h) V_2(\infty), Q_{V_2}(h) V_1(\infty)\}, \quad h > 0. \quad (52)$$

Нетрудно видеть, что эта оценка является аналогом оценки

$$Q_{F_1+F_2}(h) \leq \min \{Q_{F_1}(h), Q_{F_2}(h)\}, \quad h > 0,$$

где F_1 и F_2 — функции распределения.

Далее, пусть $F_X(x)$ и $f_X(t)$ обозначают, соответственно, функцию распределения и характеристическую функцию случайной величины X . Пусть

$$F_X(x) = \tilde{F}_X(x) + \tilde{\tilde{F}}_X(x), \quad (53)$$

где $\tilde{F}_X$ — часть функции F_X , полученная выбросом скачков в точках множества A_G и $\tilde{\tilde{F}}_X$ — чисто разрывная часть функции F_X , имеющая скачки только в точках множества A_G .

Тогда

$$f_X(t) = \tilde{f}_X(t) + \tilde{\tilde{f}}_X(t), \quad (54)$$

где $\tilde{f}_X(t)$ и $\tilde{\tilde{f}}_X(t)$ — преобразование Фурье–Стилтьеса функций $\tilde{F}_X$ и $\tilde{\tilde{F}}_X$ соответственно.

Теорема 2. Если

$$S_n = X_1^{(n)} + \dots + X_n^{(n)}$$

есть сумма независимых случайных величин $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$, взятых из n -й серии, то

$$Q_{\tilde{F}_{S_n}}(h) \leq \sum_{l=1}^n Q_{\tilde{F}_{X_l^{(n)}}}(h). \quad (55)$$

В дальнейшем вместо $X_l^{(n)}$ будем писать X_l , опуская индекс (n) (номер серии).

Доказательство теоремы 2. Воспользовавшись соотношением (54), получаем

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t) &= f_{S_{n-1}} \tilde{f}_{X_n}(t) \\ &+ \sum_{m=2}^n f_{S_{n-m}}(t) \tilde{f}_{X_{n-m+1}}(t) \prod_{l=n-m+2}^n \tilde{\tilde{f}}_{X_l}(t) + \prod_{l=1}^n \tilde{\tilde{f}}_{X_l}(t). \end{aligned} \quad (56)$$

В силу (53) равенство (56) соответствует равенству

$$F_{S_n}(x) = V(x) + W(x), \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned} V &= \sum_{m=1}^n \tilde{F}_{X_{n-m+1}} * V_m, \\ V_1 &= F_{S_{n-1}}, \quad V_m = F_{S_{n-m}} * \tilde{\tilde{F}}_{X_{n-m+2}} * \dots * \tilde{\tilde{F}}_{X_n}, \quad 2 \leq m \leq n, \\ W &= \tilde{\tilde{F}}_{X_1} * \dots * \tilde{\tilde{F}}_{X_n}. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$Q_V(h) \leq \sum_{m=1}^n Q_{\tilde{F}_{n-m+1} * V_m}(h).$$

Отсюда, согласно (52), получаем

$$Q_V(h) \leq \sum_{m=1}^n Q_{\tilde{F}_{n-m+1}}(h) = \sum_{l=1}^n Q_{\tilde{F}_l}(h). \quad (58)$$

Вернемся к равенству (57) и из обеих частей этого равенства будем вычитать скачки в точках множества A_G . После этого в левой части равенства (57) останется $\tilde{F}_{S_n}$, а в правой части — только функция $\tilde{V}(x)$, получающаяся из $V(x)$ вычитанием скачков в точках множества

A_G . Понятно, что «концентрация» функции $\tilde{V}(x)$ будет не больше, чем «концентрация» функции $V(x)$, т.е.

$$Q_{\tilde{V}}(h) \leq Q_V(h). \quad (59)$$

Наконец, из неравенств (58) и (59) вытекает неравенство (55). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Esseen C.-G.* Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. — *Acta Math.*, 1945, v. 77, p. 1-125.
2. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
3. *Мешалкин Л. Д., Rogozin Б. А.* Оценка расстояния между функциями распределения по близости их характеристических функций и ее применение к центральной предельной теореме. — В сб.: Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963, с. 49-55.
4. *Цареградский И. П.* О равномерном приближении биномиального распределения неограниченно делимыми законами. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1958, т. III, в. 4, с. 470-474.
5. *Franken P.* Approximation der Verteilungen von Summen unabhängiger nichtnegativer ganzzahliger Zufallsgrossen durch Poissonsche Verteilungen. — *Math. Nachr.*, 1964, B. 27, H. 5-6, S. 303-340.
6. *Zolotarev V. M.* A sharpening of the inequality of Berry-Esseen. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1967, v. 8, № 4, p. 332-342.
7. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
8. *Кароблис А.* Аппроксимация функций распределения сумм независимых случайных величин. — *Литов. матем. сб.*, 1985, т. 25, № 2, с. 77-89.
9. *Bentkus V., Götze F.* On the lattice point problem for ellipsoid. Preprint 94-111, SFB 343, Univ. Bielefeld, 1994.
10. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 416 с.

Поступила в редакцию
21.XII.1995